

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 27 (1972)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Projektion des Torus in isotroper Richtung  
**Autor:** Hohenberg, Fritz  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-28631>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

---

El. Math.      Band 27      Heft 4      Seiten 73-96      10. Juli 1972

---

## Projektion des Torus in isotroper Richtung

*Der wahre Umriss (die Kontur) des Torus bei beliebiger Sehstrahlrichtung wird in 1. durch eine sehr einfache Formel angegeben. In 2. werden wahrer und scheinbarer Umriss bei isotroper Sehstrahlrichtung auf drei Arten bestimmt. Der wahre Umriss bildet sich im Normalriss auf die Mittenebene auf zwei Konchoiden des Nikomedes ab. In der Mittenebene erhält man als scheinbarem Umriss zwei Kreise, die den Torus in je zwei Punkten berühren, in einer Meridianebene hingegen zwei gleichseitige Hyperbeln, die den Torus in denselben Punkten berühren. In 3. folgt ein Vergleich mit den anderen zwei Fällen, in denen der Parallelriss des Torus in Kreise und Geraden zerfällt, und es wird auf den polaren Zusammenhang mit den Loxodromenkreisen des Torus und auf die Analogie mit dem Parallelwinkel der hyperbolischen Geometrie hingewiesen.*

### 1. Wahrer Umriss des Torus bei beliebiger Sehstrahlrichtung

Gegeben sei ein Torus  $\phi$  (Achse  $a$ , Mittelpunkt  $O$ , Radius  $R$  des Mittenkreises  $m$  in der Mittenebene  $\mu$ , Meridiankreisradius  $r$ , Knotenpunkte  $D_1, D_2$  auf  $a$  im Abstand  $\sqrt{r^2 - R^2}$  von  $O$ ). In kartesischen Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  (Ursprung  $O$ , Mittenebene  $x_3 = 0$ ) hat  $\phi$  die Parameterdarstellung (Ortsvektor  $\mathbf{x}(u, v)$ )

$$\mathbf{x} \{ x_1 = (R + r \cos u) \cos v, x_2 = (R + r \cos u) \sin v, x_3 = r \sin u \} \quad (1)$$

$u = \text{const.}$  ergibt einen Parallelkreis,  $v = \text{const.}$  einen Meridiankreis.

Die Sehstrahlen seien gegen die Mittenebene  $\mu$  unter dem Winkel  $\sigma$  geneigt; sie können o. B. d. A. parallel zur Ebene  $x_2 = 0$  angenommen werden, die Sehstrahlrichtung daher durch den Vektor  $\mathbf{s} = (1, 0, \operatorname{tg} \sigma)$ . Ein Punkt  $\mathbf{x}$  von  $\phi$  gehört zum wahren Umriss  $k$  von  $\phi$ , wenn die Vektoren  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{s}$  komplanar sind. Daraus folgt (nach Abspaltung des Faktors  $R + r \cos u$ , dessen Nullsetzen im komplexen Gebiet nicht nur  $D_1$  und  $D_2$  ergibt, sondern auch die auf  $\phi$  liegenden vier Geraden, die von  $D_1, D_2$  zu den absoluten Kreispunkten von  $\mu$  laufen)

$$\cos v = - \operatorname{tg} \sigma \cdot \operatorname{tg} u . \quad (2)$$

(2) stellt  $k$  in den inneren Koordinaten  $u, v$  von  $\phi$  dar. Drückt man  $v$  in (1) nach (2) durch  $u$  aus, so erhält man eine Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(u)$  von  $k$ . Bekanntlich

ist  $k$  eine Raumkurve 8. Ordnung. Ihr Parallelriss auf eine Bildebene  $\pi$ , der scheinbare Umriss  $k^s$  von  $\phi$ , ist eine ebene Kurve 8. Ordnung. Ist  $\pi$  normal zur Sehstrahlrichtung, so ist  $k^s$  ein Normalriss von  $\phi$ , eine Toroide (Parallelkurve zur Bildellipse des Mittenkreises im Abstand  $r$ ).

