Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 26 (1971)
Heft: 1

Rubrik: Kleine Mitteilung

Kleine Mitteilung

Zwei Resultate über Trigonalzahlen

Die Gesamtheit der Lösungen (x, y, z) der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ in natürlichen und teilerfremden Zahlen x, y, z mit geradem y und ungeraden x, z ist vollständig bekannt (vgl. etwa [2], S. 41, Theorem 1). Jede derartige Lösung heisse ein primitives pythagoreisches Tripel, kurz p.p.T. Ferner bezeichne $t_h = h\,(h + 1)/2$ für $h = 0, 1, \ldots$ die h-te Trigonalzahl.

KHATRI [1] hat gefunden, dass für alle $k = 0, 1, \ldots$ folgende drei Relationen bestehen:

$$t_{3k} + t_{4k+1} = t_{5k+1};\quad t_{5k+4} + t_{12k+9} = t_{13k+10};\quad t_{15k+9} + t_{8k+4} = t_{17k+10}\,. \tag{0}$$

Dabei ist jedes der (3, 4, 5), (5, 12, 13), (15, 8, 17) ein p.p.T. Man wird vermuten, dass hinter den Identitäten (0) allgemeinere Gesetzmässigkeiten stehen; diese sind präzisiert in

Satz 1. *Zu jedem p.p.T.* (p_1, p_2, p_3) *gibt es genau zwei verschiedene Tripel* (q_{1j}, q_{2j}, q_{3j}) $(j = 1, 2)$ *ganzer Zahlen mit* $0 \leqslant q_{ij} < p_i$ $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2)$ *derart, dass für alle* $k = 0, 1, \ldots$ *gilt*

$$t_{p_1 k + q_{1j}} + t_{p_2 k + q_{2j}} = t_{p_3 k + q_{3j}} \quad (j = 1, 2)\,. \tag{1}$$

Der Beweis dieses Satzes zeigt, dass und wie sich zu vorgegebenem p.p.T. (p_1, p_2, p_3) die beiden Tripel (q_{1j}, q_{2j}, q_{3j}) effektiv berechnen lassen.

SIERPIŃSKI [3] hat die Aufgabe gestellt zu zeigen, dass sich zu jeder natürlichen Zahl m eine Trigonalzahl finden lässt, die sich mindestens auf m Arten als Summe zweier Trigonalzahlen schreiben lässt. Der folgende aus Satz 1 abgeleitete Satz 2 verschärft diese Aussage erheblich.

Satz 2. *Zu jeder natürlichen Zahl m gibt es unendlich viele Trigonalzahlen, die sich auf mindestens m verschiedene Arten als Summe zweier Trigonalzahlen darstellen lassen.*

Beweis von Satz 1. (1) ist gleichbedeutend mit der Forderung

$$(p_1^2 + p_2^2 - p_3^2)\,k^2 + \big((2\,q_1 + 1)\,p_1 + (2\,q_2 + 1)\,p_2 - (2\,q_3 + 1)\,p_3\big)\,k + q_1\,(q_1 + 1) + \\ + q_2\,(q_2 + 1) - q_3\,(q_3 + 1) = 0 \tag{2}$$

für $k = 0, 1, \ldots$; dabei wurde der zweite Index j der q's unterdrückt. Da (p_1, p_2, p_3) ein p.p.T. ist, verschwindet der Koeffizient von k^2 in (2) und (2) zerfällt in die beiden Forderungen

$$p_3\,q_3 - p_1\,q_1 - p_2\,q_2 = (p_1 + p_2 - p_3)/2\,; \tag{3a}$$

$$q_1\,(q_1 + 1) + q_2\,(q_2 + 1) - q_3\,(q_3 + 1) = 0\,. \tag{3b}$$

Berechnen wir q_3 aus (3a) und setzen den entsprechenden Ausdruck in (3b) ein, so erhalten wir nach einigen Umformungen folgende quadratische Gleichung

$$U^2 + (p_2 - p_1)\,U - p_1\,p_2/2 = 0 \ \text{ mit } \ U = p_2\,q_1 - p_1\,q_2\,, \tag{4}$$

die folgende Lösungen hat

$$p_2\,q_{1j} - p_1\,q_{2j} = (p_1 - p_2 + (-1)^j\,p_3)/2 \quad (j = 1, 2)\,. \tag{5}$$

