

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 25 (1970)  
**Heft:** 5

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Diese letzte Tatsache legt die Frage nahe, ob es sogar eine Funktion  $f \in \mathcal{F}[a, b]$  gibt, für die  $\mathcal{H}[f]$  dicht ist in  $[a, b]$ . Bislang konnte ich jedoch dieses Problem nicht entscheiden.

Es mag noch eine Verallgemeinerung des beschriebenen Rekursionsverfahrens zur Gewinnung der  $F_k$  angegeben werden.

Dazu gehe man von einer streng monoton gegen Null konvergierenden Zahlenfolge  $a_l$  mit  $a_1 = 1$  aus und definiere ausgehend von  $F_0 = F$

$$F_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{l} F_{k-1} \left( \frac{x - a_{l+1}}{a_l - a_{l+1}} \right) & \text{für } a_{l+1} \leq x \leq a_l \text{ und } l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Die so gegebenen  $\mathcal{H}[F_k]$  besitzen ganz analoge Eigenschaften wie im behandelten Fall  $a_l = 1/l$ . Ausserdem wächst  $\mathcal{H}[F_k]$  für  $k \rightarrow \infty$  «um so stärker» an, «je langsamer»  $a_l$  gegen Null konvergiert.

FRANÇOIS FRICKER, Basel

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] GELBAUM-OLMSTED, Counterexamples in Analysis (Holden-Day Inc., San Francisco 1964).

## Kleine Mitteilungen

### A New Condition for Consecutive Primitive Roots of a Prime

In [1] we have shown that if  $p > 3$  is a prime such that  $\varphi(p-1)/(p-1) > 1/3$  then there is at least one pair of consecutive primitive roots modulo  $p$ . In this note we shall give a new condition that there be consecutive primitive roots for primes of the form  $4n+1$ .

**Theorem 1.** If the prime  $p = 4n+1$  has 2 as a primitive root then there is at least one pair of consecutive primitive roots modulo  $p$ .

*Proof.* If  $g$  is a primitive root of a prime  $p$ , then the congruence  $gx \equiv 1 \pmod{p}$  has  $x \equiv g^{p-2}$  for its unique solution; since  $(p-2, p-1) = 1$ ,  $x$  is also a primitive root of  $p$ . If  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , it is well known that if  $g$  is a primitive root of  $p$ , then so is  $-g$ .

Let  $p = 4n+1$  be a prime and 2 a primitive root of  $p$ . Then  $-2$  is also a primitive root and the congruence  $(-2)g \equiv 1 \pmod{p}$ , has a primitive root  $g$  for its solution. It follows then that  $2(g+1) \equiv 1 \pmod{p}$ , so that  $g+1$  is also a primitive root of  $p$ .

The following theorem may also be of interest here.

**Theorem 2.** If the prime  $p = 4n+1$  has exactly one pair of consecutive primitive roots, then 2 is a primitive root of  $p$ .

*Proof.* Let  $0 < g < g+1 < p$  be consecutive primitive roots of  $p$ . Then  $0 < p-(g+1) < p-g < p$  are also consecutive primitive roots of  $p$ . Since there is exactly one pair of consecutive primitive roots of  $p$ , we obtain  $p-(g+1) = g$ , or  $(-2)g \equiv 1 \pmod{p}$ . Thus  $-2$ , and hence 2, is a primitive root of  $p$ .

EMANUEL VEGH, U.S. Naval Research Laboratory, Washington, D.C.

#### REFERENCE

- [1] E. VEGH, *Pairs of Consecutive Primitive Roots Modulo a Prime*, Proc. Am. Math. Soc. 79, 1169-1170 (1968).

### A property of the Unitary Analogue of Ramanujan's Sum

A divisor  $d > 0$  of the positive integer  $n$  is called unitary if  $d\delta = n$  and  $(d, \delta) = 1$ . We write  $d \parallel n$ . For integers  $a, b, b > 0$ , let  $(a, b)_*$  denote the greatest divisor of  $a$  which is a unitary divisor of  $b$ . ECKFORD COHEN ([1], § 2) defined the unitary analogue  $c^*(m, n)$  of Ramanujan's Sum as

$$c^*(m, n) = \sum_{\substack{1 \leq x \leq n \\ (x, n)_* = 1}} e(m x, n), \quad (1)$$

where  $e(m, n) = \exp(2 \pi i m/n)$ , and established that

$$c^*(m, n) \text{ is multiplicative as a function of } n, \quad (2)$$

$$\varphi^*(n) \equiv c^*(0, n) = \sum_{d \parallel n} d \mu^*(n/d), \quad (3)$$

$$\mu^*(n) \equiv c^*(1, n) = (-1)^r, \quad (4)$$

where  $r$  is the number of distinct prime factors of  $n$ .

Further, he established the following evaluation of  $c^*(m, n)$ :

$$c^*(m, n) = \sum_{\substack{d \mid m \\ d \parallel n}} d \mu^*(n/d). \quad (5)$$

In this note, we establish the following:

**Theorem.**  $c^*(m, n) = \frac{\varphi^*(n) \mu^*(n/a)}{\varphi^*(n/a)}$ , where  $a = (m, n)_*$ .

*Proof.* Since  $a$  is the greatest divisor of  $m$  which is a unitary divisor of  $n$ , we can write  $n = a N$ , where  $(a, N) = 1$ . By (5), we have

$$c^*(m, n) = \sum_{d \parallel a} d \mu^*(n/d) = \sum_{\substack{cd = a \\ (c, d) = 1}} d \mu^*(a N/d) = \sum_{\substack{cd = a \\ (c, d) = 1}} d \mu^*(c N).$$

Now,  $(a, N) = 1$  and  $cd = a$  imply that  $(c, N) = 1$ ; so that by (2), (3) and (4),

$$c^*(m, n) = \sum_{\substack{cd = a \\ (c, d) = 1}} d \mu^*(c) \mu^*(N) = \mu^*(N) \sum_{d \parallel a} d \mu^*(a/d) = \mu^*(N) \varphi^*(a).$$

Since  $n = a N$  and  $(a, N) = 1$ ,  $\varphi^*(n) = \varphi^*(a) \varphi^*(N)$ , so that

$$c^*(m, n) = \frac{\varphi^*(n) \mu^*(N)}{\varphi^*(N)} = \frac{\varphi^*(n) \mu^*(n/a)}{\varphi^*(n/a)}.$$

Hence the theorem follows.

D. SURYANARAYANA, Andhra Univ. Waltair, India

#### REFERENCE

- [1] E. COHEN, *Arithmetical Functions Associated with the Unitary Divisors of an Integer*, Math. Zeit. 74, 66–80 (1960).

## Aufgaben

**Aufgabe 607.** Sind  $X$  und  $Y$  Teilmengen einer Menge  $M$ , so definieren wir  $X + Y$  durch  $X + Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$ , d.h.  $X + Y$  besteht aus all den Elementen von  $M$ , die in  $X$  oder  $Y$ , jedoch nicht im Durchschnitt von  $X$  und  $Y$  liegen. Es sei nun  $M$  eine endliche Menge mit  $|M| = n$  Elementen. Ferner sei  $k$  eine gerade ganze Zahl mit  $2 < k \leq n - 1$ . Zeige: Es gibt  $n - 1$  Teilmengen  $B_1, \dots, B_{n-1}$  von  $M$  mit den Eigen-