## 2. Projektion des Torus in isotroper Richtung

**1. Erster Weg.** Der Fernpunkt der Sehstrahlen sei nun ein Punkt des absoluten Kegelschnitts, etwa ein absoluter Kreispunkt  $J$  der Ebene  $x_2 = 0$ . Wir wählen  $\operatorname{tg}\sigma = + i$ . Aus (2) folgt dann

$$\cos u \cdot \sin v = \pm 1 \quad (3)$$

als Gleichung von  $k$  in  $u, v$ . Entsprechend den beiden Vorzeichen in (3) besteht  $k$  hier aus zwei Kurven  $k_1, k_2$ . Nach (3) kann man  $\sin v = \pm 1/\cos u$ ,  $\cos v = -i \operatorname{tg} u$  in (1) einsetzen; dann sind  $x_1, x_2, x_3$  rationale Funktionen von  $\operatorname{tg} u/2$ . Daher sind  $k_1$  und  $k_2$  rationale Raumkurven. Sie sind von 4. Ordnung, denn sie entstehen durch Zerfall der Raumkurve 8. Ordnung des allgemeinen Falles.  $k_1$  und  $k_2$  sind Raumkurven 4. Ordnung II. Art; der Sehstrahlzylinder aus  $J$ , der durch  $k_1$  geht, ist die einzige Quadrik, auf der  $k_1$  liegt; analog bei  $k_2$ .

Elimination von  $u$  aus  $x_1 = x_1(u), x_2 = x_2(u)$  ergibt als Normalriss (Grundriss) von  $k_1, k_2$  auf die Mittenebene  $\mu$  die Kurven  $k'_1, k'_2$

$$(x_1^2 + x_2^2)(x_2 \mp r)^2 - R^2 x_2^2 = 0. \quad (4)$$

$k'_1$  und  $k'_2$  sind Konchoiden des Nikomedes (auf jeder Geraden durch  $O$  wird vom Schnittpunkt mit  $x_2 = \pm r$  die Strecke  $R$  nach beiden Seiten aufgetragen).  $k'_1, k'_2$  vertauschen sich durch Spiegelung an  $x_2 = 0$  und haben in  $O$  dieselben Doppelpunkts tangenten.

Der scheinbare Umriss von  $\phi$  auf die Mittenebene  $\mu$  erhalte den Index  $s$ , der scheinbare Umriss auf die Meridianebebene  $x_1 = 0$  den Index  $\sigma$ . Der isotrope Sehstrahl durch einen Punkt  $\mathbf{x}(u)$  von  $k$  schneidet  $\mu$  im Punkt  $\mathbf{x}^s(x_1(u) + i x_3(u), x_2(u), 0)$ , und  $x_1 = 0$  im Punkt  $\mathbf{x}^\sigma(0, x_2(u), x_3(u) - i x_1(u))$ . Elimination von  $u$  aus  $\mathbf{x}^s$  bzw.  $\mathbf{x}^\sigma$  zeigt: Der Parallelriss von  $\phi$  auf die Mittenebene  $\mu$  besteht aus den Kreisen  $k_1^s, k_2^s$

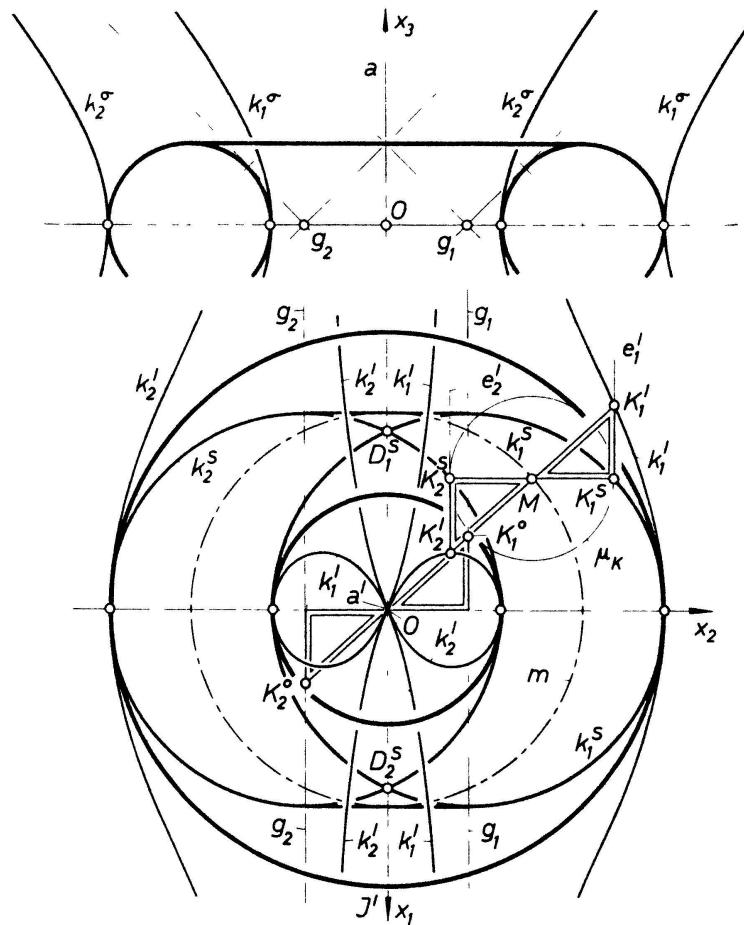
$$x_1^2 + (x_2 \mp r)^2 = R^2, \quad x_3 = 0. \quad (5)$$

