

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 26 (1971)  
**Heft:** 4  
  
**Rubrik:** Aufgaben

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Werden andererseits die Kanten  $z_1$  (1) von  $T_1$  mit  $z_1$  von  $T_2$ , und  $z_2$  (1/2) von  $T_2$  mit  $z_2$  von  $T_3$  usw. miteinander verbunden, so entsteht eine ebenfalls geschlossene Kette  $K_2$ . Bringen wir die gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke der  $T_1$  bis  $T_{24}$  zur Deckung, so teilt die Ebene durch die Kanten  $z_2$  und die Halbierungspunkte  $h$  der Kanten  $z_1$  die Kette  $K_2$  in zwei kongruente geschlossene Teiltetraederketten  $K_3$  und  $K_4$ . Beide Ketten lassen sich zu einer einzigen 48-gliedrigen geschlossenen Kette  $K_5$  verknüpfen. Bringen wir nun die gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke irgend zweier kongruenter 24-gliedriger Ketten  $K_2$  zur Deckung, so lässt sich eine geschlossene Kette  $K_6$  bilden, die zerlegungsgleich mit einem Rhombendodekaeder ist.

Stehen zur räumlich-kinematischen Manipulation im Kantenverbund gelenkige, geschlossene Teilstreckenketten in Modellen zur Verfügung, so lassen sich, während Anfangspolyeder in Endpolyeder übergeführt werden, endliche «Zwischenpolyederzustände» verfolgen und wahrscheinliche oder unerwartete, oft ästhetisch besonders interessante Bewegungen beobachten und Konfigurationen feststellen, die selbstverständlich alle mit dem Anfangspolyeder zerlegungsgleich sind. Einen Ausschnitt aus der Vielfalt der Konfigurationen der Kette  $K_1$  zeigen die Fotoreproduktionen der Doppelseite.

Konzept und Imagination des Manipulierenden sind es überlassen, die Ketten beliebig zu transformieren. Die Polyederketten könnten nicht nur zum Studium der Zerlegungsgleichheit Hilfsmodelle darstellen, sondern auch Einblicke interpretativer Art in den nahezu unbegrenzten Reichtum der Natur- oder Kunstformen gewähren. Besonders erwähnenswert sei dazu, dass die interessantesten Teilstreckenlagerungen als Ketten in Zerlegungspolyedern doppel-spiralartigen Anordnungen unterliegen.

Peer Clahsen, Zürich

## Aufgaben

**Aufgabe 626.** Es seien  $ABC$  ein Dreieck mit den Seitenlängen  $a \geq b \geq c$  (die Seite der Länge  $a$  liege dem Eckpunkt  $A$  gegenüber usw.) und  $A', B', C'$  bzw.  $A'', B'', C''$  die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden durch  $A, B, C$  mit den Gegenseiten bzw. mit der Umkreislinie von  $ABC$ . Man beweise: 1)  $A'A'' \geq B'B'' \geq C'C''$ ; Gleichheit genau dann, wenn die entsprechenden Seitenlängen gleich sind. 2)  $BB'' \leq AA''$ ,  $BB'' \leq CC''$ ; Gleichheit genau dann, wenn die entsprechenden Seitenlängen gleich sind. 3) Beide Beziehungen  $AA'' < CC''$ ,  $CC'' < AA''$  kommen vor.

P. Erdös, Budapest

*Lösung:* Es bezeichnen  $\alpha, \beta, \gamma$  die Massen der Innenwinkel des Dreiecks  $ABC$  bei  $A, B, C$  und  $R$  den Umkreisradius von  $ABC$ .