Es sei angemerkt, dass rechts in (3a) und (5) ganze Zahlen stehen. Da (p_1, p_2, p_3) als p.p.T. vorausgesetzt wurde, sind p_1 und p_2 teilerfremd. Bekanntlich kann man daher für $j = 1, 2$ eine Lösung (q_{1j}^0, q_{2j}^0) von (5) aus der regulären Kettenbruchentwicklung der rationalen Zahl $-p_2/p_1$ finden. Alle ganzzahligen Lösungen (q_{1j}, q_{2j}) von (5) ergeben sich dann in der Form $q_{1j} = q_{1j}^0 + t\,p_1$, $q_{2j} = q_{2j}^0 + t\,p_2$, wo t alle ganzen Zahlen durchläuft. Daher kann man für $j = 1, 2$ genau eine Lösung (q_{1j}, q_{2j}) von (5) finden mit $0 \leqslant q_{1j} \leqslant p_1 - 1$. Wir haben noch $0 \leqslant q_{2j} < p_2$ für $j = 1, 2$ zu zeigen: Wegen $p_1 < p_3 < p_1 + p_2$ liefert (5) für $j = 1$

$$0 < p_1\,q_{21} = p_2\,q_{11} + (p_2 + p_3 - p_1)/2 \leqslant p_1\,p_2 + (p_3 - p_1 - p_2)/2 < p_1\,p_2\,,$$

was $0 \leqslant q_{21} < p_2$ impliziert. Für $j = 2$ ergibt (5): $p_1 q_{22} = p_2 q_{12} + (p_2 - p_1 - p_3)/2$. Wegen $q_{12} \geqslant 0$ und $p_3 < p_1 + p_2$ folgt hieraus $p_1 q_{22} > -p_1$, was $q_{22} \geqslant 0$ nach sich zieht. Andererseits erhält man $p_1 q_{22} \leqslant p_1 p_2 - (p_1 + p_2 + p_3)/2 < p_1 p_2$, was wieder $q_{22} < p_2$ liefert. (Man kann übrigens sogar $1 \leqslant q_{2j} \leqslant p_2 - 2$ für $j = 1, 2$ erhalten.)

Jeder ganzzahligen Lösung (q_{1j}, q_{2j}) von (5) entspricht vermöge (3a) genau ein rationales q_{3j}, das nach (3b) auch ganzalgebraisch (vom zweiten Grad) ist. Daher ist q_{3j} ganzrational; wir haben noch $0 \leqslant q_{3j} < p_3$ zu zeigen. Wegen (3a) und $p_1 + p_2 > p_3$ ist sogar $q_{3j} \geqslant 1$; weiter folgt aus (3a) sowie $q_{ij} \leqslant p_i - 1$ für $i = 1, 2$:

$$p_3 q_{3j} \leqslant p_1(p_1 - 1) + p_2(p_2 - 1) + (p_1 + p_2 - p_3)/2 = p_3^2 - (p_1 + p_2 + p_3)/2 < p_3(p_3 - 1),$$

was sogar $q_{3j} \leqslant p_3 - 2$ impliziert. Wegen (5) ist ersichtlich $(q_{11}, q_{21}) \neq (q_{12}, q_{22})$, so dass erst recht $(q_{11}, q_{21}, q_{31}) \neq (q_{12}, q_{22}, q_{32})$ ist, womit Satz 1 vollständig bewiesen ist.

