

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 26 (1971)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Vektorielle Integralgeometrie  
**Autor:** Hadwiger, H. / Schneider, R.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-28065>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 26

Heft 3

Seiten 49-72

10. Mai 1971

## Vektorielle Integralgeometrie

Die vorliegende Note gibt eine Skizze einer «vektoriellen» Integralgeometrie über dem «Konvexring», einer Klasse von Körpern, die sich als Vereinigungsmenge endlich vieler Eikörper des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes gewinnen lassen. Dieses Konzept wurde mit inhaltlich im wesentlichen übereinstimmenden Begriffen und Aussagen von den beiden Verfassern etwa gleichzeitig und unabhängig aufgestellt. Es handelt sich um Sätze und Integralformeln mit vektorwertigen Funktionen. Diese gehören einem  $(n + 1)$ -dimensionalen linearen Raum an, der eine Basis von  $n + 1$  «Quermassvektoren» besitzt, die ihrerseits mit Krümmungsschwerpunkten, die den Körpern zugewiesen werden können, in engem Zusammenhang stehen. – Eine ausführlich gehaltene Abhandlung des zweitgenannten Autors [1] mit allgemeineren Ansätzen umschließt die vorliegende speziellere Theorie und erfasst insbesondere auch alle Verbindungen mit älteren sich auf Krümmungsschwerpunkte in Sonderfällen beziehenden Teilergebnissen und der einschlägigen Literatur.

Mit dem vorliegenden gemeinsam verfassten Artikel soll lediglich ein Grundriss der eben erwähnten spezielleren Theorie in knapper und möglichst elementarer Form dargestellt werden. Vorbestimmte Rechnungen werden nicht explizite durchgeführt, und Hinweise auf Begriffe und Formeln der «skalaren» Integralgeometrie, wie diese in einer unserem einfachen Aufbau entsprechenden Weise etwa in [2] entwickelt worden sind, ermöglichen weitere Kürzungen.

### 1. Additive vektorielle Funktionen

Es bezeichne  $E^n$  ( $n \geq 1$ ) den  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum, in dem ein Punkt  $0$  als Ursprung ausgezeichnet sei. Weiter sei  $V^n$  der  $n$ -dimensionale euklidische Vektorraum, dessen Elemente hier aufgrund der zwischen  $E^n$  und  $V^n$  bestehenden Bijektion als die im Ursprung  $0 \in E^n$  angreifenden Ortsvektoren der Punkte des  $E^n$  gedeutet werden. So ist für uns zweckmässig, für die Punkte  $x \in E^n$  und ihre Ortsvektoren  $x \in V^n$  das nämliche Zeichen zu verwenden. Skalarprodukt und Norm sollen mit  $\langle x, y \rangle$  und  $|x| = \langle x, x \rangle^{1/2}$  angeschrieben werden.

Ist  $\mathcal{K}^n$  die Klasse der nichtleeren Eikörper (kompakte und konvexe Punkt-mengen) des  $E^n$ , so bedeute  $\mathcal{S}^n$  den Konvexring, d.h. die Klasse aller Punkt-mengen des  $E^n$ , die sich als Vereinigungsmenge endlich vieler Eikörper von  $\mathcal{K}^n$  darstellen lassen; die leere Menge  $\phi$  sei ebenfalls Element von  $\mathcal{S}^n$ . Es gilt also:

$$A \in \mathcal{S}^n: \Leftrightarrow A = \phi \quad \text{oder} \quad A = \bigcup_1^k A_i, \quad A_i \in \mathcal{K}^n \quad (i = 1, \dots, k). \quad (1.1)$$

$\mathcal{S}^n$  enthält insbesondere die Teilklasse  $\mathcal{D}^n$  der kompakten Polyeder des  $E^n$ .

