Zur lokalen Approximation einer Raumkurve

Autor(en): **Schröder, Eberhard**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **25 (1970)**

Heft 6

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-27361

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

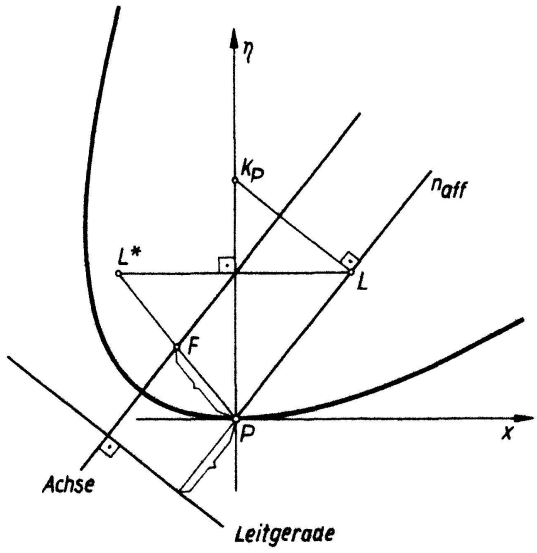
Zur lokalen Approximation einer Raumkurve

Zur lokalen Approximation einer Raumkurve c in einem Kurvenpunkt P werde von der kanonischen Entwicklung der Kurve bezüglich P unter Einbeziehung sämtlicher Glieder bis zur dritten Ordnung ausgegangen.

$$\left.\begin{aligned} x(s) &= s \qquad - \frac{s^3}{6}\varkappa^2 + \cdots \\ y(s) &= \frac{s^2}{2}\varkappa + \frac{s^3}{6}\varkappa' + \cdots \\ z(s) &= \qquad\quad \frac{s^3}{6}\varkappa\tau + \cdots . \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Hierbei ist das Achsenkreuz in der Weise festgelegt, dass die x-Achse mit der Tangente t, die y-Achse mit der Hauptnormalen und die z-Achse mit der Binormalen von c in P zusammenfällt. Bei den in Lehrbüchern üblichen Darstellungen werden nun die Normalprojektionen von c in die Schmieg-, Normal- und Streckebene bei unvollständiger Auswertung der Reihenentwicklung (1) durch eine Parabel, eine semikubische Parabel bzw. eine kubische Parabel approximiert. Legt man durch je zwei Näherungskurven Zylinderflächen lotrecht zu den Bezugsebenen, so entstehen als Schnittgebilde Raumkurven, die die Ausgangskurve c in P von zweiter Ordnung annähern.

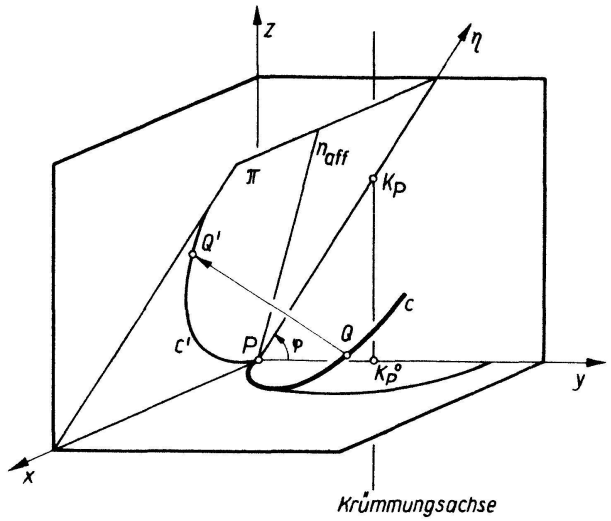
Im folgenden soll die Raumkurve c auf jede Ebene eines Büschels mit der Tangente t in P als Büschelträger normal projiziert werden. Von diesen Normalprojektionen c' werden Krümmungsmittelpunkt und Affinnormale berechnet. Diese ermöglichen es, an jede Projektion c' die von dritter Ordnung berührende Parabel zu legen. Wählt man zwei beliebige Schmiegparabeln aus und errichtet in den zugehörigen Bildebenen die darauf normalstehenden parabolischen Zylinder, so stellt die Schnittkurve eine Näherung von dritter Ordnung an c in P dar.



Figur 1
Konstruktion einer Parabel durch P bei Vorgabe von Krümmungsmittelpunkt und Affinnormale.

Ist φ der Drehwinkel der Bildebene π gegen die Schmiegebene, so lautet die Gleichung der Bildebene

$$y \sin\varphi - z \cos\varphi = 0 . \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi \leqq \frac{\pi}{2}\right). \tag{2}$$



Figur 2
Abbildung der Raumkurve c auf eine Ebene π des Büschels.

