

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 25 (1970)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Zwei Überdeckungssätze für die n-dimensionale Kugel  
**Autor:** Wille, Friedrich  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-27351>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 25

Heft 3

Seiten 49-72

10. Mai 1970

## Zwei Überdeckungssätze für die n-dimensionale Kugel

Herrn Professor GÖRTLER zum 60. Geburtstag gewidmet

### 1. Überdeckungssätze

Es sei  $R^n$  ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum und  $K^n = \{x \in R^n \mid |x| \leq 1\}$  die  $n$ -dimensionale Einheitskugel um  $O$ . Mit  $\partial K^n = \{x \in R^n \mid |x| = 1\}$  wird der Rand von  $K^n$ , die  $(n - 1)$ -dimensionale Einheitssphäre, bezeichnet. Zwei Punkte  $x, -x \in \partial K^n$  heissen *Antipodenpaar*.

In dieser Arbeit werden folgende Aussagen bewiesen.

**Satz 1:** Es seien

$$K^n = \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k, \quad K^n = \bigcup_{j=1}^{n+1} B_j$$

zwei Überdeckungen der  $n$ -dimensionalen Kugel  $K^n$  mit abgeschlossenen Mengen  $A_k, B_j$ , die

$$A_k \cap B_k = \emptyset$$

für alle  $k = 1, 2, \dots, n + 1$  erfüllen. Dann besitzt wenigstens ein  $A_k$  und wenigstens ein  $B_j$  ein Antipodenpaar.

**Satz 2:** Es seien

$$K_n = \bigcup_{k=1}^m A_k, \quad \partial K^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} B_i$$

Überdeckungen von  $K^n$  und  $\partial K^n$  mit abgeschlossenen Mengen  $A_k, B_i$ , wobei keines der  $B_i$  ein Antipodenpaar enthält und jedes  $A_k$  zu wenigstens einem  $B_i$  fremd ist.

Dann folgt: Es gibt wenigstens  $n + 1$  Mengen  $A_k$  mit nichtleerem Durchschnitt. Insbesondere gilt  $m \geq n + 1$ .

Satz 2 verallgemeinert den LEBESGUESchen Pflastersatz, s. [1], S. 378. Überdeckt man nämlich ein  $n$ -dimensionales Simplex mit abgeschlossenen Mengen  $A_k$ , deren Durchmesser unter einer gewissen Schranke  $\tau > 0$  liegen, so ist jedes  $A_k$  zu wenigstens einer  $(n - 1)$ -dimensionalen Seite  $B_i$  des Simplex fremd. Man kann nun das Simplex homöomorph so auf  $K^n$  abbilden, dass die  $B_i$  in antipodenfreie Bildmengen übergehen. Man hat lediglich eine  $n$ -dimensionale Kugel in das Simplex einzubeschreiben und die Simplexpunkte in Richtung des Kugelmittelpunktes geeignet zu verschieben. Aus Satz 2 folgt damit, dass die Überdeckungsordnung der  $A_k, k = 1, \dots, m$ , mindestens  $n + 1$  beträgt. Das ist die Aussage des LEBESGUESchen Pflastersatzes.

Aus Satz 2 ergibt sich das

**Korollar:** Überdeckt man eine  $n$ -dimensionale Kugel mit  $n + 1$  abgeschlossenen Mengen  $A_k$ , wobei keins der  $A_k$  ein Antipodenpaar enthält, so ist der Durchschnitt der  $A_k$  nicht leer:

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k \neq \emptyset.$$

Zum Beweis hat man lediglich  $B_k = -A_k \cap \partial K^n$  zu setzen und Satz 2 anzuwenden.

Aus dem Korollar lassen sich der BROUWERSche Fixpunktsatz sowie der BORSUK-sche Antipodensatz gewinnen, wie wir später ausführen werden.

## 2. Beweise

Wesentliches Hilfsmittel beim Beweis des Satzes 1 ist der Satz von LUSTERNIK, SCHNIRELMANN, BORSUK ([1], S. 487; [2], Satz 3):

Bei jeder Überdeckung der  $n$ -dimensionalen Sphäre  $\partial K^{n+1}$  mit  $n + 1$  abgeschlossenen Mengen ist in wenigstens einer dieser Mengen ein Antipodenpaar enthalten.

Elementare Beweise finden sich in [3] und [4].

Satz 2 wird später aus Satz 1 gefolgert.

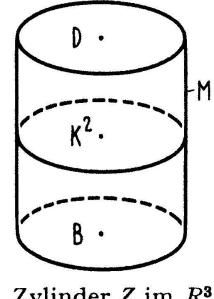
**Beweis des Satzes 1:** Wir nehmen, entgegen der Behauptung, an, dass kein  $A_k$  ein Antipodenpaar enthält.

