

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 26 (1971)  
**Heft:** 4  
  
**Rubrik:** Bericht

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Bericht

### Mathematischer Problemwettbewerb 1969-70 im Kanton Bern

Die Mathematikwettbewerbe für Schüler der höheren Mittelschulen sind im Kanton Bern bereits zur Tradition geworden! Über die Wettbewerbe 1 bis 3 wurde an dieser Stelle (El. Math. 23, 18–20 (1968) und El. Math. 25, 39–43 (1970)) bereits berichtet. Seither hat die «Informationsstelle für Mathematikunterricht des Kantons Bern» einen weiteren Wettbewerb im Lösen mathematischer Probleme durchgeführt.

Wettbewerb 4 (1969/70) war als Ausscheidungskampf ausgeschrieben. Alle Teilnehmer hatten zu Hause 3 Aufgabenserien zu 3 oder 4 Aufgaben zu bearbeiten, die je mit 10 Punkten bewertet wurden. Die 16 bestklassierten Schüler bestritten den Viertelfinal durch Lösen von 3 Aufgaben zu 10 Punkten. Ebensoviele Probleme warteten den 8 Besten in der Halbfinalrunde. Durch Juryentscheid wurden schliesslich 6 Schüler zum Final zugelassen. In einem ersten Teil waren noch einmal zu Hause zwei Aufgaben zu lösen; der zweite Teil fand unter Aufsicht statt, wobei der einzelne Finalist verschieden gewichtete Aufgaben auswählen konnte, mit dem Ziel, möglichst viele Punkte zu erzielen.

Die Preisträger waren fast ausschliesslich Schüler, die sich bereits in früheren Wettbewerben die nötige Wettkampferfahrung geholt hatten.

Im folgenden seien die Aufgaben in gestraffter Form, d.h. ohne die für Schüler nötigen Erklärungen und Hinweise, dargestellt.

- 1.1. Gegeben sind vier Punkte  $A_1, A_2, A_3, A_4$  in der Ebene. Gesucht sind vier weitere Punkte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  derart, dass  $A_1, A_2, A_3, A_4$  in dieser Reihenfolge die Schwerpunkte der Dreiecke  $P_2P_3P_4, P_3P_4P_1, P_4P_1P_2, P_1P_2P_3$  sind; es ist eine Konstruktion der Punkte  $P_i$  anzugeben.
- 1.2. Eine zweistellige Zahl  $ab$  habe die Eigenschaft  $V$ , wenn ihr Quadrat auf  $..ab$  endet. Zeige, dass es in jedem Zahlssystem der Basis  $2p$  ( $p$  prim,  $p \geq 3$ ) genau zwei zweistellige Zahlen mit der Eigenschaft  $V$  gibt.
- 1.3. Zwei Quadrate der Ebene berühren sich, wenn sie mindestens einen Randpunkt, aber keine inneren Punkte gemeinsam haben. Um ein Einheitsquadrat  $E$  soll ein Kranz weiterer Einheitsquadrate derart gelegt werden, dass jedes Kranzquadrat  $E$  berührt und dass sich zwei Kranzquadrate höchstens berühren. Bestimme die grösstmögliche Anzahl von Kranzquadraten.
- 2.1. Suche alle Paare  $(n, m)$  ganzer Zahlen, welche die Gleichung  $|2^n - 3^m| = 1$  erfüllen.
- 2.2.  $M$  und  $A$  seien zwei gegebene Punkte der Ebene. Nur mit Verwendung des Zirkels soll dem durch  $A$  gehenden Kreis mit Zentrum  $M$  ein Quadrat eingeschrieben werden; dabei darf der Zirkel nur in gegebenen oder konstruierten Punkten eingestochen werden, und nur Abstände zwischen solchen Punkten sind als Zirkelöffnungen gestattet.