Legt man den Ursprung der Bildebene nach P, behält die Kurventangente t als x-Achse bei und errichtet senkrecht darauf im Sinne eines Rechtssystems die η-Achse, so lauten die Abbildungsgleichungen bei Normalprojektion eines Punktes $Q(x, y, z)$ nach $Q'(x, \eta)$ in π:

$$x = x , \qquad \eta = y \cos\varphi + z \sin\varphi . \tag{3}$$

Mit (1) ergibt sich für die Normalprojektion der Raumkurve c auf die Bildebene π folgende Parameterdarstellung:

$$\left.\begin{aligned} x(s) &= s - \frac{s^3}{6}\varkappa^2 + \cdots \\ \eta(s) &= \frac{s^2}{2}\varkappa \cos\varphi + \frac{s^3}{6}(\varkappa' \cos\varphi + \varkappa\tau \sin\varphi) + \cdots . \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Für die Krümmung der Kurvenprojektion c' in P findet man

$$\bar{\varkappa} = \varkappa \cos\varphi . \tag{5}$$

Die Krümmungsmittelpunkte der ebenen Bildkurven c' liegen also auf der Krümmungsachse von c bezüglich P.

Der Anstieg m_a der Affinnormalen errechnet sich nach der Formel

$$m_a = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{\eta} & 0 \\ \ddot{x} & \ddot{\eta} & \dot{\eta} \\ \dddot{x} & \dddot{\eta} & 3\ddot{\eta} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{\eta} & 0 \\ \ddot{x} & \ddot{\eta} & \dot{x} \\ \dddot{x} & \dddot{\eta} & 3\ddot{x} \end{vmatrix} . \tag{6}$$

Diese liefert bei Anwendung auf (4) die Gleichung der Affinnormalen für die ebenen Bildkurven von c:

$$\eta = -\frac{3\varkappa^2 \cos^2\varphi}{\varkappa' \cos\varphi + \varkappa\tau \sin\varphi}\, x . \tag{7}$$

In Verbindung mit Gleichung (2) und (3) ergibt sich daraus als Parameterdarstellung für den Affinnormalenkegel durch P:

$$\left.\begin{aligned} x &= \mu\,(\varkappa' \cos\varphi + \varkappa\,\tau \sin\varphi)\,, \\ y &= -3\,\mu\,\varkappa^2 \cos^3\varphi\,, \\ z &= -3\,\mu\,\varkappa^2 \sin\varphi \cos^2\varphi \quad \text{mit} \quad -\infty < \mu < +\infty\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Diese Darstellung zeigt, dass es sich bei dem Affinnormalenkegel um einen rationalen Kegel dritter Ordnung handelt. Der Übergang zur impliziten Form führt auf die Gleichung

$$3\,\varkappa^2\,x\,y^2 + (\varkappa'\,y + \varkappa\,\tau\,z)\,(y^2 + z^2) = 0\,. \tag{9}$$

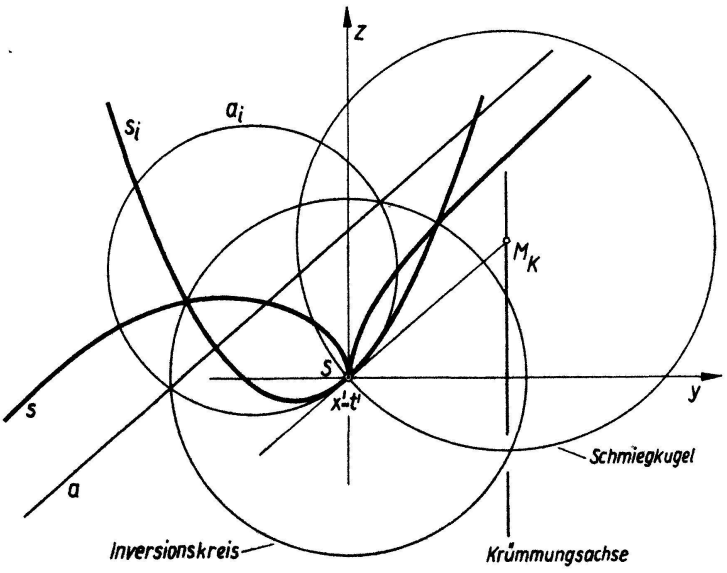
In einer zur Normalebene parallelen Ebene erzeugt dieser Kegel als Spurkurve eine monozirkulare rationale Kurve 3. Ordnung und 3. Klasse mit einer Spitze im Spurpunkt S der Kurventangente t. Setzt man in Gleichung (9) $x = 1$, resultiert für die zugehörige Spurkurve s des Kegels die Gleichung

$$(y^2 + z^2)\,(\varkappa'\,y + \varkappa\,\tau\,z) + 3\,\varkappa^2\,y^2 = 0\,. \tag{10}$$