Es bezeichne nun  $f$  eine Abbildung  $f: \mathcal{S}^n \rightarrow V^n$ , die jedem Körper  $A \in \mathcal{S}^n$  des Konvexrings einen Vektor  $f(A) \in V^n$  zuordnet; zusätzlich sei  $f(\phi) = 0$  festgelegt,

so dass das Bild der leeren Menge der Nullvektor ist. Es handelt sich um eine vektorielle (vektorwertige) Funktion  $f$  über  $\mathcal{S}^n$ . Diese soll *bedingt stetig* heißen, wenn

$$A, A_i \in \mathcal{K}^n \quad (i = 1, 2, \dots), \quad A_i \rightarrow A \quad (i \rightarrow \infty) \Rightarrow f(A_i) \rightarrow f(A) \quad (i \rightarrow \infty) \quad (1.2)$$

gilt, wobei sich die Eikörperkonvergenz links auf die in  $\mathcal{K}^n$  übliche Blaschke-Hausdorff Metrik, die Vektorkonvergenz rechts auf die im  $V^n$  festgelegte Norm bezieht.

Nun sei  $\mathcal{F}^n$  die Klasse der bedingt stetigen vektoriellen Funktionen über  $\mathcal{S}^n$ . – Analog bedeute  $\Phi^n$  die Klasse der bedingt stetigen skalaren Funktionen  $\varphi: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die jedem Körper  $A \in \mathcal{S}^n$  eine reelle Zahl  $\varphi(A) \in \mathbb{R}$  zuweist, wobei auch  $\varphi(\emptyset) = 0$  (Null) festgesetzt ist.

Eine vektorielle Funktion  $f \in \mathcal{F}^n$  nennen wir nun *additiv*, wenn das der Verbandsstruktur von  $\mathcal{S}^n$  angepasste Additionstheorem

$$A, B \in \mathcal{S}^n \Rightarrow f(A \cup B) + f(A \cap B) = f(A) + f(B) \quad (1.3)$$

uneingeschränkt gültig ist. Sie heißt ferner *drehäquivalent*, wenn die Beziehung

$$A \in \mathcal{S}^n, \quad d \in D \Rightarrow f(dA) = df(A) \quad (1.4)$$

gilt, wobei  $D$  die Gruppe der (eigentlichen) Drehungen  $d$  des Raumes  $E^n$  um den Ursprung  $0$  bezeichnet. Wir nennen die Funktion  $f$  ferner  *$\varphi$ -translationsäquivalent*, wenn eine ihr zugeordnete skalare Funktion  $\varphi = \varphi[f] \in \Phi^n$  derart existiert, dass die Aussage

$$A \in \mathcal{S}^n, \quad t \in T \Rightarrow f(A + t) = f(A) + \varphi(A) t \quad (1.5)$$

gilt, wo  $T$  die Gruppe der Translationen  $t$  von  $E^n$  auf sich anzeigt. Mit dem Translationsvektor  $t$  wird mit  $A + t$  das Translat des Körpers  $A$  anschreibbar. Wir nennen  $\varphi$  die zu  $f$  assoziierte Funktion. – Die additiven, drehäquivalenten und  $\varphi$ -translationsäquivalenten vektoriellen Funktionen  $f \in \mathcal{F}^n$  fassen wir zur Teilklasse  $\mathcal{F}_0^n \subset \mathcal{F}^n$  zusammen. – Analog bilden wir die Teilklasse  $\Phi_0^n \subset \Phi^n$  derjenigen skalaren Funktionen  $\varphi$  von  $\mathcal{S}^n$ , die zusätzlich additiv, drehinvariant und translationsinvariant sind, so dass also die Beziehungen

$$A, B \in \mathcal{S}^n \Rightarrow \varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B); \quad (1.6)$$

$$A \in \mathcal{S}^n, \quad d \in D \Rightarrow \varphi(dA) = \varphi(A); \quad (1.7)$$

$$A \in \mathcal{S}^n, \quad t \in T \Rightarrow \varphi(A + t) = \varphi(A) \quad (1.8)$$

gelten. Mit den beiden letzten Relationen wird zusammengefasst ausgesagt, dass  $\varphi$  bewegungsinvariant ist.

Müheles beweist man jetzt die nachfolgenden Tatbestände:

$$f, g \in \mathcal{F}_0^n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad h = \alpha f + \beta g \Rightarrow h \in \mathcal{F}_0^n, \quad \varphi[h] = \alpha \varphi[f] + \beta \varphi[g]; \quad (1.9)$$

$$f \in \mathcal{F}_0^n, \quad \varphi = \varphi[f] \Rightarrow \varphi \in \Phi_0^n. \quad (1.10)$$

Es gilt demnach das folgende

**Lemma 1.** Die Klasse  $\mathcal{F}_0^n$  ist ein linearer Raum über  $\mathbb{R}$ , und die Assoziation  $\varphi: f \rightarrow \varphi[f]$  ist ein Homomorphismus von  $\mathcal{F}_0^n$  in  $\Phi_0^n$ .