- 2.3. In einem ebenen endlichen Streckenkomplex gibt es längste Wege. Beweise: Wenn es in einem zusammenhängenden Komplex zwei längste Wege gibt, so haben sie mindestens eine Ecke gemeinsam.
- 3.1. Was lässt sich über vier Punkte  $A, B, P, Q$  des Raumes aussagen, wenn jede durch  $A, B$  gehende Ebene und jede durch  $A, B$  gehende Kugel jede der durch  $P, Q$  gehenden Ebenen und Kugeln schneidet?
- 3.2. Suche alle Paare  $(n, m)$  natürlicher Zahlen, deren Summe Teiler ihres Produktes ist.
- 3.3. Den Seiten eines Dreiecks der Ebene werden nach aussen gleichschenklige, zueinander ähnliche Dreiecke mit den Dreiecksseiten als Basen aufgesetzt. In welchen Fällen ist das aus den Schwerpunkten der Aufsatzdreiecke bestimmte Dreieck gleichseitig?
- 3.4.  $f$  sei eine Funktion über der Menge der natürlichen Zahlen mit ganzzahligen Funktionswerten; zudem soll für alle  $n$  die Beziehung  $0 \leq f(n) \leq n$  erfüllt sein. Das cartesische Schaubild von  $f$  ist eine unendliche Punktmenge  $M$ . Muss  $M$  eine unendliche Teilmenge von Punkten enthalten, die alle auf einer Geraden liegen?
- V.1. Bestimme für jede natürliche Zahl  $m$  die letzten drei Stellen in der Dezimaldarstellung von  $m^{100}$ .
- V.2. Durch  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$  und  $x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2})$  für  $n \geq 4$  ist die Folge  $x_2, x_3, \dots$  rekursiv erklärt. Berechne  $x_n$  für beliebiges  $n \geq 2$ .
- V.3. In der Ebene liege ein Punkt  $P$  genau dann «im Zwischenbereich zweier Punkte  $A, B$ », wenn der Winkel  $APB$  nicht kleiner als  $120^\circ$  ist. Wie viele Punkte sind mindestens zu wählen, damit sicher einer im Zwischenbereich zweier anderer liegen muss?
- H.1. Zeige, dass jede der Zahlen  $z_k = n! + k$  ( $k = 2, 3, \dots, n$ ) einen Primfaktor enthält, der in keiner der Zahlen  $z_i$  ( $i \neq k$ ) enthalten ist.
- H.2.  $A, B, C, D$  seien vier verschiedene Punkte der Ebene in beliebiger Lage. Ein Parallelenpaar  $(a, b)$  durch  $A, B$  bestimmt mit einem zu ihm orthogonalen Parallelenpaar  $(c, d)$  durch  $C, D$  im allgemeinen ein Rechteck. Kann es vorkommen, dass dieses Rechteck ein Quadrat ist?
- H.3. Ein konvexes  $n$ -Eck  $K$  habe die Eigenschaft, dass sich in seinem Innern keine drei seiner Diagonalen in einem Punkt schneiden. Es lassen sich Dreiecke  $D$  mit der Eigenschaft finden, dass jede Seite von  $D$  entweder auf einer Seite oder auf einer Diagonalen von  $K$  liegt. Wie viele verschiedene derartige Dreiecke  $D$  gibt es?
- F.1.  $M$  sei eine ebene Punktmenge mit zwei Symmetriezentren. Kann  $M$  beschränkt sein? Ist die Menge aller Symmetriezentren von  $M$  beschränkt?
- F.2. Bestimme zu jeder natürlichen Zahl  $n$  die Anzahl der Zahlen  $x$  mit  $1 \leq x < n$  und  $x^2 \equiv x \pmod{n}$ .
- K.1. Beweise, dass für jede positive reelle Zahl  $a$  stets  $2a + 1/a^2 \geq 3$  erfüllt ist. Bleibt die Ungleichung auch für gewisse negative  $a$  noch gültig? (6 Punkte)