Beispiel. Gehen wir vom p.p.T. (3, 4, 5) aus und nehmen (5) für $j = 1$, so wird aus (5): $4 q_{11} - 3 q_{21} = -3$, was $q_{11} = 0$, $q_{21} = 1$ impliziert. Diese Werte in (3a) eingesetzt liefern $q_{31} = 1$ und wir erhalten aus (1) die erste Identität (0) von Khatri. Analog erhalten wir aus (5) für $j = 2$ die Identität $t_{3k+2} + t_{4k+2} = t_{5k+3}$ für $k = 0, 1, \ldots$.

Beweis von Satz 2. Ist $m = 1$, so liefert jede der Relationen (0) unsere Behauptung. Sei jetzt $m \geqslant 2$. Für alle $n = 1, \ldots, m$ ist $(p_{1,n}, p_{2,n}, p_{3,n}) = (2^{2^n} - 1, 2^{2^{n-1}+1}, 2^{2^n} + 1)$ ein p.p.T. Jedem derartigen Tripel ordnen wir eines der beiden nach Satz 1 existierenden q-Tripel zu, das wir mit $(q_{1,n}, q_{2,n}, q_{3,n})$ bezeichnen, derart, dass gilt

$$t_{p_{1,n} k_n + q_{1,n}} + t_{p_{2,n} k_n + q_{2,n}} = t_{p_{3,n} k_n + q_{3,n}} \tag{6}$$

für alle $k_n = 0, 1, \ldots$; $n = 1, \ldots, m$.

Aus bekannten Eigenschaften der Fermat-Zahlen folgt die Teilerfremdheit von $p_{3,n}$ und $p_{3,n'}$ für $1 \leqslant n, n' \leqslant m$, $n \neq n'$. Daher gibt es nach dem Chinesischen Restsatz genau eine ganze Zahl Q mit $0 \leqslant Q < \prod_{n=1}^{m} p_{3,n}$ $(= P)$ derart, dass simultan die Kongruenzen

$$Q \equiv q_{3,n} \pmod{p_{3,n}} \quad (n = 1, \ldots, m)$$

bestehen. Dies heisst: Es gibt eindeutig bestimmte k_n^0 $(n = 1, \ldots, m)$ mit $0 \leqslant k_n^0 < P/p_{3,n}$ derart, dass gilt

$$Q = p_{3,n} k_n^0 + q_{3,n} \quad (n = 1, \ldots, m). \tag{7}$$

Für jedes $n = 1, \ldots, m$ betrachten wir nur noch die

$$k_n = r\, P/p_{3,n} + k_n^0, \quad r = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

entsprechenden Gleichungen (6) weiter. Setzen wir für $j = 1, 2$ abkürzend

$$p_{j,n} P/p_{3,n} = P_j^{(n)}, \quad p_{j,n} k_n^0 + q_{j,n} = Q_j^{(n)},$$

so behalten wir aus der Menge der Gleichungen (6) mit Rücksicht auf (7) und (8) also nur noch die $r = 0, 1, \ldots$ entsprechenden Gleichungen (9) bei:

$$t_{rP_1^{(n)} + Q_1^{(n)}} + t_{rP_2^{(n)} + Q_2^{(n)}} = t_{rP + Q} \quad (n = 1, \ldots, m). \tag{9}$$

Nun bemerken wir, dass für $j, j' = 1, 2$ gilt: $P_j^{(n)} \neq P_{j'}^{(n')}$ für alle Paare (n, n') mit $1 \leqslant n, n' \leqslant m$ und $n \neq n'$. Sonst wäre nämlich $p_{3,n'} p_{j,n} = p_{3,n} p_{j',n'}$; da $p_{3,n}$ und $p_{3,n'}$ teilerfremd sind, folgt $p_{3,n} \mid p_{j,n}$, was nicht geht. Da ausserdem $P_1^{(n)} \neq P_2^{(n)}$ für $n = 1, \ldots, m$ gilt, sind sämtliche $2m$ Zahlen $P_j^{(n)}$ $(j = 1, 2;\ n = 1, \ldots, m)$ voneinander verschieden.

