Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 25 (1970)
Heft: 4

Rubrik: Aufgaben

Aufgaben

Aufgabe 602. Es sei p eine Primzahl, $R = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, $n \in R \setminus \{0\}$, $a \in R$, $x_i \in R$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

$$M_{a,n} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

sei die Menge der n-Tupel, die den Bedingungen

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \equiv a \pmod{p}, \qquad 0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n \leqq p - n$$

genügen. Man zeige

$$|M_{a,n}| = \frac{1}{p}\binom{p}{n}.$$

E. Trost, Zürich

Lösung: Es sei $M_n := M_{0,n} \cup M_{1,n} \cup \cdots \cup M_{p-1,n}$. Es ist klar, dass $M_{a,n} \cap M_{b,n} = \emptyset$ $(a \neq b)$ und $|M_n| = \binom{p-n+1+n-1}{n} = \binom{p}{n}$. Es seien weiterhin $N_{a,n} := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in R$ $(i = 1, \dots, n)$, $x_1 < \cdots < x_n$, $x_1 + \cdots + x_n \equiv a \pmod{p}\}$ und $N_n := N_{0,n} \cup N_{1,n} \cup \cdots \cup N_{p-1,n}$. Man sieht leicht, dass die Abbildung von M_n in N_n, die $(x_1, \dots, x_n)$ in $(x_1, x_2 + 1, \dots, x_n + n - 1)$ überführt, bijektiv ist und die Elemente von $M_{a,n}$ in diejenigen von $N_{b,n}$ überführt, wobei $b \equiv a + n(n-1)/2 \pmod{p}$ gilt. Es genügt also zu zeigen, dass

$$|N_{0,n}| = |N_{1,n}| = \dots = |N_{p-1,n}|. \tag{*}$$

Im folgenden werden zwei n-Tupel aus N_n, welche durch Permutation der Komponenten auseinander hervorgehen, als gleich betrachtet. Die Abbildung, welche jedem n-Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in N_{0,n}$ das n-Tupel $(x_1 + 1, \dots, x_n + 1)$ mit mod p reduzierten Komponenten zuordnet, ist eine Bijektion von $N_{0,n}$ auf $N_{n,n}$. Daraus folgt $|N_{0,n}| = |N_{n,n}|$.

Es seien nun $a, b \in R$ mit $ab \neq 0$. Dann gibt es ein $c \in R$ mit der Eigenschaft $ca \equiv b \pmod{p}$. Die Abbildung, welche dem n-Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in N_{a,n}$ das n-Tupel $(y_1, \dots, y_n) \in N_{b,n}$ mit $y_i \equiv c\,x_i \pmod{p}$ zuordnet, ist eine Bijektion von $N_{a,n}$ auf $N_{b,n}$. Somit ist $|N_{a,n}| = |N_{b,n}|$, womit (*) wegen $n \neq 0$ sichergestellt ist.

J. Fehér, Pécs

Eine weitere Lösung sandte L. Carlitz (Duke University, USA).

Aufgabe 603. Man zeige, dass die Anzahl der echten Teilerketten

$$1 \mid d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_{r-1} \mid d_r = a$$

der Länge r der natürlichen Zahl $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i}$ ($p_1, p_2, \dots, p_k$ verschiedene Primzahlen) gleich

$$\sum_{j=0}^{r} \left\{(-1)^j \binom{r}{j} \prod_{i=1}^{k} \binom{n_i + r - j - 1}{n_i}\right\}$$

ist.

H. Scheid, Mainz

Solution: Let $N_r(a)$ denote the number of *proper* divisor sets

$$1 \mid d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_{r-1} \mid d_r = a$$

and let $M_r(a)$ denote the *total* number of such divisor sets. Put

$$a = \sum_{j=1}^{k} p_j^{n_j}, \qquad d_i = \sum_{j=1}^{k} p_j^{n_{ij}}.$$

Then clearly $M_r(a)$ is the number of $r \times k$ arrays

$$\boxed{\begin{array}{l} n_{11}\, n_{12} \dots n_{1k} \\ n_{21}\, n_{22} \dots n_{2k} \\ \dots\dots\dots \\ n_{r1}\, n_{r2} \dots n_{rk} \end{array}}$$

such that

$$0 \leqslant n_{1j} \leqslant n_{2j} \leqslant \cdots \leqslant n_{rj} = n_j \qquad (j = 1, \dots, k)\,,$$

while $N_r(a)$ is the number of such arrays with *distinct* rows.

