Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 25 (1970)

Heft: 4

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Added in proof: Shortly after this paper was submitted, the author found the problem of characterizing the best triangular covers for closed curves of unit length (solved in theorems 2 and 5) posed in H. T. CROFT's mimeographed 1969 'Addenda' to his well-known 1967 'Research Problems'.

J. E. WETZEL, University of Illinois, Urbana, Illinois, USA

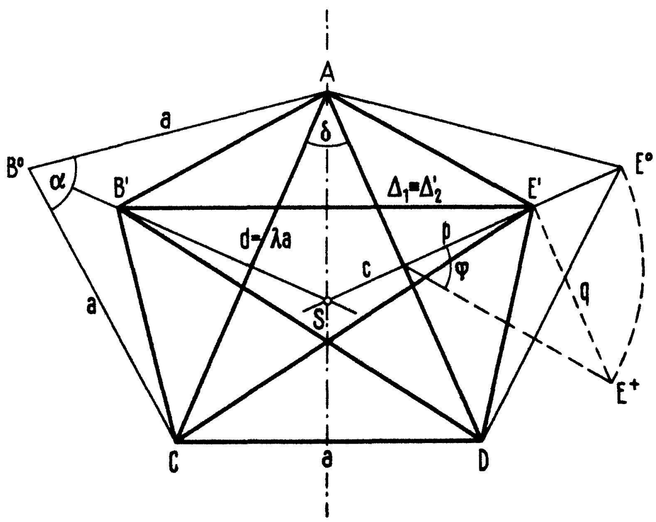
REFERENCES

[1] H. S. M. COXETER, *Introduction to Geometry* (Wiley, New York 1961).
[2] H. G. EGGLESTON, *Problems in Euclidean Space: Applications of Convexity* (Pergamon, New York 1957).
[3] H. W. GUGGENHEIMER, *Plane Geometry and Its Groups* (Holden-Day, San Francisco 1967).
[4] H. RADEMACHER and O. TOEPLITZ, *The Enjoyment of Mathematics* (Princeton Univ. Press, Princeton 1957).
[5] P. S. MODENOV and A. S. PARKHOMENKO, *Geometric Transformations*, Vol. 1: *Euclidean and Affine Transformations* (Academic Press, New York 1965).

Kleine Mitteilungen

Zu einem Satz über räumliche Fünfecke

Der Satz lautet: *Ein räumliches Fünfeck ABCDE, in dem alle Seiten gleich a und alle Winkel gleich α sind, ist eben.* Die Rolle, die «Einfall und Überlegung» beim Beweis dieses Satzes spielten, hat B. L. VAN DER WAERDEN aufgezeigt[1]). Der gruppentheoretische Aspekt gibt dem Beweis von van der Waerden seine besondere Eleganz. Der Satz lässt sich aber auch mit den Methoden der elementaren Schulgeometrie gewinnen, wobei allerdings etwas gerechnet werden muss.



Es ist klar, dass alle Diagonalen die gleiche Länge $d = \lambda a$ haben. Wir betrachten eine Normalprojektion des Fünfecks, von dem das Dreieck ACD in der Projektionsebene liegt. Die Umklappungen B^0 und E^0 sind eindeutig bestimmt. δ sei der Winkel zweier aneinanderstossender Diagonalen, φ der Neigungswinkel der Ebenen ABC und AED gegen die Projektionsebene; wegen $CE = DB = \lambda a$ ist die Mittelsenkrechte zu CD Symmetrieachse der (ebenen) Figur. Man bestätigt sofort:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\lambda}{2}\,;\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2}\,;\quad \sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2\lambda}\,;\quad \cos\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{4\lambda^2-1}}{2\lambda}\,.$$

1) Dieses Heft S. 73-78.

Die Strecken DA, DC, DE bilden ein Dreikant mit den Seiten α, $90^\circ - \alpha/2$, $90^\circ - \delta/2$ und dem Gegenwinkel $180^\circ - \varphi$ der Seite α.

