Die projektiven Abbildungen auf einer Geraden

Autor(en): **Böhm, Wolfgang**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **26 (1971)**

Heft 2

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-28064

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Alle diese Beziehungen gelten in Inertialsystemen. Ihre Übertragung auf andere Bezugssysteme erfolgt in der bekannten Weise durch Hinzunahme der Zusatzkräfte der Relativbewegung.

8. Schlussbemerkungen. Aus den letzten Abschnitten ergibt sich, dass es tatsächlich möglich ist, die klassische Mechanik aus zwei Grundprinzipien, nämlich dem Prinzip der virtuellen Leistungen und dem Reaktionsprinzip, zu entwickeln. Neu ist dabei nur die Art, wie diese Prinzipien formuliert werden, und ungewohnt vor allem die in Abschnitt 3 gegebene Fassung des Äquivalenzbegriffs.

Üblicherweise werden zwei Kräftegruppen als äquivalent bezeichnet, wenn die über sie erstreckten Summen (4.6) und (4.7) verschwinden, und zwar auch dann, wenn sich der betrachtete Körper unter den beiden Kräftegruppen verschieden verhält. Hier wird dagegen das Verhalten des Körpers in den Vordergrund gestellt und zum Kriterium für die Äquivalenz gemacht.

Auch nach der landläufigen Form des Prinzips ist die virtuelle Gesamtleistung aller an einem beliebigen Körper angreifenden wirklichen und Trägheitskräfte in jedem Augenblick null. Es ist aber offenbar sinnvoll, zwei Kräftegruppen, unter denen sich ein bestimmter Körper *ceteris paribus* gleich bewegt, als äquivalent zu bezeichnen. Dazu genügt das Verschwinden der Summen (4.6) und (4.7) keineswegs; vielmehr müssen die virtuellen Leistungen jeder der beiden Kräftegruppen zusammen mit derjenigen der gleichen Trägheitskräfte unter jedem zulässigen Bewegungszustand null ergeben, und das trifft dann und nur dann zu, wenn die virtuellen Leistungen der beiden Kräftegruppen unter beliebigen zulässigen Bewegungszuständen gleich sind. Genau das ist aber die in der ersten Aussage von Abschnitt 3 enthaltene Definition der Äquivalenz, aus der sich zwangsläufig auch diejenige des Gleichgewichts ergibt.

HANS ZIEGLER, ETH Zürich

Die projektiven Abbildungen auf einer Geraden

Die Menge aller eindimensionalen Unterräume eines $(n+1)$-dimensionalen Vektorraumes $\mathfrak{V}$ heisst n-dimensionaler projektiver Raum, seine Elemente heissen Punkte[1]). Insbesondere bilden die eindimensionalen Unterräume eines zweidimensionalen Vektorraumes eine projektive Gerade. Eine lineare Abbildung des Vektorraumes $\mathfrak{V}$ auf sich induziert eine projektive Abbildung des von $\mathfrak{V}$ erzeugten projektiven Raumes auf sich. Diese projektiven Abbildungen bilden selbst wieder einen projektiven Raum, und zwar der Dimension $n\,(n+2)$.

Es ist reizvoll, diesen Raum für den Fall $n = 1$, d.h. den Raum $\mathfrak{P}$ der Projektivitäten P auf einer Geraden $\mathfrak{G}$ zu betrachten. Er besitzt die anschauliche Dimension drei.

---

[1]) Vgl. dazu etwa W. KLINGENBERG, Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Universität Mainz 1966, p. 299ff.

I. Die Einführung von Koordinaten

1. Es ist zweckmässig, auf $\mathfrak{G}$ projektive Koordinaten einzuführen. Ist $\{\mathfrak{v}_0, \mathfrak{v}_1\}$ eine Basis des $\mathfrak{G}$ erzeugenden Vektorraumes und $\lambda\,\mathfrak{a} = \alpha_0\,\mathfrak{v}_0 + \alpha_1\,\mathfrak{v}_1 \neq \mathfrak{o}$ ein Vektor des «Punktes» $a \in \mathfrak{G}$, so heissen α_0, α_1 projektive Koordinaten von a, sie sind homogen. In diesen Koordinaten schreibt sich eine Projektivität $X\colon a \to b$ als Matrizenprodukt

$$(\alpha_0, \alpha_1)\begin{pmatrix} \xi_{00} & \xi_{01} \\ \xi_{10} & \xi_{11} \end{pmatrix} = (\beta_0, \beta_1)\,. \tag{*}$$

Mit den projektiven Koordinaten auf $\mathfrak{G}$ ist auf natürliche Weise ein projektives Koordinatensystem in $\mathfrak{P}$ ausgezeichnet:

Die Elemente ξ_{ik} sind projektive Koordinaten der Projektivität X.