For fixed n, the number of solutions in integers of

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_r = n\,,$$

is equal to $\binom{n+r-1}{n}$, so that

$$M_r(a) = \prod_{j=1}^{k} \binom{n_j + r - 1}{n_j}\,. \tag{*}$$

Also it is evident that

$$M_r(a) = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} N_s(a)\,,$$

so that

$$N_r(a) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} M_s(a)\,. \tag{**}$$

Combining (*) and (**), we get the desired result. L. CARLITZ, Duke University, USA

Eine weitere Lösung sandte J. FEHÉR (Pécs, Ungarn).

Aufgabe 604. Es sei $0 \leqq p \leqq 1$. Man zeige

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{1}{k + p - k\,p} = \frac{1}{p}\,.$$

H. BRÄNDLI, Zürich

Lösung: Wir setzen $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{1}{k + p - k\,p}$. Dann ist

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{k+p-k\,p} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] \frac{1}{k+p-k\,p}$$

$$= s_n + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{1 + (1-p)\,k} = s_n + \int_0^1 (1 - x^{1-p})^n\, dx\,.$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

$$1.\quad p = 1 \Rightarrow \Delta s_n = 0 \Rightarrow s_n = s_1 = 1 \text{ für alle } n.$$

$$2.\quad p = 0 \Rightarrow \Delta s_n = \int_0^1 (1-x)^n\, dx = \frac{1}{n+1} \Rightarrow s_n = 1 + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu+1}\,,$$

also $s_n \to \infty$ für $n \to \infty$.

$$3.\quad 0 < p < 1 \Rightarrow s_n = 1 + \int\limits_0^1 \sum_{\nu=1}^{n-1} (1 - x^{1-p})^\nu \, dx$$

$$= 1 + \int\limits_0^1 x^{p-1} (1 - x^{1-p}) \, dx - \int\limits_0^1 x^{p-1} (1 - x^{1-p})^n \, dx.$$

Mit der Substitution $x = z^{1/(1-p)}$ gehen die Integrale in Beta-Integrale über und wir erhalten durch Zusammenfassen

$$s_n = \frac{1}{p} - \frac{1}{1-p} \; \frac{\Gamma\left(\frac{p}{1-p}\right) \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{p}{1-p} + n + 1\right)}.$$

Eine leichte Anwendung der Stirlingschen Formel zeigt, dass

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{p}{1-p} + n + 1\right)} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Damit ist die Behauptung für alle $0 \leqslant p \leqslant 1$ bewiesen. Für $p = 0$ besteht sie im uneigentlichen Sinne.

G. Bach, Braunschweig

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht ZH), P. Bundschuh (Freiburg i. Br.), L. Carlitz (Durham, N.C., USA), J. Fehér (Pécs, Ungarn), O. Reutter (Ochsenhausen).

Aufgabe 605. Man beweise

$$\underset{\text{Kummer}}{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ 1 & 11 & 11 & 1 & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}} \underset{\text{Pascal}}{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}} = \underset{\text{Fakultät} \cdot \text{Stirling II}}{\begin{pmatrix} 1!1 & & & \\ 2!1 & 1!1 & & \\ 3!1 & 2!3 & 1!1 & \\ 4!1 & 3!6 & 2!7 & 1!1 \\ . & . & . & . \end{pmatrix}}.$$

Vgl. Aufgabe 41 (El. Math. *3*, 83 (1948)).