Der Seiten-Cosinussatz[2]) liefert

$$\cos\alpha = \sin\alpha/2 \sin\delta/2 - \cos\alpha/2 \cos\delta/2 \cos\varphi\,,$$

oder

$$1 - \frac{\lambda^2}{2} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{(4\lambda^2 - 1)\,(4 - \lambda^2)}}{4\lambda} \cdot \cos\varphi\,,$$

woraus

$$\cos\varphi = \frac{\lambda\,(2\lambda^2 - 3)}{\sqrt{(4\lambda^2 - 1)\,(4 - \lambda^2)}}$$

und

$$p = \frac{a}{2}\sqrt{4 - \lambda^2}\,\cos\varphi = \frac{\lambda\,(2\lambda^2 - 3)}{2\sqrt{4\lambda^2 - 1}} \cdot a\,.$$

Hieraus ergibt sich für die Koten $\pm q$ der Punkte B und E

$$q^2 = a^2\left(1 - \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^2\,(2\lambda^2 - 3)^2}{4\,(4\lambda^2 - 1)}\right) = a^2\,\frac{-\lambda^6 + 2\lambda^4 + 2\lambda^2 - 1}{4\lambda^2 - 1}$$

Unter diesen Bedingungen sind vier Diagonalen des Fünfecks gleich. Nun muss auch die fünfte BE gleich $\lambda\,a$ sein. Zunächst findet man

$$SE' = \pm\,(c + p) = \pm\left(\frac{\lambda\,a}{2\sqrt{4\lambda^2 - 1}} + \frac{\lambda\,(2\lambda^2 - 3)\,a}{2\sqrt{4\lambda^2 - 1}}\right)$$
$$= \pm\,\frac{\lambda\,(\lambda^2 - 1)}{\sqrt{4\lambda^2 - 1}} \cdot a\,.$$

B und E können gleiche oder entgegengesetzt gleiche Koten haben.

Im ersten Fall ist

$$\Delta_1 = B'E' = 2 \cdot SE' \cdot \cos\frac{\delta}{2} = \pm\,a\,(\lambda^2 - 1)\,.$$

Die Bedingung

$$a\,\lambda = \pm\,a\,(\lambda^2 - 1)$$

liefert

$$\lambda^2 \mp \lambda - 1 = 0\,.$$

Die positiven Wurzeln der beiden Gleichungen ergeben die Werte von λ für das ebene Fünfeck und für das ebene Pentagramm.

Im zweiten Fall ist

$$\Delta_2^2 = \Delta_1^2 + 4\,q^2$$
$$= a^2\left[(\lambda^2 - 1)^2 + \frac{-4\lambda^6 + 8\lambda^4 + 8\lambda^2 - 4}{4\lambda^2 - 1}\right]$$
$$= a^2\,\frac{-\lambda^4 + 14\lambda^2 - 5}{4\lambda^2 - 1}\,.$$

Die Bedingung

$$\Delta_2^2 = a^2\,\lambda^2$$

führt auf die Gleichung für λ^2

$$\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1 = 0\,,$$

deren Wurzeln die Quadrate der Werte von λ für das ebene Fünfeck und das ebene Pentagramm sind.

W. Lüssy und E. Trost, Technikum Winterthur

[2]) Die Berechnung von $\cos\varphi$ mittels eines Satzes der sphärischen Trigonometrie ist besonders einfach, natürlich lässt sie sich auch mit ebener Trigonometrie durchführen.

Affine Scheitel von Ovalen

Als Anwendung des in Aufgabe 493 bewiesenen Satzes hat GUGGENHEIMER [2] gezeigt, dass die zentro-äquiaffine Krümmung k eines Ovals K mindestens 4 Extremstellen hat, wenn das Zentrum $\boldsymbol{o}$ der Flächenschwerpunkt von K oder der des bezüglich $\boldsymbol{o}$ polaren Ovals K^* ist. Beide Aussagen erweitern wir zu einem 6-Scheitelsatz, indem wir sie auf den Satz von den sextaktischen Punkten zurückführen.