2. Zur Veranschaulichung inhomogenisieren wir. Wir setzen für einen Punkt $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha$, für eine Projektivität $\xi_{10} = 1$, $\xi_{00} = x_1$, $\xi_{11} = x_2$, $\xi_{01} = x_3$ und deuten die x_i als Koordinaten in einem Kartesischen System. Damit schliessen wir auf $\mathfrak{G}$ den Punkt $\alpha_0 = 0$ und in $\mathfrak{P}$ die Ebene $\xi_{10} = 0$ für die Anschauung aus. Inhomogen schreibt sich (*)

$$\frac{x_3 + \alpha\, x_2}{x_1 + \alpha} = \beta\,. \tag{*'}$$

II. Die ausgezeichneten Projektivitäten

3. Suchen wir zunächst alle auf natürliche Weise ausgezeichneten Projektivitäten in $\mathfrak{P}$ auf! Zu ihnen gehören alle singulären Projektivitäten, für sie ist $\xi_{00}\,\xi_{11} - \xi_{10}\,\xi_{01} = 0$:

Die singulären Projektivitäten liegen in $\mathfrak{P}$ auf einem hyperbolischen Paraboloid Σ mit der Gleichung $x_3 - x_1\,x_2 = 0$[2]).

Mit den beiden Scharen der Erzeugenden $y_1 = -\alpha$ bzw. $y_2 = \beta$ als Parameterlinien auf Σ wird $y_3 = -\alpha\,\beta$ und

$$x\,Y = (1, \xi)\begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha\beta \\ 1 & \beta \end{pmatrix}\sigma\,(1, \beta),\ \sigma = -\alpha + \xi\,.$$

Die singuläre Projektivität Y projiziert alle Punkte $x \in \mathfrak{G}$ in den Punkt b mit der Koordinate β mit Ausnahme eines Punktes a mit der Koordinate α, dessen Bild wegen $\sigma = 0$ unbestimmt ist.

Alle singulären Projektivitäten, für die a fest ist, liegen auf einer Erzeugenden $\Gamma_{a \to \mathfrak{G}}$ der einen Schar und alle, für die b fest ist, auf einer Erzeugenden $\Gamma_{\mathfrak{G} \to b}$ der anderen Schar von Σ. Je zwei solche Erzeugenden schneiden sich in einer singulären Projektivität. Sie ist durch das Punktepaar $a \to b$ bestimmt.

4. Ebenfalls ausgezeichnet sind die involutorischen Projektivitäten mit

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix},$$

woraus folgt $x_1 + x_2 = 0$ und $\varrho = x_3 - x_1\,x_2$:

Die Involutionen erfüllen eine Ebene Δ mit der Gleichung $x_1 + x_2 = 0$.

---

[2]) Untermengen von $\mathfrak{P}$ bezeichnen wir mit grossen griechischen, Elemente von $\mathfrak{P}$ mit grossen lateinischen Buchstaben.

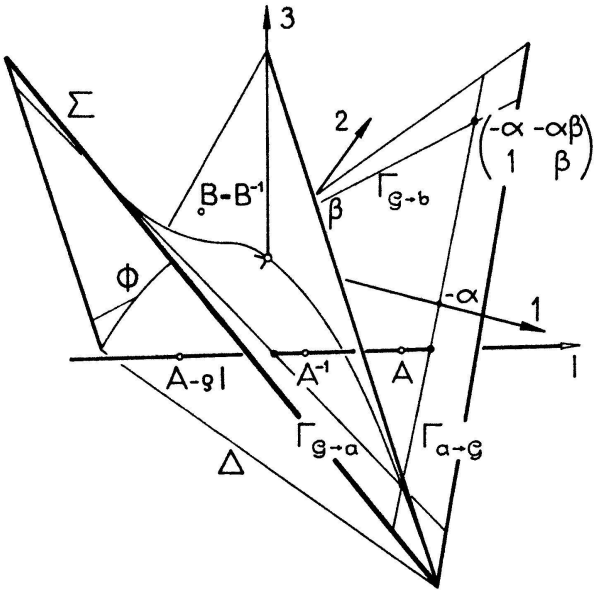
Δ liegt symmetrisch zu $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und enthält die 3-Achse. Δ schneidet Σ in einem ausgezeichneten Kegelschnitt Φ. Wegen $x_1 + x_2 = 0$ ist auf diesem $-\alpha + \beta = 0$:

Auf Φ liegen die singulären Projektivitäten 3, für die $a = b$ ist.