Die Spitzentangente von s in S ist parallel zur Binormalen und ihre Asymptote parallel zum Berührradius der Schmiegkugel an die Raumkurve in P. Die Asymptotengleichung lautet

$$z = -\frac{\varkappa'}{\varkappa\,\tau}\,y - \frac{3\,\varkappa^3\,\tau}{\varkappa^2\,\tau^2 + \varkappa'^2} \tag{11}$$

Genau für jene Ebene des Bildebenenbüschels, die den Mittelpunkt der Schmiegkugel enthält, ist P Scheitelpunkt der zugehörigen Kurvenprojektion. Die Trägergerade des Büschels – also die Tangente von c in P – ist Rückkehrkante des Affinnormalenkegels. Die Streckebene ist Berührebene des Kegels längs dieser Erzeugenden.



Figur 3
Spurkurve s des Affinnormalenkegels und invertierte Kurve s_i in einer zur Normalebene parallelen Ebene.

Für den Fall einer Schraublinie ist die Spurkurve s symmetrisch zur Spitzentangente und die Asymptote eine Wendeasymptote. Einer Umkehr des Vorzeichens der Windung entspricht eine Spiegelung des Affinnormalenkegels an der Schmiegebene.

Für den Fall eines Henkelpunktes ($\tau = 0$) zerfällt der Kegel 3. Ordnung in eine Ebene, die Streckebene, und einen orthogonalen Kreiskegel mit der Tangente t von c in P als orthogonale Erzeugende. Streckebene und orthogonaler Kreiskegel berühren sich in dieser Erzeugenden.

Invertiert man die Spurkurve s des Affinnormalenkegels an dem in der gleichen Ebene liegenden Einheitskreis um S, so geht die durch Gleichung (10) beschriebene Kubik unter Abspaltung linearer Bestandteile in eine Parabel s_i über, deren Gleichung lautet:

$$(\varkappa' y + \varkappa \tau z) + 3 \varkappa^2 y^2 = 0 . \tag{12}$$

Die Achse dieser Parabel ist parallel zur Binormalen, die Parabeltangente in S parallel zum Berührradius der Schmiegkugel an P und der Krümmungskreis a_i der Parabel in S stellt das Bild der Asymptote a an die Kubik bei dieser Transformation dar. Damit ist eine konstruktive Bestimmung der Affinnormalen für jede Bildkurve c' aus $\varkappa$, $\varkappa'$, τ und φ mit klassischen Hilfsmitteln gesichert. Nur für den Fall der Streckebene als Bildebene zerfällt die Schmiegparabel, und die Affinnormale fällt in die Tangente t.

Aus (5) und (6) folgt für die in π liegende Schmiegparabel an c':

$$\{3 x \varkappa^2 \cos^2\varphi + (\varkappa' \cos\varphi + \varkappa \tau \sin\varphi) \eta\}^2 - 18 \eta \varkappa^3 \cos^3\varphi = 0 . \tag{13}$$

Die der Schmiegebene zuzuordnende Näherungsparabel hat daher die Gleichung

$$(3 \varkappa^2 x + \varkappa' y)^2 - 18 \varkappa^3 y = 0 . \tag{14}$$

Für jene Bildebene, welche die Schmiegkugel nach einem Grosskreis schneidet, lautet die Gleichung der Schmiegparabel

$$\varkappa^2 \tau x^2 - 2 \eta \sqrt{\varkappa'^2 + \varkappa^2 \tau^2} = 0 . \tag{15}$$

Errichtet man durch diese beiden konstruktiv leicht erfassbaren Parabeln Zylinder lotrecht zu deren Bezugsebenen, so approximiert die entstehende Schnittkurve die Raumkurve c in P von dritter Ordnung. Für Kurvenpunkte, bei denen die Schmiegebene die Schmiegkugel nach einem Grosskreis schneidet ($\varkappa' = 0$), liefert bereits die zugehörige Schraublinie eine adäquate Näherung.

EBERHARD SCHRÖDER, TU Dresden

LITERATURVERZEICHNIS

[1] K. STRUBECKER, *Differentialgeometrie I, Kurventheorie der Ebene und des Raumes* (Walter de Gruyter, Berlin 1964).