## 2. Der charakteristische Vektor

Nachfolgend begründen wir eine spezielle vektorielle Funktion  $c \in \mathfrak{J}_0^n$  der Eigenheit, dass ihre assoziierte skalare Funktion mit der Eulerschen Charakteristik  $\chi \in \Phi_0^n$  identisch wird, so dass also

$$\varphi[c] = \chi \quad (2.1)$$

gilt. Diese über dem Konvexring  $\mathfrak{S}^n$  erklärable Funktion  $c$ , die jedem Körper  $A \in \mathfrak{S}^n$  den charakteristischen Vektor  $c(A) \in V^n$  zuweist, spielt in der hier skizzierten vektoriellen Integralgeometrie die nämliche Rolle wie die Eulersche Charakteristik in der entsprechenden skalaren Integralgeometrie über dem Konvexring<sup>1)</sup>.

Sei  $S = \{x \in E^n; |x| = 1\}$  die  $(n-1)$ -dimensionale Einheitssphäre um den Ursprung 0. Ein Einheitsvektor  $u \in S$  bezeichnet dann eine Raumrichtung. Mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  wird durch  $H(\lambda, u) = \{x \in E^n; \langle x, u \rangle = \lambda\}$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Ebene im  $E^n$  gekennzeichnet. Für  $A \in \mathfrak{S}^n$ ,  $A \neq \emptyset$ , bilden wir

$$\varrho(A, \lambda, u) = \chi(A \cap H(\lambda, u)) - \lim_{\mu \rightarrow \lambda}^+ \chi(A \cap H(\mu, u)), \quad (2.2)$$

wobei  $\lim^+$  den rechtsseitigen Grenzwert für  $\mu \rightarrow \lambda$  mit  $\mu > \lambda$  anzeigen soll, dessen Existenz für Körper  $A \in \mathfrak{S}^n$  trivial ist<sup>2)</sup>. Die über alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  erstreckte Summe

$$\sigma(A, u) = \sum \varrho(A, \lambda, u) \lambda u \quad (2.3)$$

reduziert sich im Hinblick darauf, dass  $\varrho(A, \lambda, u)$  für  $A \in \mathfrak{S}^n$  fast immer verschwindet, de facto lediglich auf endlich viele Glieder, und sie stellt einen stetig von  $u$  abhängigen Vektor dar. Bedeutet  $du$  die Richtungsdichte (Flächenelement auf  $S$ ), so ist mit dem Ansatz

$$c(A) = (1/\omega_n) \int \sigma(A, u) du, \quad (2.4)$$

in dem sich die Integration über die volle Richtungssphäre  $S$  erstreckt, ein dem Körper  $A \in \mathfrak{S}^n$  zugeordneter Vektor  $c(A)$  gegeben. Es ist der *charakteristische Vektor*. Die im Ansatz verwendete Konstante stellt das Volumen

$$\omega_n = \pi^{n/2} / \Gamma(1 + n/2) \quad (2.5)$$

der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel dar. – Wir ergänzen (2.4) noch durch

$$c(\emptyset) = 0, \quad (2.6)$$

wonach also der charakteristische Vektor der leeren Menge der Nullvektor ist. – Die mit (2.2) bis (2.4) eingeleitete Konstruktion ist dem Schnittrekursionsverfahren nachgebildet, das eine elementare Begründung der Eulerschen Charakteristik ermöglicht<sup>3)</sup>. In vektorieller Form wurde sie im Zusammenhang mit der Frage der Übertragung des Steinerpunktes von Eikörpern auf Körper des Konvexrings von P. Mani<sup>4)</sup> vorgeschlagen.

<sup>1)</sup> Vgl. [2], S. 236 ff.

<sup>2)</sup> Vgl. [2], S. 238/9.

<sup>3)</sup> Für den Konvexring erstmals in [3] angegeben.

<sup>4)</sup> Vgl. [4], Lemma 4.