Die Eigenschaften der Ebene Δ und des Kegelschnitts Φ hat schon O. Hesse 1865 betrachtet[3]).

5. Ausgezeichnet ist auch die identische Projektivität $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sie liegt in der Fernebene $\xi_{10} = 0$ in Richtung $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$:

Die Identität I ist der Fernpunkt aller Normalen von Δ.



6. Ausgezeichnet ist endlich auch ein parabolischer Zylinder Ψ mit der Gleichung $4\,x_3 + (x_1 - x_2)^2 = 0$. Für seine Punkte hat $|X - \varrho\, I| = 0$ eine Doppelwurzel, die Fixpunkte von X fallen zusammen.

Auf Ψ liegen alle parabolischen, in seinem Inneren alle reellen elliptischen, in seinem Äusseren alle hyperbolischen Projektivitäten[4]).

Offenbar ist Δ Polarebene von I bezüglich Σ und Symmetrieebene von Σ und Ψ, die sich längs Φ berühren.

III. Unabhängigkeit vom Koordinatensystem und Inversion

7. Die ausgezeichneten Projektivitäten sind unabhängig vom Koordinatensystem. Führen wir auf $\mathfrak{G}$ etwa durch eine Projektivität A neue projektive Koordinaten $x\,A = x'$ ein, so schreibt sich eine Projektivität $x\,P = y$ in den neuen Koordinaten $x'\,P' = y'$, wobei $P' = A^{-1}\,PA$ ist. Die Elemente von P' sind linear in denen von P. Der Projektivität $A: x \to x'$ auf $\mathfrak{G}$ entspricht so im Raum $\mathfrak{P}$ eine Projektivität $\mathfrak{A}$: $P \to P'$. Ist A nicht singulär, aber P singulär, involutorisch oder die Identität, so ist auch P' singulär, involutorisch oder die Identität:

[3]) Vgl. etwa W. Blaschke, Projektive Geometrie, Basel 1954, p. 75.
[4]) Vgl. W. Blaschke, a.a.O., p. 55.

Die durch A in $\mathfrak{P}$ induzierte Projektivität $\mathfrak{A}$ führt die Quadrik Σ, die Ebene Δ, die Identität I und den Zylinder Ψ in sich über.

8. Die Projektivitäten der Reihe $R = A + \varrho I$ ($\varrho =$ bel.) sind Fixpunkte der Projektivität $\mathfrak{A}$:

$\mathfrak{A}$ ist eine «projektive Drehung» um die Verbindung von A mit I, die die ausgezeichnete Quadrik Σ in sich überführt[5]).

9. Suchen wir zu einer gegebenen Projektivität A die Inverse $X = A^{-1}$! Es ist

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}$$

für $x_1 = -a_2$, $x_2 = -a_1$, $x_3 = a_3$. Das ist in $\mathfrak{P}$ eine (projektive) Spiegelung an Δ (und I):

A und A^{-1} liegen spiegelbildlich zu Δ.

Diese Spiegelung ist unabhängig vom Koordinatensystem. Ausgezeichnete Projektivitäten werden von der Spiegelung in ebensolche übergeführt, die Erzeugenden $\Gamma_{a \to \mathfrak{G}}$ und $\Gamma_{\mathfrak{G} \to a}$ von Σ werden vertauscht. Für $B \in \Delta$ ist $B = B^{-1}$ involutorisch *4*.

IV. Die Tangentialebenen von Σ

10. Fragen wir nun nach allen Projektivitäten auf $\mathfrak{G}$, die einen gegebenen Punkt a in einen gegebenen b werfen! Für die gegebenen Koordinaten α, β stellt (*') die Gleichung einer Ebene $-\alpha\beta - x_1\beta + x_2\alpha + x_3 = 0$ dar. Ein Vergleich mit der Polarform

$$x_3 + y_3 - x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

von Σ zeigt, dass sie Tangentialebene von Σ im Punkte $y_1 = -\alpha$, $y_2 = \beta$, $y_3 = -a\beta$ ist:

Alle Projektivitäten mit einem gemeinsamen festen Punktepaar $a \to b$ liegen in einer Tangentialebene $\Lambda_{a \to b}$ von Σ.