- K.2. Suche alle Tripel  $(x, y, k)$  natürlicher Zahlen, welche der Gleichung  $x^2 + y^2 = 2^k$  genügen. (8 Punkte)
- K.3.  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sei irgend eine Anordnung der natürlichen Zahlen  $1, 2, \dots, n$ . Zeige, dass  $p = (a_1 - 1)(a_2 - 2) \dots (a_n - n)$  gerade werden muss, wenn  $n$  ungerade ist. (2 Punkte)
- K.4. Die  $k$ -te Ziffer einer zehnstelligen Dezimalzahl  $z$  gibt an, wie oft die Ziffer  $k - 1$  in  $z$  vorkommt.  $z = ?$  (4 Punkte)
- K.5. Kann 276 eine Quadratzahl in einem Zahlensystem sein? (6 Punkte)
- K.6. Kryptogramm:  $abcde \cdot 4 = edcba$ . (4 Punkte)
- K.7. Ein konvexer  $n$ -Ecks-Bereich ist genau dann ein Dreieck, wenn  $tP \cap P$  zu  $P$  ähnlich ist für alle Translationen  $t$ , für welche  $P$  und  $tP$  innere Punkte gemeinsam haben. (8 Punkte)
- K.8. Die Winkelhalbierenden zweier Aussenwinkel eines Dreiecks begrenzen einen Winkel, der halb so gross ist wie der dritte Aussenwinkel des Dreiecks. (2 Punkte)
- J. Binz und P. Wilker, Bern

## Literaturüberschau

*Einführung in das Programmieren*. II. Programmieren in einer Assemblersprache. Von GEORG BAYER. 134 Seiten. DM 12.-. Walter de Gruyter & Co., Berlin 1970.

Der erste Band über das Programmieren in ALGOL wurde in Nr. 4, 1970, dieser Zeitschrift besprochen. Vertrautheit mit dem ersten Band oder entsprechende ALGOL-Kenntnisse werden im zweiten Band vorausgesetzt.

Ein Buch über das Programmieren in einer Assemblersprache muss sich entweder auf einen speziellen bestehenden Computer ausrichten oder dann einen idealen Rechenautomaten selbst einführen. Der Verfasser hat den zweiten Weg gewählt, indem er im Wesentlichen den Universalrechner (URA) voraussetzt, wie ihn JOHN V. NEUMANN beschrieben hat. Damit der Leser nicht allzuvielen zugehörige Assemblerbegriffe lernen muss, die nur für URA brauchbar sind, ist eine übersichtliche Tabelle der Befehle für URA beigelegt. Ferner sind die Assemblerbefehle und -programme durch ALGOL-Anweisungen kommentiert. Die Beispiele sind für den Leser sehr lehrreich. Sie reichen bis zu Problemen, wie sie in Betriebssystemen moderner Grosscomputer auftreten. Das Buch setzt deshalb ein genügendes Mass an Praxis voraus. E. R. BRÄNDLI

*Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I*. Von G. PÓLYA und G. SZEGÖ. XVI und 338 Seiten. DM 12,80. Heidelberger Taschenbücher, Band 73. Vierte Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970.

Inhalt: Vorwort. Bezeichnungen und Abkürzungen. I. Unendliche Reihen und Folgen. II. Integralrechnung. III. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Namenverzeichnis. (Abschnitte I bis III sind gegliedert in einen Aufgaben- und einen Lösungsteil.)

Die ersten drei Auflagen dieses bekannten Werkes erschienen als Band 19 der Grundlehren der mathematischen Wissenschaften im gleichen Verlag. In methodisch wohldurchdachten Sequenzen von untereinander verwandten Aufgaben erhält der Leser Gelegenheit zu selbständiger Arbeit. Daneben ist das Buch eine reiche Fundgrube für Einzelresultate aus den eingangs erwähnten Gebieten. Mit der Aufnahme in eine preiswerte Taschenbuchreihe dürfte es noch wesentlich weitere Verbreitung finden, was sicher sehr zu begrüssen ist. J. RÄTZ

*Studies in Number Theory*. Herausgegeben von W. J. LEVEQUE. Studies in Mathematics, Vol. 6. 212 Seiten. \$ 10.-. Prentice Hall, 1969.

Die 5 hier zusammengestellten Aufsätze können ohne grössere Kenntnisse der Zahlentheorie gelesen werden.