Ist  $A \in \mathcal{K}^n$  ein Eikörper mit der Stützgrösse  $h(A, u) = \sup\{\langle x, u \rangle; x \in A\}$  in Richtung  $u$ , so ergibt sich mit der Bemerkung  $\varrho(A, \lambda, u) = 0$  für  $\lambda \neq h(A, u)$  und  $\varrho(A, \lambda, u) = 1$  für  $\lambda = h(A, u)$  aus (2.4) die Integraldarstellung

$$c(A) = (1/\omega_n) \int h(A, u) u \, du, \quad (2.7)$$

die mit der bekannten von G. C. Shephard<sup>5)</sup> angegebenen Darstellung des Steinerpunktes  $s$  des Eikörpers  $A$  zusammenfällt. So notieren wir die Feststellung

$$A \in \mathcal{K}^n \Rightarrow c(A) = s(A). \quad (2.8)$$

Mit (2.7) folgt, dass  $c$  bedingt stetig ist. Mit der Additivität von  $\chi$  lässt sich mit (2.2) bis (2.4) unmittelbar erkennen, dass  $f = c$  das Additionstheorem (1.3) erfüllt, sodass  $c$  additiv ist. Mit der Drehäquivarianz des Integrals in (2.4) folgt weiter, dass  $f = c$  auch (1.4) befriedigt;  $c$  ist also auch drehäquivariant. Sei nun noch  $t \in T$  und  $A + t$  das Translat von  $A$ . Rückblick auf (2.2) zeigt zunächst, dass  $\varrho(A + t, \lambda, u) = \varrho(A, \lambda - \langle u, t \rangle, u)$  ist, so dass sich mit Verwendung der Schnittrekursion<sup>6)</sup>

$$\sum \varrho(A, \lambda, u) = \chi(A) \quad (2.9)$$

in Verbindung mit (2.3) auf  $\sigma(A + t, u) = \sigma(A, u) + \chi(A) \langle u, t \rangle u$  schliessen lässt. Einsatz der Integralformel

$$\int \langle u, t \rangle u \, du = \omega_n t \quad (2.10)$$

liefert mit (2.4) sodann

$$c(A + t) = c(A) + \chi(A) t, \quad (2.11)$$

womit zusammenfassend  $c \in \mathcal{F}_0^n$  und (2.1) nachgewiesen ist.

Abschliessend bemerken wir, dass sich aus (2.4) die Beziehung

$$c(\xi A) = \xi c(A) \quad (0 \leq \xi < \infty) \quad (2.12)$$

ablesen lässt, wonach der charakteristische Vektor bezüglich Dilatation homogen vom ersten Grade ist.

### 3. Die Quermassvektoren

Die oben sichergestellte charakteristische vektorielle Funktion  $c \in \mathcal{F}_0^n$  erlaubt es nun, eine Skala von  $n + 1$  additiven vektoriellen Funktionen

$$q_i \in \mathcal{F}_0^n \quad (i = 0, \dots, n) \quad (3.1)$$

zu begründen, die den Minkowskischen Quermassintegralen  $W_i$  so zugeordnet sind, dass

$$\varphi[q_i] = W_i \quad (i = 0, \dots, n) \quad (3.2)$$

<sup>5)</sup> Vgl. [5], S. 11, und die Ausführungen zum Steinerpunkt bei B. Gruenbaum [6], bes. S. 314.

<sup>6)</sup> Vgl. [2], S. 239.

gilt. Wir nennen  $q_i$  den  $i$ -ten *Quermassvektor*; die ihm zugeordnete assoziierte skalare Funktion ist also das  $i$ -te Quermassintegral  $W_i$ . Mit Verwendung der Hilfszahlen

$$a_{in} = \binom{n}{i} \frac{\omega_{n-1} \cdots \omega_{n-i}}{\omega_1 \cdots \omega_i} \quad (i = 1, \dots, n-1); \quad a_{on} = 1, \quad a_{nn} = 1/\omega_n \quad (3.3)$$

definieren wir über dem Konvexring  $\mathcal{S}^n$  die Funktion  $q_i$  für  $A \neq \emptyset$  durch den Integralansatz

$$q_i(A) = \frac{1}{a_{in}} \int c(A \cap E^i) dE^i \quad (i = 0, \dots, n-1); \quad q_n(A) = \omega_n c(A), \quad (3.4)$$