$\Lambda_{a \to b}$ schneidet Σ in den Erzeugenden $\Gamma_{a \to \mathfrak{G}}$ und $\Gamma_{\mathfrak{G} \to b}$ von Σ.

11. Ist in *10* insbesondere $-\alpha + \beta = 0$, so ist $a = b$ gemeinsamer Fixpunkt der Projektivitäten, die Ebene (*') berührt Σ in einem Punkt von Φ und enthält daher nach *5* die unendlich ferne Identität I.

Alle Projektivitäten mit gemeinsamem Fixpunkt $a \to a$ liegen in einer Tangentialebene $\Lambda_{a \to a}$ des Zylinders Ψ.

$\Lambda_{a \to a}$ schneidet Σ in den beiden symmetrisch Δ liegenden Erzeugenden $\Gamma_{a \to \mathfrak{G}}$ und $\Gamma_{\mathfrak{G} \to a}$. Zwei solche Tangentialebenen schneiden sich in einer Geraden durch I:

Alle Projektivitäten mit zwei gemeinsamen Fixpunkten $a \to a$ und $a' \to a'$ liegen auf einer Normalen von Δ.

Fallen beide Fixpunkte in einen zusammen, so sind die Projektivitäten parabolisch *6* und liegen auf einer Mantellinie von Ψ.

---

[5]) Vgl. dazu F. Klein, *Nichteuklidische Geometrie* (Berlin 1928), p. 111ff.

12. Drei Tangentialebenen *10* von Σ, die keine Erzeugende von Σ gemeinsam haben, haben genau einen Punkt gemein:

Eine nicht singuläre Projektivität ist durch drei ihrer Punktepaare bestimmt.

Man nennt das manchmal auch den «Hauptsatz der projektiven Geometrie auf $\mathfrak{G}$»[6]). Aus jeder nicht singulären Projektivität P gibt es einen Kegel an Σ, er berührt Σ in einem Kegelschnitt Θ.

Alle singulären Projektivitäten, die mit einer allgemeinen Projektivität P ein beliebiges Punktepaar gemein haben, liegen auf dem Kegelschnitt, den die Polarebene von P aus Σ ausschneidet.

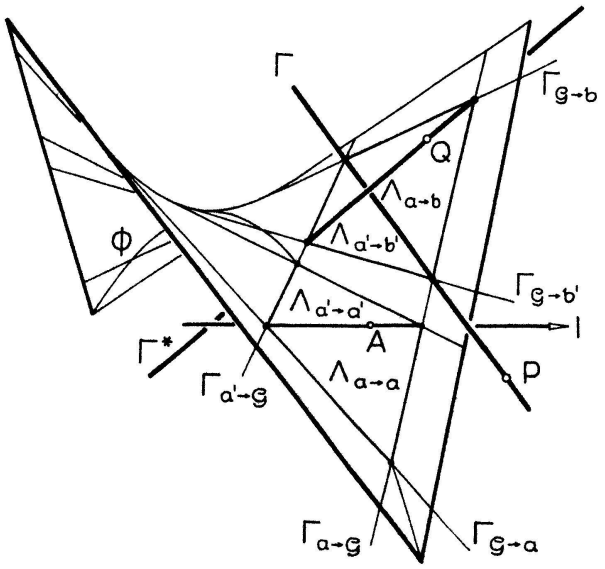
13. Zwei Tangentialebenen von Σ, die keine Erzeugende von Σ gemeinsam haben, schneiden sich in einer Geraden Γ:

Alle Projektivitäten, die zwei feste Punktepaare $a \to b$ und $a' \to b'$ gemein haben, liegen auf einer Geraden Γ.

Berührt Γ aber Σ, so fallen die beiden Tangentialebenen zusammen: Alle Projektivitäten, die mit einer nicht singulären Projektivität P nur ein einziges festes Punktepaar $a \to b$ gemein haben, liegen auf einer Tangente von Σ. Sie geht durch P und den Berührungspunkt von $\Lambda_{a \to b}$ auf Σ.