Der Parallelriss von  $\phi$  auf die Meridianebebene  $x_1 = 0$  besteht aus den gleichseitigen Hyperbeln  $k_1^\sigma, k_2^\sigma$

$$x_1 = 0, \quad (x_2 \mp r)^2 - x_3^2 = R^2. \quad (6)$$

$k_1^\sigma$  und  $k_2^\sigma$  gehen durch die Knotenpunkte  $D_1, D_2$ , während  $k_1^s$  und  $k_2^s$  durch die Punkte  $(\pm \sqrt{R^2 - r^2}, 0, 0)$  gehen, die sich durch Projektion von  $D_1, D_2$  aus  $J$  auf  $\mu$  ergeben.  $k_1^s, k_2^s, k_1^\sigma, k_2^\sigma$  berühren  $\phi$  in je zwei Punkten auf der  $x_2$ -Achse (Abb. Ringtorus).

**2. Zweiter Weg.** Diese Ergebnisse findet man auch ohne Rechnung. Eine Kugel  $\kappa$  (Mittelpunkt  $M$  auf dem Mittenkreis  $m$  von  $\phi$ , Radius  $r$ ) berührt  $\phi$  längs eines Meri-



diankreises  $m_\kappa$  und schneidet  $\mu$  in einem Kreis  $\mu_\kappa$  (Abb.). Das Projektionszentrum  $J$  hat als Grundriss auf  $\mu$  den Fernpunkt  $J'$  der  $x_1$ -Achse. Durch  $J$  gehen zwei (isotrope) Erzeugenden  $e_1, e_2$  von  $\kappa$ ; deren Grundrisse  $e'_1, e'_2$  sind die Tangenten aus  $J'$  an  $\mu_\kappa$ . Die Meridianebene  $[a M]$  schneidet  $e_1, e_2$  in den Punkten  $K_1, K_2$ ; deren Grundrisse  $K'_1, K'_2$  sind die reellen Schnittpunkte von  $[a' M]$  mit  $e'_1, e'_2$ . Die Geraden  $JK_1$  und  $JK_2$  liegen auf  $\kappa$  und sie berühren  $\phi$  in  $K_1$  bzw.  $K_2$ . Daher sind  $K_1, K_2$  Punkte des wahren Umrisses  $k$  von  $\phi$ . Die Tangentialebene von  $\kappa$  in  $J$  schneidet  $\mu$  in der zu  $e'_1$  und  $e'_2$  normalen Geraden durch  $M$ ; deren Schnittpunkte mit  $e'_1, e'_2$  sind Punkte  $K_1^s, K_2^s$  des scheinbaren Umrisses  $k^s$  in  $\mu$ . Nun seien  $g_1, g_2$  die Parallelen zur  $x_1$ -Achse im Abstand  $r$ . Die in der Abb. mit Doppelstrichen gezeichneten Dreiecke sind kongruent. Aus  $OM = K_1^0 K_1' = K_2^0 K_2' = R$  folgt, dass der Grundriss  $k'$  von  $k$  aus zwei Nikomedischen Konchoiden  $k'_1, k'_2$  von  $O$  bezüglich  $g_1$  bzw.  $g_2$  mit dem Abstand  $R$  besteht.  $K_1^s, K_2^s$  gehen aus  $M$  durch Verschiebung in  $x_2$ -Richtung um  $\pm r$  hervor, daher besteht der scheinbare Umriss  $k^s$  in  $\mu$  aus den Kreisen  $k_1^s, k_2^s$ , die aus  $m$  durch dieselben Verschiebungen hervorgehen.

Durch die Sehstrahlen wird zwischen  $\mu$  und der Meridianebene  $x_1 = 0$  eine perspektive Affinität hergestellt; die Abstände entsprechender Punkte von der Affinitätsachse  $x_1 = x_3 = 0$  haben das Verhältnis  $i$ . Dabei gehen  $k_1^s, k_2^s$  in den scheinbaren Umriss von  $\phi$  in  $x_1 = 0$  über, nämlich in die gleichseitigen Hyperbeln  $k_1^\sigma, k_2^\sigma$ .