und fügen ergänzend noch

$$q_i(\emptyset) = 0 \quad (i = 0, \dots, n) \quad (3.5)$$

hinzu. Hier bedeuten  $E^i$  eine im Raum  $E^n$  bewegliche  $i$ -dimensionale Ebene und  $dE^i$  die Bewegungsdichte von  $E^i$  im Sinne der Integralgeometrie<sup>7)</sup>. Mit den einschlägigen Eigenschaften von  $c$  lässt sich ausgehend vom gewählten Ansatz mühelos begründen, dass  $q_i$  bedingt stetig, additiv und drehäquivalent ausfällt. Mit einer Translation  $t \in T$  ergibt sich mit (2.11)

$$q_i(A + t) = q_i(A) + W_i(A) t, \quad (3.6)$$

wenn für das  $i$ -te Quermassintegral die bekannte Darstellung

$$W_i(A) = \frac{1}{a_{in}} \int \chi(A \cap E^i) dE^i \quad (i = 0, \dots, n-1); \quad W_n(A) = \omega_n \chi(A) \quad (3.7)$$

herangezogen wird<sup>8)</sup>. – Die Funktion  $q_i$  ist also  $W_i$ -translationsäquivalent. So bestätigen sich die Aussagen (3.1) und (3.2). Endlich bemerken wir noch, dass

$$q_i(\xi A) = \xi^{n-i+1} q_i(A) \quad (0 \leq \xi < \infty) \quad (3.8)$$

gilt, wonach der  $i$ -te Quermassvektor bezüglich Dilatation homogen vom Grade  $n - i + 1$  ist.

#### 4. Hauptsatz

Wir wollen nun zeigen, dass die  $n + 1$ -Quermassvektoren  $q_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) eine Basis des linearen Raumes  $\mathcal{F}_0^n$  ausmachen, so dass alle vektoriellen Funktionen  $f \in \mathcal{F}_0^n$  als Linearkombinationen der  $q_i$  dargestellt werden können<sup>9)</sup>. Es handelt sich um das vektorielle Korrelat des nachfolgend formulierten sich auf skalare Funktionen beziehenden bekannten Satzes<sup>10)</sup>:

<sup>7)</sup> Vgl. [2], S. 227.

<sup>8)</sup> Vgl. [2], S. 240 (120).

<sup>9)</sup> Der erstgenannte Verfasser verdankt hier Herrn U. Würzler einen wertvollen Hinweis, der eine Abkürzung der Begründung ermöglichte (Seminar, Sommersemester 1970).

<sup>10)</sup> Vgl. [2], S. 221 (Satz IV).

Zu einer Funktion  $\varphi \in \Phi_0^n$  existieren  $n + 1$  reelle Konstanten  $\alpha_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) derart, dass die Identität

$$\varphi = \sum_0^n \alpha_i W_i \quad (4.1)$$

über  $\mathcal{S}^n$  besteht.

Mit Rücksicht auf das Ergebnis des vorstehenden Abschnittes folgt in Verbindung mit (1.9) die Aussage

$$\varphi \in \Phi_0^n \Rightarrow \exists f \in \mathcal{F}_0^n: \varphi[f] = \varphi. \quad (4.2)$$

Die Assoziation  $\varphi: f \rightarrow \varphi[f]$  ist also eine surjektive Abbildung von  $\mathcal{F}_0^n$  auf  $\Phi_0^n$ . – Weiter gilt aber die wichtige Feststellung

$$f \in \mathcal{F}_0^n, \quad \varphi[f] = 0 \Rightarrow f = 0. \quad (4.3)$$

Die oben genannte Abbildung ist demnach auch injektiv.

Beweis: Ordnen wir jedem Eikörper  $A \in \mathcal{K}^n$  den Punkt  $s'(A) = s(A) + f(A)$  zu, so ist mit  $s'$  eine stetige, additive, translationsäquivalente und drehäquivalente, insgesamt also bewegungsäquivalente Abbildung  $s': \mathcal{K}^n \rightarrow E^n$  gegeben. Hierbei sind die zuständigen Eigenschaften des Steinerpunktes  $s$  berücksichtigt und die mit der Voraussetzung  $\varphi[f] = 0$  bedingte Invarianz  $f(A + t) = f(A)$  benutzt worden. Nach neueren Ergebnissen betreffend die axiomatische Kennzeichnung des Steinerpunktes<sup>11)</sup> resultiert  $s' = s$ , also  $f = 0$  über  $\mathcal{K}^n$ . Dies zieht mit der Additivität von  $f$  die Folgerung  $f = 0$  über  $\mathcal{S}^n$  nach sich, was zu zeigen war.