Die Kugel  $K^n$  betten wir in den  $R^{n+1}$  ein, dessen Punkte mit  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ ,  $x_i$  reell, bezeichnet werden. Und zwar liege  $K^n$  in der Hyperebene  $x_{n+1} = 0$  mit Mittelpunkt im Ursprung:

$$K^n = \left\{ x \in R^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1, \quad x_{n+1} = 0 \right\}.$$

Um  $K^n$  herum konstruieren wir einen Zylinder (s. Abb.)

$$Z = \left\{ x \in R^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1, \quad |x_{n+1}| \leq 1 \right\}$$



Zylinder  $Z$  im  $R^3$ .

mit dem Boden

$$B = Z \cap \{x \mid x_{n+1} = -1\}$$

und dem Deckel

$$D = Z \cap \{x \mid x_{n+1} = 1\}.$$

$B$  und  $D$  sind zu  $K^n$  kongruent.

Durch

$$(x_1, \dots, x_n, 0) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, 1) \tag{1}$$

werden nun die  $A_k$ , die  $K^n$  überdecken, in Bildmengen  $A_k^*$  übergeführt und durch

$$(x_1, \dots, x_n, 0) \rightarrow -(x_1, \dots, x_n, 1) \tag{2}$$

die  $B_k$  in  $B_k^*$ . Dabei überdecken die  $A_k^*$  den Deckel  $D$  des Zylinders und die  $B_k^*$  den Boden  $B$ . Bezeichnen wir schliesslich den Projektionsoperator

$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, 0) \tag{3}$$

mit  $P$ , so wird der Mantel

$$M = \left\{ x \in R^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1, |x_{n+1}| \leq 1 \right\}$$

des Zylinders überdeckt durch die Mengen

$$M_k = \{x \in M \mid P(x) \in A_k\}.$$

Wir bilden nun die Vereinigungen

$$C_k = A_k^* \cup M_k \cup B_k^*$$

und haben damit eine Überdeckung des Zylinderrandes  $\partial Z$  aus  $n + 1$  abgeschlossenen Mengen gewonnen:

$$\partial Z = \bigcup_{k=1}^{n+1} C_k.$$

Da der Zylinderrand  $\partial Z$  symmetrisch zum Ursprung liegt und homöomorph zur  $n$ -dimensionalen Sphäre ist, können wir auf ihn den Satz von LUSTERNIK, SCHNIRELMANN, BORSUK [1], S. 487, übertragen, der in unserem Falle besagt, dass wenigstens ein  $C_k$  ein gegenüberliegendes Punktpaar  $x^0, -x^0$  enthält.

$x^0$  liegt dabei entweder auf dem Boden oder dem Deckel des Zylinders. Andernfalls gäbe es ein  $M_k$ , welches  $x^0$  und  $-x^0$  enthielte. Somit lägen  $P(x^0)$  und  $P(-x^0) = -P(x^0)$  in ein und demselben  $A_k$ , welches damit ein Antipodenpaar enthielt. Das war aber zu Anfang des Beweises ausgeschlossen.

Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $x^0 \in D$  und somit  $x^0 \in A_k^*$  für ein gewisses  $k$  annehmen. Da  $-x^0$  in  $C_k$  liegt, jedoch  $A_k^* \cap M_k$  kein Paar entgegengesetzter Punkte  $x, -x$  enthält, so folgt  $-x^0 \in B_k^*$ .

Über die Zuordnungen (1), (2) besitzen  $x^0$  und  $-x^0$  das gleiche Urbild  $P(x^0)$  in  $K^n$ , also haben  $A_k$  und  $B_k$  den gemeinsamen Punkt  $P(x^0)$ , also gilt

$$A_k \cap B_k \neq \emptyset.$$

Das steht jedoch im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes.

Also enthält wenigstens ein  $A_k$  ein Antipodenpaar. Da die  $A_k$  und die  $B_k$  im Satz 1 vertauschbar sind, ohne dass sich am Inhalt etwas ändert, besitzt auch eines der  $B_k$  ein Antipodenpaar. –

Zum Beweis von Satz 2 benötigen wir folgendes

**Lemma:** *Es seien*

$$K^n = \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k, \quad \partial K^n = \bigcup_{k=1}^{n+1} B_k$$

*Überdeckungen von  $K^n$  und  $\partial K^n$  mit abgeschlossenen Mengen  $A_k, B_k$ , wobei keines der  $B_k$  ein Antipodenpaar enthält und für alle  $k = 1, \dots, n + 1$*

$$A_k \cap B_k = \emptyset$$

gilt. Dann folgt

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k \neq \emptyset.$$

Das Lemma verallgemeinert einen Satz von SPERNER ([1], S. 378, Satz B) in ähnlicher Weise, wie Satz 2 den LEBESGUESchen Pflastersatz umfasst.