Schliesslich zeigen wir: Ist $r \geqslant P$, so ist $r P_j^{(n)} + Q_j^{(n)} \neq r P_{j'}^{(n')} + Q_{j'}^{(n')}$ für $j = 1, 2$ und $1 \leqslant n, n' \leqslant m$ mit $n \neq n'$. Sonst könnte man o.B.d.A. $P_j^{(n)} > P_{j'}^{(n')}$ voraussetzen und hätte dann $P \leqslant r(P_j^{(n)} - P_{j'}^{(n')}) = Q_{j'}^{(n')} - Q_j^{(n)}$, was wegen $0 \leqslant Q_j^{(n)}, Q_{j'}^{(n')} < P$ nicht sein kann. Daher lässt sich für jedes ganze r mit $r \geqslant P$ die Trigonalzahl t_{rP+Q} nach (9) auf mindestens m verschiedene Arten als Summe zweier Trigonalzahlen darstellen, was Satz 2 beweist.

PETER BUNDSCHUH, Freiburg i. Br.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] KHATRI, M. N.: *Triangular Numbers and Pythagorean Triangles*, Scripta Math. *21*, 94 (1955).

[2] SIERPIŃSKI, W.: *Elementary Theory of Numbers*, Wroclawska Drukarnia Naukowa (Warszawa 1964).

[3] SIERPIŃSKI, W.: *Aufgabe 617*, El. Math. *25*, 19 (1970).

Aufgaben

Aufgabe 606. Eine notwendige Bedingung für die Existenz von drei linear unabhängigen periodischen Lösungen von

$$x''' - \frac{p'}{p} x'' + (1 + p^2)\, x' - \frac{p'}{p} x = 0\,, \qquad p\,(t + \omega) = p(t)\,, \qquad p(t) \neq 0 \tag{1}$$

ist

$$\int_0^\omega \sqrt{1 + p^2}\, dt > 2\pi\,. \tag{2}$$

H. Guggenheimer, Polytechnic Institute of Brooklyn

Lösung des Aufgabenstellers: Es seien drei linear unabhängige periodische Lösungen von (1) gegeben. Dann sind alle Lösungen von (1) periodisch. Daher gibt es einen periodischen Vektor $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ mit den Anfangsbedingungen $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{e}_1^0$, $\boldsymbol{x}'(0) = \boldsymbol{e}_2^0$, $\boldsymbol{x}''(0) = -\boldsymbol{e}_1^0 + p(0)\, \boldsymbol{e}_3^0$; $\boldsymbol{e}_i^0 \cdot \boldsymbol{e}_j^0 = \delta_{ij}$. Die Anfangsbedingungen bestimmen $\boldsymbol{x}(t)$ eindeutig.

Man integriere das System

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & p \\ 0 & -p & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_i(0) = \boldsymbol{e}_i^0\,. \tag{3}$$

Die (vollständig stetige) Lösung ist sogar für integrables, also sicher für differenzierbares p eindeutig. Durch Elimination folgt, dass $\boldsymbol{e}_1(t)$ die Gleichung (1) erfüllt. Daher $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1$.

Da die Matrix in (3) schiefsymmetrisch ist, folgt $\boldsymbol{e}_i(t) \cdot \boldsymbol{e}_j(t) = \delta_{ij}$ wegen $(d/dt)(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) = 0$. Also ist $\|\boldsymbol{e}_1(t)\| = 1$, und $\boldsymbol{e}_1(t)$ beschreibt eine sphärische Kurve der Krümmung $\|\boldsymbol{e}_1''\| = \sqrt{1 + p^2}$.

Nach Fenchels Theorem folgt (2); das Gleichheitszeichen stünde für ebene Kurven, die hier ausgeschlossen sind.