V. Projektivitäten, die konjugiert zu Σ liegen

14. Betrachten wir noch einmal die beiden Tangentialebenen von *13*! Sie schneiden nach *10* aus Σ das windschiefe Vierseit $\Gamma_{a \to \mathfrak{G}}, \Gamma_{\mathfrak{G} \to b}, \Gamma_{a' \to \mathfrak{G}}, \Gamma_{\mathfrak{G} \to b'}$ aus. Daraus lässt sich ablesen: Die beiden auf Γ liegenden singulären Projektivitäten haben die Tangentialebenen $\Lambda_{a \to b'}$ und $\Lambda_{a' \to b}$. Sie schneiden sich in der zu Γ bezüglich Σ konjugierten Polaren Γ^*. D.h.:



Alle Projektivitäten mit den gemeinsamen festen Punktepaaren $a \to b'$ und *$a' \to b$ liegen auf der zu Γ von 13 konjugierten Polaren Γ^*.*

Das gilt auch, falls das windschiefe Vierseit nicht reell ist.

---

[6]) Vgl. W. Blaschke, a.a.O., p. 43.

15. Sind Γ und Γ^* konjugierte Polaren bezüglich Σ, so ist jeder Punkt P von Γ konjugiert jedem Punkt Q von Γ^*. Ist umgekehrt P konjugiert Q bezüglich Σ, so muss es nach *14* zu jedem Punktepaar $a \to a\,P = b$ ein ebensolches $a' \to a'\,P = b'$ geben, so dass $a'\,Q = b$ und $a\,Q = b'$ ist. Mit anderen Worten:

Zwei Projektivitäten P und Q liegen zu Σ konjugiert, falls $P\,Q^{-1} = Q\,P^{-1}$, also $P\,Q^{-1}$ involutorisch ist.

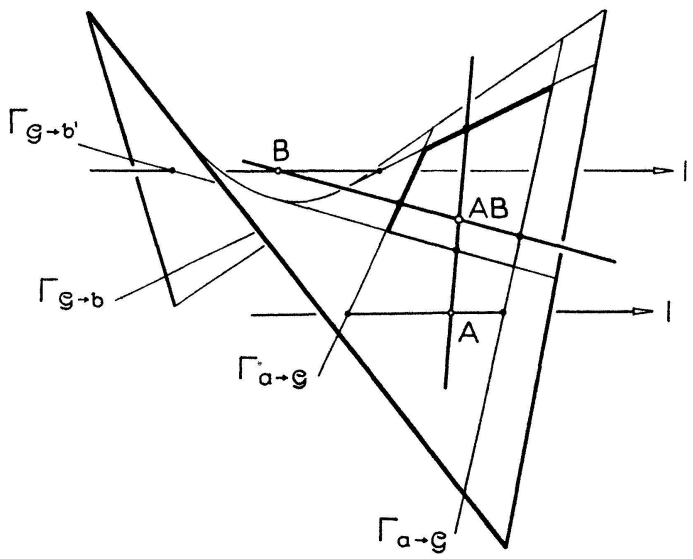
Analytisch folgt das so: $X = P\,Q^{-1}$ ist nach *4* involutorisch für $x_1 + x_2 = (-p_2\,q_1 + q_3) + (p_3 - p_1\,q_2) = 0$. Das aber ist die Polarform von Σ. P liegt in der Polarebene von Q und umgekehrt. Die zu P konjugierten singulären Projektivitäten hatten wir schon in *12* betrachtet.

VI. Die Komposition $A \cdot B$

16. Bestimmen wir geometrisch die Komposition AB zweier Projektivitäten A und B! A und B seien zunächst nicht parabolisch, haben also je zwei getrennte Fixpunkte a, a' bzw. b, b' auf $\mathfrak{G}$. Also ist $a\,A\,B = a\,B$, $a'\,A\,B = a'\,B$ und, weil mit B auch B^{-1} die Fixpunkte b, b' hat, $b(A\,B)^{-1} = b\,A^{-1}$, $b'(A\,B)^{-1} = b'\,A^{-1}$.

Dann schneiden nach *10* die beiden AB und B gemeinsamen Tangentialebenen an die Quadrik Σ diese u.a. in den beiden Erzeugenden $\Gamma_{a \to \mathfrak{G}}$ und $\Gamma_{a' \to \mathfrak{G}}$ und die AB und A gemeinsamen Tangentialebenen (da die Inversion nach *9* nur die Scharen der Erzeugenden von Σ vertauscht) u.a. in den beiden Erzeugenden $\Gamma_{\mathfrak{G} \to b}$ und $\Gamma_{\mathfrak{G} \to b'}$. Alle vier Tangentialebenen gehen durch $A\,B$, das durch drei von ihnen bestimmt ist. Oder:

Die Komposition AB liegt auf den beiden Treffgeraden, die sich aus B an die (durch A bestimmten) Erzeugenden $\Gamma_{a \to \mathfrak{G}}$, $\Gamma_{a' \to \mathfrak{G}}$ und aus A an die (durch B bestimmten) Erzeugenden $\Gamma_{\mathfrak{G} \to b}$, $\Gamma_{\mathfrak{G} \to a'}$ legen lassen.