Wir stellen kurz das Notwendige aus der affinen Differentialgeometrie zusammen (vgl. [1], [5]). Auf einer wende- und flachpunktfreien ebenen Kurve führt man, hinreichende Differenzierbarkeit vorausgesetzt, durch die Forderung

$$[\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}''] = 1\,{}^{1})$$

die Affinlänge als Parameter ein. Hieraus ergibt sich durch Differentiation

$$[\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'''] = 0\,, \quad \boldsymbol{x}''' + k\,\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{o}\,.$$

Für das Tangentenbild $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}'$ gilt dann

$$[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'] = 1\,, \quad \boldsymbol{y}'' + k\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}\,. \tag{1}$$

k heisst Affinkrümmung von $\boldsymbol{x}$. Durch (1) ist auf $\boldsymbol{y}$ ein zentro-äquiaffiner Parameter s charakterisiert, welcher den doppelten vom Radiusvektor überstrichenen Inhalt angibt, und k ist eine zentro-äquiaffine Invariante, welche mit der in [2] betrachteten zentro-äquiaffinen Krümmung von $\boldsymbol{y}(s)$ übereinstimmt (vgl. [1, S. 32]). Ist eine $\boldsymbol{o}$ umschliessende, nicht notwendig konvexe Kurve $\boldsymbol{y}(s)$ vorgegeben, so wird $\boldsymbol{x}(s)$ genau dann ein Oval, wenn $\boldsymbol{x}(s)$ geschlossen ist, d. h. wenn

$$\oint \boldsymbol{y}\,ds = \oint \boldsymbol{y}\,(y_1\,dy_2 - y_2\,dy_1) = 3\iint \boldsymbol{y}\,dy_1\,dy_2 = \boldsymbol{o}$$

gilt. Dies bedeutet, dass der Schwerpunkt von $\boldsymbol{y}(s)$ in $\boldsymbol{o}$ liegt. Es ergibt sich die Äquivalenz der beiden folgenden Sätze.

Satz von den sextaktischen Punkten: Ein flachpunktfreies Oval $\boldsymbol{x}(s)$ besitzt mindestens 6 Extrema der Affinkrümmung. [1, S. 43]

Satz 1: Eine den Ursprung $\boldsymbol{o}$ umschliessende, keine Tangente durch $\boldsymbol{o}$ sendende Kurve $\boldsymbol{y}(s)$ hat mindestens 6 Extrema der zentro-äquiaffinen Krümmung, wenn $\boldsymbol{o}$ Flächenschwerpunkt von $\boldsymbol{y}(s)$ ist.

Statt der zu $\boldsymbol{y}(s)$ polaren Kurve betrachten wir das zentro-äquiaffine Tangentenbild $\boldsymbol{z}(s) = \boldsymbol{y}'(s)$. Aus

$$[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'] = y_1\,y_2' - y_2\,y_1' = 1$$

ergibt sich, dass $\boldsymbol{y}'$ aus $\boldsymbol{y}$ durch Polarität am Einheitskreis um $\boldsymbol{o}$ und Drehung um $\pi/2$ entsteht. Zur Berechnung der zentro-äquiaffinen Krümmung $\bar{k}$ von $\boldsymbol{z}(s)$, führt man den (1) entsprechenden Parameter t ein,

$$\frac{dt}{ds} = [\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}'] = [\boldsymbol{y}', \boldsymbol{y}''] = k\,,$$

und erhält nach kurzer Rechnung

$$\bar{k} = \left[\frac{d\boldsymbol{z}}{dt}, \frac{d^2\boldsymbol{z}}{dt^2}\right] = [\boldsymbol{z}', \boldsymbol{z}''] \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 = k^{-1}\,.$$

Wendet man daher Satz 1 auf $\boldsymbol{z}(s)$ an, so erhält man

[1]) Die Klammern bezeichnen die Determinante.

Satz 2: Liegt das Zentrum $\boldsymbol{o}$ innerhalb des Ovals $\boldsymbol{y}(s)$ so, dass der Flächenschwerpunkt des zentro-äquiaffinen Tangentenbildes $\boldsymbol{z}(s) = \boldsymbol{y}'(s)$ auf $\boldsymbol{o}$ fällt, so hat $y(s)$ mindestens 6 Extrema der zentro-äquiaffinen Krümmung.

Dass man in jedem Oval das Zentrum auf genau eine Weise so wählen kann, folgt, wie schon in [2] gesagt, aus der von SANTALÓ [6] gelösten Minimumaufgabe (s. auch [3]). In Satz 1 ist Konvexität nicht verlangt. Dementsprechend kann man Satz 2 auch für Kurven formulieren, deren Tangenten sich in stets derselben Weise drehen und $\boldsymbol{o}$ nicht treffen, die aber Doppelpunkte und Spitzen haben können.