**3. Dritter Weg.** Der Tangentialkegel  $\zeta$  aus einem Punkt  $Z$  an einen Torus  $\phi$  ist, wie bekannt, ein Kegel 8. Ordnung. Er berührt  $\phi$  längs des wahren Umrisses  $k$ , einer

Raumkurve 8. Ordnung, und er schneidet eine Bildebene  $\pi$  im scheinbaren Umriss  $k^c$  von  $\phi$  für das Auge  $Z$ , einer Kurve 8. Ordnung und 4. Klasse. Ist das Projektionszentrum ein Punkt  $J$  des absoluten Kegelschnittes, so hat  $k$ , da der absolute Kegelschnitt Doppelkurve von  $\phi$  ist, in  $J$  einen vierfachen Punkt; dessen Tangenten sind die Haupttangenten beider Mäntel von  $\phi$  in  $J$ . Daher wird  $k$  aus dem vierfachen Punkt  $J$  durch einen Zylinder von 4. statt 8. Ordnung projiziert, und  $k^c$  ist von 4. Ordnung. Nun hat  $k^c$  vier Doppelpunkte, nämlich die Bilder der Knotenpunkte von  $\phi$  und die Bilder der absoluten Kreispunkte der Mittenebene  $\mu$ ; daher zerfällt  $k^c$ . So ergeben sich wiederum  $k_1^s, k_2^s$  in  $\mu$  bzw.  $k_1^\sigma, k_2^\sigma$  in  $x_1 = 0$ . Der Zylinder  $\zeta_1$  aus  $J$  durch  $k_1^s$  bzw.  $k_1^\sigma$  ist von 2. Ordnung, seine Schnittkurve mit  $\phi$  muss wegen der Berührung von  $\zeta_1$  mit  $\phi$  eine doppeltzählende Raumkurve 4. Ordnung  $k_1$  sein; analog bei  $k_2$ . Daher sind  $k'_1, k'_2$  ebene Kurven 4. Ordnung.

### 3. Bemerkungen

**1.** Der scheinbare Umriss von  $\phi$  ist eine Kurve 8. Ordnung und 4. Klasse. Als Kurve 4. Klasse zerfällt er beim Normalriss auf eine Meridianebebene in die zwei Meridiankreise in dieser Ebene, beim Normalriss auf die Mittenebene  $\mu$  in die zwei Parallelkreise in  $\mu$ , beim Parallelriss aus  $J$  auf  $\mu$  in die Kreise  $k_1^s, k_2^s$ . Als Kurve 8. Ordnung zerfällt er dabei in je zwei Kreise, aber es sind noch je zwei doppeltzählende Geraden hinzuzuzählen: beim Normalriss auf eine Meridianebebene die Bilder der Flachkreisebenen, beim Normalriss auf  $\mu$  die isotropen Geraden aus  $O$  in  $\mu$  (sie sind die Bilder der Minimalebenen durch  $a$ , die  $\phi$  längs je zweier Geraden berühren, nämlich längs der waagrechten isotropen Geraden durch die Knotenpunkte). *Beim Parallelriss aus  $J$  sind die Bilder der Tangentialebenen von  $\phi$  in  $J$  hinzuzuzählen;* die Tangentialebenen von  $\phi$  in den Punkten des absoluten Kegelschnitts umhüllen die Minimalkegel mit den Spitzen  $(0, 0, \pm R)$  auf  $a$ , sie schneiden  $\mu$  in den Tangenten des Mittenkreises; zwei dieser Tangenten berühren auch  $k_1^s$  und  $k_2^s$ . Sie ergänzen (je doppeltzählend)  $k_1^s, k_2^s$  zu einer zerfallenden Kurve 8. Ordnung. Analog bei  $k_1^\sigma, k_2^\sigma$ .

**2.** Bei anderer Gelegenheit soll gezeigt werden, dass bei einem Spindel- oder Ringtorus die Tangentialkegel aus den Punkten des absoluten Kegelschnittes durch räumliche Polaritäten in die Loxodromenkreise übergeführt werden können, und zwar auf vierfache Art.

**3.** In (3) kann man  $u = il/2c$  setzen. Dann geht (3) in die bekannte Formel für den Parallelwinkel der hyperbolischen Geometrie über ( $c$  = Masskonstante,  $l$  = hyperbolischer Abstand eines Punktes  $P$  von einer Geraden  $g$ ,  $v$  = Winkel, den eine Parallele durch  $P$  zu  $g$  mit der Normalen aus  $P$  auf  $g$  einschließt). Darauf soll bei anderer Gelegenheit eingegangen werden.

Fritz Hohenberg, Graz