17. Da durch drei windschiefe Gerade oder aber durch ein windschiefes Vierseit und einen weiteren Punkt ein Hyperboloid festgelegt ist, folgt weiter, dass die beiden Treffgeraden auf einem Hyperboloid Ω liegen, das mit Σ das windschiefe Vierseit

$\Gamma_{a\to\mathfrak{G}}$, $\Gamma_{a'\to\mathfrak{G}}$, $\Gamma_{\mathfrak{G}\to b}$, $\Gamma_{\mathfrak{G}\to b'}$ gemeinsam hat und den Punkt I enthält. Ω ist bereits durch die Fixpunktpaare von A und B bestimmt (vgl. *11*):

A, B und I, AB sind Gegeneckenpaare eines windschiefen Vierseits auf Ω.

18. Sind A oder B oder beide parabolisch, so fallen a, a' oder b, b' oder beide Paare zusammen, dann berührt Ω längs der zusammenfallenden Erzeugenden die Quadrik Σ. Auch dann bilden A, B und I, A B ein windschiefes Vierseit auf Ω, wodurch AB bestimmt ist.

VII. Koordinatenfreie Einführung des Übertragungsprinzips

19. Wir wollen noch überlegen, wie wir die Betrachtungen koordinatenfrei beginnen können.

Im dreidimensionalen projektiven Raum $\mathfrak{P}$ sei $\mathfrak{G} = \Gamma$ eine Gerade, Σ eine ringförmige Quadrik, die Γ nicht als Erzeugende enthält, und Γ', Γ'' zwei sich in S schneidende Erzeugende von Σ, beide windschief zu Γ. Durch die beiden Ebenenbüschel mit den Trägern Γ' und Γ'' projizieren wir die Punkte x von $\mathfrak{G}$ auf Σ. Die Ebenen treffen Σ in den beiden Scharen der Erzeugenden. Jedem gerichteten Punktepaar a', a'' von $\mathfrak{G}$ entspricht dann ein sich schneidendes Erzeugendenpaar und damit eine Tangentialebene von Σ.

Damit ist eine ausnahmslos eineindeutige Zuordnung zwischen den geordneten Punktepaaren a', a'' auf der Geraden $\mathfrak{G}$ und den Tangentialebenen der Quadrik Σ hergestellt.

Das ist eine Verallgemeinerung des Übertragungsprinzips von O. Hesse[3]). Insbesondere entsprechen den Doppelpunkten $a' = a''$ die Tangentialebenen in Punkten eines Kegelschnitts Φ, den die Verbindungsebene Δ von Γ und S aus Σ ausschneidet.

20. Ist weiter Θ ein nicht zerfallender Kegelschnitt auf Σ, so sind die Büschel aus Γ' und Γ'' nach J. Steiner[7]) durch gemeinsame Punkte auf Θ projektiv aufeinander bezogen. Eine solche Projektivität P ist durch drei ihrer Paare bestimmt, sie ist also schon die allgemeinste. Da die Tangentialebenen längs Θ an Σ alle durch den Pol von Θ gehen, folgt:

Durch das Übertragungsprinzip 19 entsprechen den Punktepaaren einer nicht singulären Projektivität auf Γ alle Tangentialebenen an Σ durch einen Punkt, der nicht auf Σ liegt.

21. Ist $\Theta = \Phi$ so ist P die Identität I. Eine projektive Spiegelung an Δ und I führt Σ in sich über, vertauscht aber die beiden Scharen von Erzeugenden, so folgt:

Die projektive Spiegelung an Σ und I führt jede Projektivität in ihre Inverse über. Und damit:

Die Punktepaare von Δ entsprechen den involutorischen Projektivitäten.

Damit ist der Zusammenhang mit den vorherigen Überlegungen hergestellt.

Wolfgang Böhm, TU Braunschweig

[7]) Vgl. W. Blaschke, a.a.O., p. 56.