1. Durch Betrachtung der Dreiecke  $ACC''$  und  $AC'C''$  ergeben sich die Beziehungen

$$AC'' = 2R \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \quad \text{und} \quad C'C'' = AC'' \cdot \frac{\sin \gamma/2}{\sin (\alpha + \gamma/2)} ,$$

also unter Berücksichtigung von  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  weiter

$$C'C'' = 2R \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\sin \gamma/2}{\sin(\beta + \gamma/2)}.$$

Wählt man den Punkt  $D$  auf der Geraden durch  $A$  und  $C$  so, dass  $C$  zwischen  $A$  und  $D$  liegt und  $CD = a$  gilt, so liest man aus Dreieck  $ABD$  ab:

$$\frac{\sin \gamma/2}{\sin(\beta + \gamma/2)} = \frac{c}{a+b}.$$

Also hat man insgesamt

$$C'C'' = 2R \cdot \frac{c}{a+b} \cdot \sin \frac{\gamma}{2},$$

und durch zyklische Vertauschung findet man analoge Ausdrücke für  $A'A''$  und  $B'B''$ , somit

$$\frac{A'A''}{B'B''} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+c}{b+c} \cdot \frac{\sin \alpha/2}{\sin \beta/2}, \quad \frac{B'B''}{C'C''} = \frac{b}{c} \cdot \frac{a+b}{a+c} \cdot \frac{\sin \beta/2}{\sin \gamma/2}.$$

Weil nun jeder der rechts auftretenden Brüche  $\geq 1$  ist, so folgt die erste Behauptung samt der Bemerkung über die Gleichheit.

2. Unter erneutem Rückgriff auf Dreieck  $ACC''$  ergibt sich

$$CC'' = 2R \cdot \sin \left( \alpha + \frac{\gamma}{2} \right) = 2R \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ und entsprechend}$$

$$BB'' = 2R \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}, \quad AA'' = 2R \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Da  $\alpha - \gamma \geq \beta - \gamma$  und  $\alpha - \gamma \geq \alpha - \beta$ , so folgt  $BB'' \leq AA''$  und  $BB'' \leq CC''$ ; Gleichheit genau für  $a = b$  bzw.  $b = c$ .

3. Es gilt die folgende Schlusskette:

$$\beta \geq \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3\beta \geq \alpha + \beta + \gamma \Leftrightarrow \beta - \gamma \geq \alpha - \beta \Leftrightarrow AA'' \leq CC''.$$

K. Schuler, Rottweil, BRD

Weitere Lösungen sandten J. Brejcha (Brno, ČSSR), J. Fehér (Pécs, Ungarn), H. Frischknecht (Berneck), L. Kieffer (Luxembourg), M. Milivoj (Zagreb), I. Paasche (München), O. Reutter (Ochsenhausen, BRD).

**Aufgabe 627.** Für natürliche Zahlen  $n$  seien  $S(n, 0) = n!$  und

$$S(n, k) = \frac{1}{k} \sum_{s=0}^{k-1} \left[ (-1)^{k-s+1} S(n, s) \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^{k-s}} \right] (k > 0).$$

Man beweise:

$$1) \quad S(n, k) = \sum_{1 < r_1 < \dots < r_k < n} \frac{n!}{r_1 \cdot \dots \cdot r_k} (1 \leq k \leq n), \quad \text{und als Anwendung davon}$$

2)  $S(p-1, k) \equiv 0 \pmod{p}$  ( $1 \leq k < p-1$ ,  $p$  ungerade Primzahl) (Satz von Lagrange; vgl. G. H. Hardy-E. M. Wright, Einführung in die Zahlentheorie, München 1958, pp. 96–98) sowie 3) den Satz von Wilson. J. Fehér, Pécs, Ungarn

*Solution:*

1) Put

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} S(n, k) x^k \quad (n \geq 1).$$