Zusammenfassend schliessen wir mit (4.2) und (4.3) auf

**Lemma 2.** Die Assoziation  $\varphi: f \rightarrow \varphi[f]$  stellt einen Isomorphismus von  $\mathcal{F}_0^n$  und  $\Phi_0^n$  dar.

Mit (3.2) und (4.1) folgert man jetzt den

**Hauptsatz.** Ist  $f \in \mathcal{F}_0^n$ , so existieren  $n + 1$  reelle Konstanten  $\alpha_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) derart, dass die Identität

$$f = \sum_0^n \alpha_i q_i \quad (4.4)$$

über  $\mathcal{S}^n$  besteht.

## 5. Integralformeln

Gestützt auf die Aussage (4.4) des Hauptsatzes lassen sich Ergebnisse herleiten, indem eine vektorielle Funktion  $f$  über dem Konvexring  $\mathcal{S}^n$  – etwa durch einen Integralansatz – so definiert wird, dass diese ersichtlich bedingt stetig, additiv, mit einem  $\varphi \in \Phi_0^n$  weiter  $\varphi$ -translationsäquivalent und drehäquivalent ist. Mit der  $f$  assoziierten Funktion  $\varphi$  sind gemäss (4.1) auch die Konstanten  $\alpha_i$  ermittelbar, und nach (4.4) ergibt sich dann die Darstellung von  $f$  durch die Quermassvektoren  $q_i$ .

<sup>11)</sup> Vgl. [7], bes. aber [1] (Satz 2).

Damit ist eine Formel der vektoriellen Integralgeometrie über  $\mathcal{S}^n$  gewonnen. Die erforderlichen Nebenrechnungen sind eindeutig vorbestimmt und werden nachfolgend weggelassen. – Vorbereitend sei noch die nützliche Hilfskonstante

$$a_m = m! \omega_1 \dots \omega_m / 2 \tag{5.1}$$

festgelegt. – Zunächst erörtern wir das vektorielle Analogon zum vollständigen *kinematischen Hauptsystem* der Integralgeometrie<sup>12)</sup>.

Bezeichnen  $A \in \mathcal{S}^n$  einen beweglichen,  $B \in \mathcal{S}^n$  einen ruhenden Körper des Konvexrings und  $dA$  die kinematische Dichte von  $A$ , so gilt das Formelsystem

$$\int q_k(A \cap B) dA = \sum_{i=0}^k c_{nki} W_{k-i}(A) q_i(B) \quad (k = 0, \dots, n), \tag{5.2}$$

wobei sich die Integration über alle Bewegungen von  $A$  erstreckt und die Koeffizienten durch

$$c_{nki} = \binom{k}{i} \frac{a_n \omega_{n-k+i} \omega_k \omega_{n-i}}{\omega_n \omega_{k-i} \omega_{n-k} \omega_i} \tag{5.3}$$

festgelegt sind. – Nachfolgend geben wir ein vollständiges System von *Integralformeln vom Croftonschen Typ*. Bezeichnet  $E^i$  eine bewegliche  $i$ -dimensionale Ebene,  $dE^i$  ihre Bewegungsdichte, so ist mit  $A \in \mathcal{S}^n$

$$\int q_k(A \cap E^i) dE^i = d_{nki} q_{k+i-n}(A) \quad (n - k \leq i \leq n, k = 0, \dots, n), \tag{5.4}$$

wobei die Konstante durch

$$d_{nki} = a_{in} \frac{k! i! \omega_k \omega_i \omega_{2n-i-k}}{(k+i-n)! n! \omega_{n-k} \omega_{n-i} \omega_{k+i-n}} \tag{5.5}$$

ausgedrückt werden kann, wenn die Hilfsgrösse (3.3) erneut verwendet wird. Im Falle  $k = n$ ,  $q_n = \omega_n c$ ,  $d_{nni} = a_{in} \omega_n$  wird wieder der definitorische Ansatz (3.4) reproduziert. Wenn  $i = n$  ist, soll das Integral links in (5.4) den Integranden darstellen, so dass die Formel mit  $d_{nkn} = 1$  trivial wird.