In einem Oval gibt es i. allg. noch weitere Punkte, für die man 6 Extrema der zentro-äquiaffinen Krümmung erhält, z. B. den Mittelpunkt der grössten einbeschriebenen Ellipse. Hier kann man ohne Bezug auf den Satz von den sextaktischen Punkten mittels einer Methode von MUKHOPADHYAYA [4] hyperoskulierende Zentralkegelschnitte finden, die den Extrema entsprechen.

E. HEIL, TH Darmstadt

LITERATURVERZEICHNIS

[1] W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie II. Affine Differentialgeometrie* (Berlin 1923).
[2] H. GUGGENHEIMER, Aufgabe 493, El. Math. *21*, 17–18 (1966); Bemerkung zur Aufgabe 493, El. Math. *24*, 17 (1969).
[3] E. HEIL, *Abschätzungen für einige Affininvarianten konvexer Kurven*, Monatsh. Math. *71*, 405–423 (1966).
[4] S. MUKHOPADHYAYA, *Sur les nouvelles méthodes de géométrie*, C. R. Séances Soc. Math. Franc. *1933*, 41–45.
[5] E. SALKOWSKI, *Affine Differentialgeometrie* (Berlin 1934).
[6] L. A. SANTALÓ, *Un invariante afín para las curvas convexas del plano*, Mathematicae Notae *8*, 103–111 (1948).

Über eine spezielle Differenzengleichung

Vorgelegt sei die Differenzengleichung k-ter Ordnung

$$u\,(n+k) = \frac{1}{k}\,[u\,(n+k-1) + u\,(n+k-2) + \cdots + u(n)] \tag{1}$$

mit den Anfangswerten $u(0) = u_0, \ldots, u(k-1) = u_{k-1}$.

Für das asymptotische Verhalten der Lösungen von (1) gilt

Satz: Es existiert $\lim\limits_{n\to\infty} u(n)$ für beliebige Anfangswerte und

$$\lim_{n\to\infty} u(n) = \frac{u_0 + 2\,u_1 + 3\,u_2 + \cdots + k\,u_{k-1}}{1 + 2 + 3 + \cdots + k}$$

d. h. $\lim u(n)$ ist ein gewogenes arithmetisches Mittel der Anfangswerte.

Die charakteristische Gleichung von (1) ist

$$q^k = \frac{1}{k}\,(q^{k-1} + \cdots + q + 1) \tag{2}$$

oder

$$f(q) = q^k - \frac{1}{k}\,(q^{k-1} + \cdots + 1) = 0\,. \tag{3}$$

Es wird gezeigt:

a) $f(q)$ nimmt auf dem Einheitskreis nur für $q = 1$ den Wert 0 an.

b) Mit Ausnahme von $q = 1$ liegen alle Nullstellen von $f(q)$ innerhalb des Einheitskreises.

c) $f(q)$ hat keine mehrfachen Nullstellen.

Zu a). Setzt man auf beiden Seiten von (2) Betragstriche, so folgt aus $|q| = 1$, $q = 1$.

Zu b)

$$\frac{f(q)}{q-1} = \frac{1}{k}\,[k\,q^{k-1} + (k-1)\,q^{k-2} + \cdots + 2\,q + 1] \tag{4}$$

$$\frac{f(q)}{q-1} = \frac{d}{dq}\,\frac{1}{k}\,(q^k + q^{k-1} + \cdots + q)$$

Da die Nullstellen der Ableitung $p'(q)$ eines Polynoms $p(q)$ im Inneren jeder konvexen Kurve liegen, innerhalb welcher auch die Nullstellen von $p(q)$ liegen, ergibt sich zusammen mit a), dass $f(q)/(q-1)$ nur Wurzeln innerhalb des Einheitskreises hat.

Zu c). Setzt man $h(q) := k\,q^k\,(q-1) - (q^k - 1)$ so ist $h(q) = k\,(q-1)\,f(q)$.

Aus den höheren Ableitungen von $h(q)$ erkennt man, dass $h(q)$ eine einzige Mehrfachwurzel besitzt, und zwar die Doppelwurzel $q = 1$. $f(q) = h(q)/k\,(q-1)$ hat demnach nur Nullstellen erster Ordnung.

Aus a), b), c) folgt, dass die Lösung von (1), die zu den Anfangswerten $u_0 = \ldots = u_{k-1} = 0$ gehört, stabil, jedoch nicht attraktiv ist [1].