Then

$$\begin{aligned} F'_n(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot S(n, k) x^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^{k-s+1} S(n, s) \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^{k-s}} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} S(n, s) x^s \sum_{r=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^j}{r^{j+1}} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} S(n, s) x^s \sum_{r=1}^n \frac{1}{x+r} \end{aligned}$$

so that

$$\frac{F'_n(x)}{F_n(x)} = \sum_{r=1}^n \frac{1}{x+r}.$$

It follows that

$$(*) \quad F_n(x) = \prod_{r=1}^n (x+r).$$

On the other hand, if

$$\bar{S}(n, k) = \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_k \leq n} \frac{n!}{r_1 r_2 \dots r_k} \quad (k \geq 1),$$

then

$$\begin{aligned} \bar{S}(n, k) &= n \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_k \leq n-1} \frac{(n-1)!}{r_1 r_2 \dots r_k} + \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_{k-1} \leq n-1} \frac{(n-1)!}{r_1 r_2 \dots r_{k-1}} \\ &= n \bar{S}(n-1, k) + \bar{S}(n-1, k-1). \end{aligned}$$

Comparison with (\*) gives

$$\bar{S}(n, k) = S(n, k) \quad (1 \leq k \leq n).$$

2) Since

$$S(n, 1) = S(n, 0) \sum_{r=1}^n \frac{1}{r},$$

$$2 S(p-1, 1) = (p-1)! \sum_{r=1}^{p-1} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{p-r} \right) \equiv 0 \pmod{p},$$

it follows from

$$S(p-1, k) = \frac{1}{k} \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^{k-s+1} S(p-1, s) \sum_{r=1}^{p-1} \frac{1}{r^{k-s}}$$

by induction on  $k$  that

$$S(p-1, k) \equiv 0 \pmod{p} \quad (1 \leq k < p-1).$$

(We have used

$$\sum_{r=1}^{p-1} r^k \equiv 0 \pmod{p} \quad (1 \leq k < p-1).$$

3) For  $k = p-1$  we have

$$\begin{aligned} S(p-1, p-1) &= \frac{1}{p-1} \sum_{s=0}^{p-2} (-1)^{p-s} S(p-1, s) \sum_{r=1}^{p-1} \frac{1}{r^{p-s-1}} \\ &\equiv (p-1)! \sum_{r=1}^{p-1} 1 \equiv -(p-1)! \pmod{p}. \end{aligned}$$

Since, by (\*),  $S(p-1, p-1) = 1$ , we have

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

L. Carlitz, Durham, N.C., USA

**Aufgabe 628.** Es seien  $n$  und  $r$  natürliche Zahlen. Man zeige, dass die Zahl  $(2r)! \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+r}$  durch  $n(n+r)!$  teilbar ist.

D. Svrtnan, Zagreb

*Lösung (mit Verschärfung):* Führt man die Bezeichnungen

$$A(n, r) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+r}, \quad B(n, r) = (2r)! A(n, r) \quad (n \geq 1, r \geq 0)$$

ein, so ist

$$\begin{aligned} A(n, r) &= n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \binom{n-1}{k} (k+1)^{n-1+r} = \\ &= n \sum_{s=0}^{n-2} \left\{ \binom{n-1+r}{s} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \binom{n-1}{k} k^s \right\} + n \sum_{s=0}^r \binom{n-1+r}{n-1+s} A(n-1, s). \end{aligned}$$

Da die erste Summe gliedweise verschwindet (vgl. die Lösung der Aufgabe 438, El. Math. 18, 115 (1963)), haben wir den Zusammenhang

$$B(n, r) = n \sum_{s=0}^r \binom{n-1+r}{n-1+s} \frac{(2r)!}{(2s)!} B(n-1, s) \quad (n \geq 2, r \geq 0) \quad (1)$$

erreicht.