**Beweis des Lemmas:** Wir nehmen entgegen der Behauptung an, dass

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k = \emptyset \quad (4)$$

ist.

Um jeden Punkt  $x$  aus dem Inneren  $\dot{K}^n$  von  $K^n$  wird eine abgeschlossene Umgebung  $U_x$  gelegt, die ganz im Inneren von  $K^n$  liegt und die wenigstens eines der  $A_k$  nicht schneidet. Wegen der Abgeschlossenheit der  $A_k$  und der Bedingung (4) ist das möglich.

Um jeden Randpunkt  $x \in \partial K^n$  legen wir ebenfalls eine abgeschlossene Umgebung  $U_x$  und zwar nach folgender Methode: Jedes  $x \in \partial K^n$  liegt in mindestens einem der  $B_k$ . Gilt etwa  $x \in B_k$ , so betten wir  $x$  in eine so kleine abgeschlossene Umgebung  $U_x$  ein, dass  $A_k$  von  $U_x$  nicht getroffen wird und dass die Vereinigung

$$\bigcup_{x \in B_k} U_x$$

kein Antipodenpaar von  $\partial K^n$  enthält. Da  $B_k$  kein Antipodenpaar besitzt und  $S^n$  und  $B_k$  kompakt sind, ist das möglich.

Unter den  $U_x$  wähle man nun endlich viele  $U_{x_j}$  heraus, die  $K^n$  überdecken. Anschliessend bilde man die Vereinigung

$$C_k = \bigcup_{x_j \in B_k} U_{x_j} \cup \bigcup_{x_j \in \dot{K}^n} U_{x_j} .$$

$U_{x_j} \cap A_k = \emptyset$

Jedes  $U_{x_j}$  ist in wenigstens einem  $C_k$  enthalten, also folgt

$$K_n \subset \bigcup_{k=1}^{n+1} C_k .$$

Ausserdem gilt

$$C_k \cap A_k = \emptyset, \quad k = 1, \dots, n+1 .$$

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes 1 für die Überdeckungen

$$K^n = \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k, \quad K^n = \bigcup_{k=1}^{n+1} (C_k \cap K^n)$$

erfüllt. Also gibt es wenigstens ein  $C_k$ , welches ein Antipodenpaar besitzt.

Andererseits besitzt aber nach Konstruktion keines der  $C_k$  ein Antipodenpaar. Damit ist ein Widerspruch erreicht und es gilt die Behauptung

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k \neq \emptyset. -$$

**Bemerkung:** Herr H. HADWIGER (Bern) übersandte mir einen anderen Beweis des Lemmas, der auf folgender Tatsache fußt: *Überdecken die abgeschlossenen Mengen  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  mitsamt ihren Antipodenmengen  $A_k^*$  die  $n$ -dimensionale Sphäre  $\partial K^{n+1}$  und gilt  $A_k \cap A_k^* = \emptyset$  für alle  $k$ , so folgt  $\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k \neq \emptyset$*  ([3], S. 83, Lemma 14). Dies zeigt den starken inneren Zusammenhang der Antipodensätze untereinander, worauf H. HADWIGER auch in [4] besonders hinweist.

Aus dem Lemma folgt Satz 2, indem wir eine bekannte Schlussweise anwenden, s. [1], S. 378.

**Beweis des Satzes 2:** Mit  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ , bezeichnen wir die Vereinigung aller  $A_k$ , die zu  $B_i$  fremd sind, jedoch nicht fremd zu  $B_j$  mit  $j < i$ . Jedes  $A_k$  liegt in genau einem  $M_i$ , somit überdecken die  $M_i$  die Kugel  $K^n$  und es gilt  $M_i \cap B_i = \emptyset$  für alle  $i = 1, \dots, n+1$ . Aus dem Lemma folgt daher

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} M_i \neq \emptyset.$$

Also gibt es wenigstens  $n+1$  Mengen  $A_k$  mit nichtleerem Durchschnitt. –

### 3. Anwendung

Mit Korollar 1 lässt sich leicht folgender Existenzsatz für Lösungen nichtlinearer Gleichungen beweisen.