Wir fügen noch einige Formeln an, die sich lediglich auf Eikörper  $A \in \mathcal{K}^n$  beziehen. Diese ergeben sich aus einer naheliegenden und mit geringfügigen Modifikationen möglichen Restriktion der Hauptsatzaussage (4.4) auf die Klasse  $\mathcal{K}^n$ .

Bezeichnet  $A^i$  den Normalriss des Eikörpers  $A \in \mathcal{K}^n$  auf die durch den Ursprung 0 gehende  $i$ -dimensionale Ebene  $E^i$ , so gilt die *Projektionsformel*

$$\int q_n(A^i) d\bar{E}^i = (i a_n / 2 n a_i a_{n-i}) q_n(A) \quad (i = 1, \dots, n - 1). \tag{5.6}$$

Hierbei bezeichnet  $d\bar{E}^i$  die Drehdichte von  $E^i$  im Sinne der Integralgeometrie, und  $a_m$  ist die mit (5.1) angegebene Hilfskonstante. Im Falle  $i = 1$  ist (5.6) mit der Shephardschen

<sup>12)</sup> Vgl. [2], S. 244 (130).

Integraldarstellung (2.7) gleichwertig, indem  $q_n(A^1) = (\omega_n/2) [h(A, u) - h(A, -u)] u$  und  $d\bar{E}^1 = du$  ist, wo  $E^1$  eine Gerade der Richtung  $u$  bzw.  $-u$  anzeigt.

Für zwei Eikörper  $A, B \in \mathcal{K}^n$ ,  $A$  um den Ursprung  $0$  drehbar,  $B$  fest, gilt die *Drehformel bezüglich Minkowskischer Addition*

$$\int q_k(A+B) d\bar{A} = (a_n/\omega_n) \sum_{i=k}^n \binom{n-k}{i-k} W_{n+k-i}(A) q_i(B) \quad (k=0, \dots, n), \quad (5.7)$$

wobei  $d\bar{A}$  die Drehdichte von  $A$  bedeutet. – Wählt man für  $A$  speziell eine Kugel  $K_r$  vom Radius  $r$  um  $0$  und setzt anstelle von  $B$  erneut  $A$ , so resultiert mit den Bemerkungen, dass  $A + K_r = A_r$  den äusseren Parallelkörper von  $A$  im Abstand  $r$  ergibt,  $W_m(K_r) = \omega_n r^{n-m}$  und  $\int d\bar{K}_r = a_n$  ist, ein vektorielles Analogon zu den *Steinerschen Parallelformeln*<sup>13)</sup>, nämlich

$$q_k(A_r) = \sum_{i=k}^n \binom{n-k}{i-k} r^{i-k} q_i(A) \quad (k=0, \dots, n). \quad (5.8)$$

Im speziellen Fall  $k=n$  liefert diese Formel noch den Tatbestand  $q_n(A_r) = q_n(A)$ , der wegen  $q_n = \omega_n s$  eine bekannte Eigenschaft des Steinerpunktes ausdrückt.

## 6. Krümmungsschwerpunkte

Wir beziehen uns nachfolgend auf die Klassen

$$\mathcal{S}_i^n = \{A \in \mathcal{S}^n; W_i(A) \neq 0\} \quad (i=0, \dots, n)$$

solcher Mengen des Konvexrings, für die das  $i$ -te Minkowskische Quermassintegral  $W_i$  nicht verschwindet, die insbesondere nicht leer sind. – Jedem Körper  $A \in \mathcal{S}_i^n$  kann man durch den Ansatz

$$p_i(A) = q_i(A)/W_i(A) \quad (i=0, \dots, n) \quad (6.1)$$

einen Punkt  $p_i \in E^n$  zuordnen, indem man den mit  $1/W_i$  dilatierten  $i$ -ten Quermassvektor als Ortsvektor im  $E^n$  deutet. Wir wollen  $p_i$  den  $i$ -ten *Krümmungsschwerpunkt* von  $A$  nennen. Mit den für die Quermassvektoren begründeten Eigenschaften ergibt sich, dass die mit (6.1) gegebene Punktzuordnung  $p_i: \mathcal{S}_i^n \rightarrow E^n$  die nachfolgend angeführten Tatbestände erfüllt: (a)  $p_i$  ist bedingt stetig; (b)  $p_i$  ist gewogen additiv, d. h. es gilt das Additionstheorem

$$\left. \begin{aligned} W_i(A \cup B) p_i(A \cup B) + W_i(A \cap B) p_i(A \cap B) \\ = W_i(A) p_i(A) + W_i(B) p_i(B); \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