Unter Verwendung von  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$  gewinnt man in ähnlicher Weise die Beziehung

$$B(n, r) = \sum_{s=0}^r \binom{n+r}{n-1+s} \cdot \frac{(2r)!}{(2s)!} \cdot B(n-1, s) \quad (n \geq 2, r \geq 0). \quad (2)$$

Für beliebige natürliche Zahlen  $r$  gilt  $r(1+r)! \mid B(1, r)$ . Wir treffen die Induktionsannahme  $r \geq 1, n \geq 2 \Rightarrow r(n-1+r)! \mid B(n-1, r)$ . Aus (1) folgt

$$\begin{aligned} B(n, r) &= n(n+r-1)! \left\{ 2r \frac{(2r-1)!}{r!} \cdot \frac{B(n-1, 0)}{(n-1)!} + \sum_{s=1}^{r-1} r \frac{(2r-1)!}{(r-s)!(2s-1)!} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{B(n-1, s)}{s(n+s-1)!} + \frac{B(n-1, r)}{(n+r-1)!} \right\}. \end{aligned}$$

Wegen  $B(n-1, 0) = (n-1)!$  ist der erste Term der geschweiften Klammer eine durch  $r$  teilbare natürliche Zahl. Wegen der Induktionsannahme und der Beziehung  $(r-s) + (2s-1) < 2r-1$  ist auch der zweite Term durch  $r$  teilbar (im Falle  $r=1$  ist er Null). Schliesslich sichert die Induktionsannahme, dass auch der dritte Term durch  $r$  teilbar ist. Somit gilt  $rn(n+r-1)! \mid B(n, r)$  ( $n \geq 1, r \geq 1$ ). Wiederum anknüpfend an die Induktionsannahme ergibt sich in analoger Weise aus (2) die Beziehung  $r(n+r)! \mid B(n, r)$  ( $n \geq 1, r \geq 1$ ). Daraus folgt nun die folgende Verschärfung der ursprünglichen Behauptung:

$$\frac{nr(n+r)!}{(n, r)} \mid B(n, r) \quad (n \geq 1, r \geq 1).$$

J. Fehér, Pécs, Ungarn

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Freiburg i. Br.), L. Carlitz (Durham, N.C., USA), I. Paasche (München).

*Anmerkung der Redaktion:* P. Bundschuh beweist in seiner Lösung die folgende Tatsache: Sind die  $\Psi_{r-1}(x)$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) die etwa in N. Nielsen, Die Gammafunktion (New York: Chelsea 1965), p. 71 ff., betrachteten Stirlingschen Polynome, so gilt:  $(2r)! \Psi_{r-1}(x) \in \mathbf{Z}[x]$  ( $r = 1, 2, \dots$ ).

**Aufgabe 629.**  $M = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  sei eine beschränkte reelle Zahlenfolge mit verschiedenen Elementen, und es bedeute  $a = \inf_{\substack{x_i \in M}} x_i$ ,  $b = \sup_{\substack{x_i \in M}} x_i$ ,  $r_n$  die kleinste nicht-negative Zahl der Menge  $\{x_n - a, x_n - x_1, x_n - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$  und  $s_n$  die kleinste nicht-negative Zahl der Menge  $\{b - x_n, x_1 - x_n, x_2 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n\}$ .

Man beweise: Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} r_n s_n$  ist konvergent und ihre Summe ist höchstens gleich  $\frac{1}{2}(b-a)^2$ , und Gleichheit besteht dann und nur dann, wenn  $M$  in sich dicht ist.

O. Reutter, Ochsenhausen

*Berichtigung:* Es muss am Schluss richtigerweise heißen: Gleichheit besteht dann und nur dann, wenn  $M$  im Intervall  $[a, b]$  dicht ist.

*Lösung des Aufgabenstellers:*

Die Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seien monoton wachsend umgeordnet, und die Elemente dieser Umordnung seien mit  $y_1, y_2, \dots, y_n$  bezeichnet ( $y_i < y_{i+1}$ ). Dann ist  $x_n = y_k$  für ein eindeutig bestimmtes  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Setzt man noch  $y_0 = a$  und  $y_{n+1} = b$ , so ist offensichtlich  $r_n = y_k - y_{k-1}$  und  $s_n = y_{k+1} - y_k$ .