**Satz 3:** Es seien  $f: K^n \rightarrow R^n$ ,  $g: K^n \rightarrow R^n$  stetige Abbildungen, die auf  $\partial K^n$  folgende Bedingungen erfüllen:

- (a) für alle  $\mu > 0$  folgt  $f(-x) \neq \mu f(x)$ ,
- (b) für alle  $\lambda$  mit  $0 \leq \lambda < 1$  folgt  $f(x) \neq \lambda g(x)$ .

Dann gibt es ein  $x \in K^n$  mit

$$f(x) = g(x).$$

Für  $f(x) \equiv x$  und  $|g(x)| \leq 1$  ( $x \in K^n$ ) erhält man daraus den BROUWERSchen Fixpunktsatz, während sich für  $g(x) \equiv 0$  der BORSUKSche Antipodensatz (KRASNOSELS'KII [5], S. 100, Theorem 2.4') ergibt. Satz 3 lässt sich umgekehrt mühelos aus dem BORSUKSchen Antipodensatz herleiten (über die Homotopie  $\varphi(x, t) = f(x) - (1-t)g(x)$ ,  $t \in [0, 1]$ ).

**Beweis:** Wir benutzen die Norm  $|x| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ . Die Funktionen  $f$  bzw.  $g$  werden zu stetigen Funktionen  $\hat{f}$ ,  $\hat{g}$  auf  $K_4^n = \{x \in R^n \mid |x| \leq 4\}$  erweitert durch folgende Festsetzungen:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } |x| \leq 1 \\ f\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{für } 1 < |x| \leq 2 \\ f\left(\frac{x}{|x|}\right) - (|x| - 2) f\left(-\frac{x}{|x|}\right) & \text{für } 2 < |x| \leq 3 \\ f\left(\frac{x}{|x|}\right) - f\left(-\frac{x}{|x|}\right) & \text{für } 3 < |x| \leq 4 \end{cases}$$

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } |x| \leq 1 \\ (2 - |x|) g\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{für } 1 < |x| \leq 2 \\ 0 & \text{für } 2 < |x| \leq 3 \\ (|x| - 3) \cdot p & \text{für } 3 < |x| \leq 4 \end{cases}$$

Dabei sei  $p$  ein beliebiger Punkt aus  $R^n$  mit positiven Komponenten  $p_k > 0$  und

$$|p| < \min_{|x|=1} |f(x) - f(-x)|.$$

Das obenstehende Minimum ist wegen (a) positiv.

Wir bilden nun die abgeschlossenen Mengen

$$A_k = \{x \in K_4^n \mid \hat{f}_k(x) \geq \hat{g}_k(x)\}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$A_{n+1} = \{x \in K_4^n \mid \text{für alle } k = 1, \dots, n \text{ gilt } \hat{f}_k(x) \leq \hat{g}_k(x)\}$$

( $\hat{f}_k, \hat{g}_k$  Komponenten von  $f, g$ ). Sie überdecken offenbar  $K_4^n$ . Man überzeugt sich davon, dass die  $A_1, \dots, A_{n+1}$  antipodenfrei auf  $\partial K_4^n$  sind (auf  $\partial K_4^n$  ist  $\hat{g}(x) = p$ ). Also besitzen die  $A_k$  nach unserem Korollar einen gemeinsamen Punkt  $x_0$ , für den, nach Definition der  $A_k$ , nur

$$\hat{f}(x_0) = \hat{g}(x_0)$$

gelten kann. Die  $\hat{f}, \hat{g}$  sind aber so konstruiert, dass sie, wegen (a) und (b) in  $1 < |x| \leq 4$  stets  $\hat{f}(x) \neq \hat{g}(x)$  erfüllen. Also folgt

$$f(x_0) = g(x_0). -$$

Das Korollar im Abschnitt 1 erscheint also als topologisches Konzentrat sowohl des BROUWERSchen Fixpunktsatzes als auch des BORSUKSchen Antipodensatzes.

FRIEDRICH WILLE, Freiburg i. Br.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] ALEXANDROFF, P., HOPF, H., *Topologie*, 1. Band (N. Y. 1965).
- [2] BORSUK, K., *Drei Sätze über die  $n$ -dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Math. 20, 177–190 (1933).
- [3] GRANAS, A., *The Theory of Compact Vector Fields and Some of its Applications to Topology of Functional Spaces (I)*, Rozprawy Matematyczne (Warszawa 1962).
- [4] HADWIGER, H., *Elementare Kombinatorik und Topologie*, El. Math. 15, 49–60 (1960).
- [5] KRASNOSEL'SKII, M. A., *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations* (Pergamon Press, Oxford, London, N. Y., Paris 1964).