(c)  $p_i$  ist bewegungsäquivalent, d. h. es gilt

$$p_i(bA) = b p_i(A), \quad (6.3)$$

wo  $b$  eine eigentliche Bewegung im Raum  $E^n$  anzeigt.

<sup>13)</sup> Vgl. [2], S. 214 (49).

Für die Begründung ist neben der Drehäquivarianz von  $q_i$  die sich mit Ansatz (6.1) aus (3.6) ergebende Translationsäquivarianz

$$p_i(A+t) = p_i(A) + t \quad (6.4)$$

entscheidend. – Zwei Schwerpunkte sind besonders hervorzuheben, nämlich

$$p_0 = g \quad (V > 0); \quad p_n = s \quad (\chi \neq 0), \quad (6.5)$$

die sich mit Rückblick auf (3.4) und Ansatz (6.1) mit den Bemerkungen  $W_0 = V$  (Volumen) und  $W_n = \omega_n \chi$  ( $\chi =$  Eulers Charakteristik) ergeben. Hierbei soll  $g$  den «gewöhnlichen» Schwerpunkt und  $s$  den im Sinne von Mani<sup>14)</sup> auf Körper des Konvexrings übertragenen Steinerpunkt bezeichnen. So wie die Festlegung von  $g$  nur für Körper positiven Volumens möglich ist, kann eine Definition des Steinerpunktes  $s$  nur dann gegeben werden, wenn die Eulersche Charakteristik nicht verschwindet.

Zusammenfassend stellen wir fest, dass die Punkte  $p_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) eine vom Schwerpunkt zum Steinerpunkt führende vollständige Punktreihe bilden.

Für Eikörper mit «glatttem» Rand (zweimal stetig differenzierbare Randfläche) kann gezeigt werden<sup>15)</sup>, dass

$$p_i = \int x H_{i-1}(x) dF / \int H_{i-1}(x) dF \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6.6)$$

gilt, wobei  $H_m(x)$  die  $m$ -te elementarsymmetrische Funktion der  $n-1$  Hauptkrümmungen an der Stelle  $x \in \partial A$  der Randfläche des Eikörpers  $A$  und  $dF$  das Flächenelement bei  $x$  bezeichnen; die Integration hat sich über den gesamten Rand  $\partial A$  zu erstrecken.

Nun können sämtliche im vorstehenden Abschnitt entwickelten Integralformeln für die Quermassvektoren  $q_i$  gemäss der mit (6.1) angesetzten Beziehung  $q_i = W_i p_i$  in solche umgerechnet werden, die sich auf die Krümmungsschwerpunkte  $p_i$  unter Beachtung der Klausel  $W_i \neq 0$  beziehen. Dies sei hier aber nicht explizite ausgeführt.

H. Hadwiger (Bern) und R. Schneider (Berlin)

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. SCHNEIDER, *Krümmungsschwerpunkte konvexer Körper* (im Druck).
- [2] H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie* (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1957).
- [3] H. HADWIGER, *Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie*, J. reine angew. Math. 194, 101–110 (1955).
- [4] P. MANI, *On Angle Sums and Steiner Points of Polyhedra* (im Druck).
- [5] G. C. SHEPHARD, *Approximation Problems for Convex Polyhedra*, Mathematika 11, 9–18 (1964).
- [6] B. GRUENBAUM, *Convex Polytopes* (John Wiley and Sons, London, New York and Sydney 1967).
- [7] R. SCHNEIDER, *On Steiner Points of Convex Bodies* (im Druck).

<sup>14)</sup> Vgl. Fussnote 4).

<sup>15)</sup> Vgl. [1] (28).