Es bedeute nun  $Q_n = \sum_{i=0}^n (y_{i+1} - y_i)^2$  für  $n \geq 1$  und  $Q_0 = (b-a)^2$ . Dann folgt aus der Definition der Zahlen  $r_n$  und  $s_n$ :

$$\begin{aligned} Q_{n-1} - Q_n &= (y_{k+1} - y_{k-1})^2 - (y_k - y_{k-1})^2 - (y_{k+1} - y_k)^2 = (r_n + s_n)^2 - r_n^2 - s_n^2 \\ &= 2r_n s_n. \end{aligned}$$

Demnach gilt für alle  $N \geq 1$  die Identität

$$2 \sum_{n=1}^N r_n s_n = \sum_{n=1}^N (Q_{n-1} - Q_n) = Q_0 - Q_N = (b-a)^2 - Q_N. \quad (1)$$

Hieraus ist zu erkennen, dass die Folge  $\sum_{n=1}^N r_n s_n$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) wegen  $Q_N > 0$  nach oben beschränkt ist, und da diese Folge trivialerweise monoton wächst, existiert also  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N r_n s_n$  und es gilt nach (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} r_n s_n \leq (1/2) (b-a)^2$ , wobei Gleichheit genau dann besteht, wenn  $\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N = 0$  ist. Dies trifft, wie im folgenden gezeigt wird, genau dann zu, wenn  $M$  im Intervall  $[a, b]$  dicht ist:

Wäre nämlich  $M$  nicht dicht in  $[a, b]$ , dann gäbe es ein Teilintervall der Länge  $c > 0$  von  $[a, b]$ , welches kein  $x_i$  enthält. Damit wäre  $Q_N \geq c^2$  für alle  $N$ , also sicherlich  $\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N > 0$ . Wenn andererseits  $M$  in  $[a, b]$  dicht ist und  $m_N := \max_{i=0, \dots, N} (y_{i+1} - y_i)$  gesetzt wird, dann ist notwendig  $\lim_{N \rightarrow \infty} m_N = 0$ , also wegen  $Q_N \leq m_N \cdot \sum_{i=0}^N (y_{i+1} - y_i) = m_N (b-a)$  auch  $\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N = 0$ .

Eine weitere Lösung sandte J. Fehér (Pécs, Ungarn).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. März 1972**, wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, p. 67), Problem 625 B (Band 25, p. 68), Problem 629 A (Band 25, p. 92) und Problem 645 A (Band 26, p. 46).

**Aufgabe 650.** Man bestimme jene einer Ellipse eingeschriebenen Sechsecke, die durchwegs rechte Winkel aufweisen. W. Wunderlich, Wien

**Aufgabe 651.** Für positive reelle Zahlen  $x, y, z$  beweise man die Ungleichung  
 $9xyz \leq (x^2 + y^2 + z^2) [xyz(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1})^2 - 2(x + y + z)]$ .

Gleichheit genau im Falle  $x = y = z$ . I. Paasche, München

**Aufgabe 652.** If  $n$  is a nonnegative integer and  $k$  a positive integer, define  $p_k(n)$  by

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_k(n)x^n = \prod_{r=1}^{\infty} (1 - x^r)^k.$$

Prove the following:

a) If  $12n + 1$  is not the sum of two squares of integers (i.e. a fortiori not a square itself), then  $p_2(n) = 0$ .

b) If  $4n + 1$  is not the sum of two squares of integers (i.e. a fortiori not a square itself), then  $p_6(n) = 0$ . J. Arkin, Nanuet, N.Y., USA

**Aufgabe 653.** Es sei  $f$  eine auf dem halbabgeschlossenen Intervall  $[0, 1]$  definierte reellwertige Funktion mit folgenden Eigenschaften: (1)  $f$  ist auf  $[0, 1]$  stetig; (2)  $f$  ist auf dem offenen Intervall  $(0, 1)$  differenzierbar; (3) die Ableitung  $f'$  von  $f$  ist auf  $(0, 1)$  beschränkt. Muss  $f$  an der Stelle 0 eine rechtsseitige Ableitung haben?

Th. Rychener, Bern