I. Paasche, München

Lösung: Wir nennen die erste Matrix (Kummer) $A = (a_{ik})$, die zweite (Pascal) $B = (b_{ik})$ und ihr Produkt $C = (c_{ik})$, $i, k = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Da die c'_{ik} (Fakultät · Stirling II) durch die Differenzengleichung

$$c'_{ik} = (i - k + 1)\,(c'_{i-1,k-1} + c'_{i-1,k}) \tag{1}$$

mit den Randbedingungen $c'_{11} = 1$, $c'_{ik} = 0$ für $i < k$ und für $k \leqslant 0$ eindeutig bestimmt sind, genügt es nachzuweisen, dass die Elemente c_{ik} der Produktmatrix $A \cdot B$ der Differenzengleichung (1) genügen. Dazu beachten wir, dass nach Definition der entsprechenden Matrizen gilt:

$$a_{ik} = k \cdot a_{i-1,k} + (i - k + 1)\, a_{i-1,k-1}, \tag{2}$$

$$b_{jk} = \binom{j-1}{k-1}, \tag{3}$$

also auch

$$b_{jk} = b_{j-1,k} + b_{j-1,k-1} \tag{4}$$

und

$$j \cdot b_{j,k} = k \cdot b_{j+1,k+1}. \tag{5}$$

Damit erhalten wir

$$c_{ik} = \sum_{j=k}^{i} a_{ij}\, b_{jk} = \sum_{j=k}^{i} [j\, a_{i-1,j} + (i - j + 1)\, a_{i-1,j-1}]\, b_{jk}$$

$$= \sum_{j=k}^{i} (i + 1)\, a_{i-1,j-1}\, b_{jk} + \sum_{j=k}^{i} (a_{i-1,j} - a_{i-1,j-1})\, j\, b_{jk}$$

$$= (i + 1) \sum_{j=k}^{i} a_{i-1,j-1}\, (b_{j-1,k} + b_{j-1,k-1}) + k \sum_{j=k}^{i} (a_{i-1,j} - a_{i-1,j-1})\, b_{j+1,k+1}$$

$$= (i + 1)\, (c_{i-1,k} + c_{i-1,k-1}) + k \sum_{j=k}^{i} (b_{j,k+1} + b_{j,k})\, a_{i-1,j}$$

$$- k \sum_{j=k}^{i} a_{i-1,j-1}\, (b_{j-1,k+1} + b_{j-1,k} + b_{j-1,k} + b_{j-1,k-1})$$

(durch wiederholte Anwendung von (4)). Ersetzen wir noch $j - 1$ durch einen neuen Summationsindex in den entsprechenden Summen und beachten (3), so resultiert

$$c_{ik} = (i - k + 1)\, (c_{i-1,k} + c_{i-1,k-1})\,,$$

womit alles gezeigt ist. G. Bach, Braunschweig

Eine weitere Lösung sandte L. Carlitz (Duke University, USA). Vom Aufgabensteller liegen drei Lösungen vor.

Anmerkung der Redaktion: Die von L. Carlitz verwendete Lösungsmethode steht im Zusammenhang mit seiner Arbeit «Eulerian Numbers and Polynomials», Mathematics Magazine *33*, 247–260 (1959).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis 10. März 1971, wenn möglich in Maschinenschrift.

Aufgabe 626. Es seien ABC ein Dreieck mit den Seitenlängen $a \geqslant b \geqslant c$ (die Seite der Länge a liege dem Eckpunkt A gegenüber usw.) und A', B', C' bzw. A'', B'', C'' die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden durch A, B, C mit den Gegenseiten bzw. mit der Umkreislinie von ABC. Man beweise: 1) $A'A'' \geqslant B'B'' \geqslant C'C''$; Gleichheit genau dann, wenn die entsprechenden Seitenlängen gleich sind. 2) $BB'' \leqslant AA''$, $BB'' \leqslant CC''$; Gleichheit genau dann, wenn die entsprechenden Seitenlängen gleich sind. 3) Beide Beziehungen $AA'' < CC''$, $CC'' < AA''$ kommen vor. P. Erdös, Budapest

Aufgabe 627. Für natürliche Zahlen n seien $S(n, 0) = n!$ und

$$S(n, k) = \frac{1}{k} \sum_{s=0}^{k-1} \left[(-1)^{k-s+1}\, S(n, s) \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^{k-s}} \right] \qquad (k > 0)\,.$$

Man beweise:

1) $S(n, k) = \sum\limits_{1 \leqslant r_1 < \cdots < r_k \leqslant n} \dfrac{n!}{r_1 \cdot \ldots \cdot r_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, und als Anwendung davon

2) $S(p - 1, k) \equiv 0 \pmod{p}$ $(1 \leqslant k < p - 1$, p ungerade Primzahl) (Satz von Lagrange; vgl. G. H. Hardy–E. M. Wright, Einführung in die Zahlentheorie, München 1958, pp. 96–98) sowie 3) den Satz von Wilson. J. Fehér, Pécs, Ungarn

Aufgabe 628. Es seien n und r natürliche Zahlen. Man zeige, dass die Zahl $(2r)!\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{n+r}$ durch $n(n+r)!$ teilbar ist.