Die Nullstellen von $f(q)$ seien $x_1, x_2, \ldots, x_k$ mit $x_1 = 1$. Da sämtliche Nullstellen wegen c) voneinander verschieden sind, folgt für $u(n)$ die Darstellung

$$u(n) = a_1\,x_1^n + \cdots + a_k\,x_k^n\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Wegen a) und b) ist $\lim\limits_{n\to\infty} u(n) = a_1$.

Die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_k$ hängen mit den Anfangswerten durch das folgende lineare Gleichungssystem zusammen

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \ldots & x_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_k \end{pmatrix}$$

Die Determinante des Systems, eine Vandermondesche Determinante, werde mit $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ bezeichnet. Wegen

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (x_k - x_{k-1}) \ldots (x_j - x_i) \ldots (x_2 - x_1)\,, \quad j > i$$

und $x_i \neq x_j$ ist $\Delta \neq 0$, das System somit eindeutig lösbar.

$$a_1 = \frac{Z}{\Delta(x_1, \ldots, x_k)}\,, \qquad Z := \begin{vmatrix} u_0 & 1 & \ldots & 1 \\ u_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ u_{k-1} & x_2^{k-1} & \ldots & x_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

Definiert man

$$\Delta_r^* := \begin{vmatrix} x_2^0 & \dots & x_k^0 \\ x_2^1 & \dots & x_k^1 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ x_2^{r-1} & \dots & x_k^{r-1} \\ x_2^{r+1} & \dots & x_k^{r+1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ x_2^{k-1} & \dots & x_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

so gibt die Entwicklung von Z nach der ersten Spalte $Z = \sum_{r=0}^{k-1} u_r\,(-1)^r\,\Delta_r^*$.

Für Δ_r^* gilt $\Delta_r^* = S_{k-r-1}(x_2, x_3, \dots, x_k)\,\Delta(x_2, \dots, x_k)$ mit $S_m(x_2, \dots, x_k) = x_2 x_3 \dots x_{m+1} + \dots + x_{k-m+1} \dots x_{k-1} x_k$ als elementarsymmetrischer Funktion m-ter Ordnung von $x_2, \dots, x_k$ [2]. Somit gilt

$$Z = \sum_{r=0}^{k-1} u_r\,(-1)^r\,S_{k-r-1}(x_2, \dots, x_k)\,\Delta(x_2, \dots, x_k)\,. \tag{5}$$

Die Nennerdeterminante von a_1 ergibt sich aus (5) für die speziellen Werte $u_0 = u_1 = \dots = u_{k-1} = 1$.

$$\Delta(x_1 = 1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r\,S_{k-1-r}(x_2, \dots, x_k)\,\Delta(x_2, \dots, x_k)\,.$$

Man erhält

$$a_1 = \frac{\sum_{r=0}^{k-1} u_r\,(-1)^r\,S_{k-1-r}(x_2, \dots, x_k)}{\sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r\,S_{k-1-r}(x_2, \dots, x_k)}\,.$$

Der Vergleich von (4) mit

$$\frac{f(q)}{q-1} = (q - x_2) \dots (q - x_k) = \sum_{r=0}^{k-1} q^r\,(-1)^{k-r}\,S_{k-1-r}(x_2, \dots, x_k)$$

führt schliesslich zu

$$a_1 = \frac{u_0 + 2\,u_1 + 3\,u_2 + \dots + k\,u_{k-1}}{1 + 2 + \dots + k}\,.$$

Eine Untersuchung der Gleichung (1) findet man auch bei MARKOFF [3]. – Die Methode, nach der der Grenzwert in der vorliegenden Mitteilung hergeleitet wurde, lässt sich unmittelbar auf Differenzengleichungen übertragen, deren charakteristisches Polynom den Bedingungen a), b), c) genügt.

H. WIMMER, TH Graz

LITERATURVERZEICHNIS

[1] W. HAHN, *Stability of Motion* (Berlin, Heidelberg und New York 1967).

[2] F. NEISS, *Determinanten und Matrizen*, 5. Auflage (Berlin, Göttingen und Heidelberg 1959), S. 40.

[3] A. A. MARKOFF, *Differenzenrechnung* (Leipzig 1896).