D. SVRTAN, Zagreb

Aufgabe 629. $M = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ sei eine beschränkte reelle Zahlenfolge mit verschiedenen Elementen, und es bedeute $a = \underline{\text{fin}}_{x_i \in M}\, x_i$, $b = \overline{\text{fin}}_{x_i \in M}\, x_i$, r_n die kleinste nicht-negative Zahl der Menge $\{x_n - a, x_n - x_1, x_n - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ und s_n die kleinste nicht-negative Zahl der Menge $\{b - x_n, x_1 - x_n, x_2 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n\}$.

Man beweise: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n s_n$ ist konvergent und ihre Summe ist höchstens gleich $\frac{1}{2}(b-a)^2$, und Gleichheit besteht dann und nur dann, wenn M in sich dicht ist.

O. REUTTER, Ochsenhausen

Problem 629A. Für ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c und dem Flächeninhalt F gilt $F \leqslant (\sqrt{3}/4)(abc)^{2/3}$. Wir vermuten, dass allgemein für das Hypervolumen V eines n-dimensionalen Simplexes $A_1 A_2 \dots A_{n+1} \subset R^n$ gilt $V \leqslant (1/n!)\sqrt{(n+1)/2^n}\,\left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} a_{ij}\right)^{2/(n+1)}$, wobei a_{ij} die Länge der die Eckpunkte A_i, A_j verbindenden Kante ist.

D. VELJAN, Zagreb

Der Verfasser kennt keinen Beweis dieser Vermutung.

Literaturüberschau

Mathematischer Unterricht an den deutschen Universitäten und Schulen. Berichte von Studientagungen für belgische und luxemburgische Mathematiklehrer in Münster. Herausgegeben von H. BEHNKE und H. G. STEINER. 335 Seiten mit 70 Figuren. Verlag Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1967.

Im Auftrage des Auswärtigen Amtes der Bundesrepublik und des Kultusministeriums des Landes Nordrhein-Westfalen organisiert das Seminar für Didaktik der Mathematik der Universität Münster seit einigen Jahren regelmässig Fortbildungskurse für Mathematiklehrer aus Belgien und Luxemburg. Es ist erfreulich, dass aus der Reihe der rund 50 Vorträge an den Tagungen von 1963 bis 1966 die markantesten im Druck erschienen und damit einem grösseren Kreise von Interessenten zugänglich gemacht worden sind. Es kommen darin durchwegs Autoren zum Zug, die auf dem Felde der Didaktik etwas zu sagen haben. Bei der Auswahl der Themen haben die Herausgeber die aktuelle Note besonders betont und vorwiegend solche Beiträge aufgenommen, die sich im Hinblick auf die aktuellen Reformbestrebungen anbieten: Die Grundvorlesungen über Infinitesimalrechnung und analytische Geometrie an der Universität (H. TIETZ und H. G. STEINER); Zur Ausbildung der Mathematiker in Logik und Grundlagenfragen (H. HERMES); Die Stellung der geometrischen Grundlagenforschung (G. PICKERT); Angewandte Mathematik auf der Hochschule (H. WERNER); Zur Axiomatik der Mengenlehre (H. HERMES); Gleichungslehre (J. LAUTER); Abbildungsgeometrie im Unterricht (H. GRIESEL und H. VENNEKOHL); Filter im Analysisunterricht (J. DZEWAS); Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitstheorie (A. ENGEL); Kurven 2. Ordnung (H. ATHEN); Elementare Gruppentheorie (A. KIRSCH); Einführung der ganzen und der rationalen Zahlen (H. FREUND); Algebra im Unterricht (H. G. STEINER).

Zum äusserst lobenswerten Unternehmen, wie es sich in dieser Publikation darbietet, erlaubt sich der Rezensent zwei Vorbehalte. Ein erster gilt dem Titel, unter dem die 17 Vorträge erschienen sind. Für den Bereich der Universität mag er zutreffen; wer aber