

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 25 (1970)
Heft: 3

Artikel: Zwei Überdeckungssätze für die n-dimensionale Kugel
Autor: Wille, Friedrich
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-27351>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik

und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 25

Heft 3

Seiten 49-72

10. Mai 1970

Zwei Überdeckungssätze für die n -dimensionale Kugel

Herrn Professor GÖRTLER zum 60. Geburtstag gewidmet

1. Überdeckungssätze

Es sei R^n ein n -dimensionaler reeller Vektorraum und $K^n = \{x \in R^n \mid |x| \leq 1\}$ die n -dimensionale Einheitskugel um O . Mit $\partial K^n = \{x \in R^n \mid |x| = 1\}$ wird der Rand von K^n , die $(n-1)$ -dimensionale Einheitssphäre, bezeichnet. Zwei Punkte $x, -x \in \partial K^n$ heissen *Antipodenpaar*.

In dieser Arbeit werden folgende Aussagen bewiesen.

Satz 1: *Es seien*

$$K^n = \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k, \quad K^n = \bigcup_{j=1}^{n+1} B_j$$

zwei Überdeckungen der n -dimensionalen Kugel K^n mit abgeschlossenen Mengen A_k, B_j , die

$$A_k \cap B_k = \emptyset$$

für alle $k = 1, 2, \dots, n+1$ erfüllen. Dann besitzt wenigstens ein A_k und wenigstens ein B_j ein Antipodenpaar.

Satz 2: *Es seien*

$$K^n = \bigcup_{k=1}^m A_k, \quad \partial K^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} B_i$$

Überdeckungen von K^n und ∂K^n mit abgeschlossenen Mengen A_k, B_i , wobei keines der B_i ein Antipodenpaar enthält und jedes A_k zu wenigstens einem B_i fremd ist.

Dann folgt: Es gibt wenigstens $n+1$ Mengen A_k mit nichtleerem Durchschnitt. Insbesondere gilt $m \geq n+1$.

Satz 2 verallgemeinert den LEBESGUESchen Pflastersatz, s. [1], S. 378. Überdeckt man nämlich ein n -dimensionales Simplex mit abgeschlossenen Mengen A_k , deren Durchmesser unter einer gewissen Schranke $\tau > 0$ liegen, so ist jedes A_k zu wenigstens einer $(n-1)$ -dimensionalen Seite B_i des Simplex fremd. Man kann nun das Simplex homöomorph so auf K^n abbilden, dass die B_i in antipodenfreie Bildmengen übergehen. Man hat lediglich eine n -dimensionale Kugel in das Simplex einzubeschreiben und die Simplexpunkte in Richtung des Kugelmittelpunktes geeignet zu verschieben. Aus Satz 2 folgt damit, dass die Überdeckungsordnung der $A_k, k = 1, \dots, m$, mindestens $n+1$ beträgt. Das ist die Aussage des LEBESGUESchen Pflastersatzes.

Aus Satz 2 ergibt sich das

Korollar: *Überdeckt man eine n -dimensionale Kugel mit $n + 1$ abgeschlossenen Mengen A_k , wobei keins der A_k ein Antipodenpaar enthält, so ist der Durchschnitt der A_k nicht leer:*

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k \neq \emptyset.$$

Zum Beweis hat man lediglich $B_k = -A_k \cap \partial K^n$ zu setzen und Satz 2 anzuwenden.

Aus dem Korollar lassen sich der BROUWERSche Fixpunktsatz sowie der BORSUKsche Antipodensatz gewinnen, wie wir später ausführen werden.

2. Beweise

Wesentliches Hilfsmittel beim Beweis des Satzes 1 ist der Satz von LUSTERNIK, SCHNIRELMANN, BORSUK ([1], S. 487; [2], Satz 3):

Bei jeder Überdeckung der n -dimensionalen Sphäre ∂K^{n+1} mit $n + 1$ abgeschlossenen Mengen ist in wenigstens einer dieser Mengen ein Antipodenpaar enthalten.

Elementare Beweise finden sich in [3] und [4].

Satz 2 wird später aus Satz 1 gefolgert.

Beweis des Satzes 1: Wir nehmen, entgegen der Behauptung, an, dass kein A_k ein Antipodenpaar enthält.

Die Kugel K^n betten wir in den R^{n+1} ein, dessen Punkte mit $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, x_i reell, bezeichnet werden. Und zwar liege K^n in der Hyperebene $x_{n+1} = 0$ mit Mittelpunkt im Ursprung:

$$K^n = \left\{ x \in R^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1, \quad x_{n+1} = 0 \right\}.$$

Um K^n herum konstruieren wir einen Zylinder (s. Abb.)

$$Z = \left\{ x \in R^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1, \quad |x_{n+1}| \leq 1 \right\}$$

mit dem Boden

$$B = Z \cap \{x \mid x_{n+1} = -1\}$$

und dem Deckel

$$D = Z \cap \{x \mid x_{n+1} = 1\}.$$

B und D sind zu K^n kongruent.

Durch

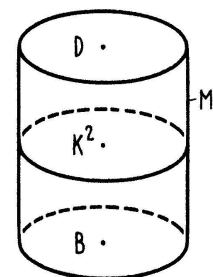
$$(x_1, \dots, x_n, 0) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, 1) \quad (1)$$

werden nun die A_k , die K^n überdecken, in Bildmengen A_k^* übergeführt und durch

$$(x_1, \dots, x_n, 0) \rightarrow -(x_1, \dots, x_n, 1) \quad (2)$$

die B_k in B_k^* . Dabei überdecken die A_k^* den Deckel D des Zylinders und die B_k^* den Boden B . Bezeichnen wir schliesslich den Projektionsoperator

$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, 0) \quad (3)$$



Zylinder Z im R^3 .

mit P , so wird der Mantel

$$M = \left\{ x \in R^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1, |x_{n+1}| \leq 1 \right\}$$

des Zylinders überdeckt durch die Mengen

$$M_k = \{x \in M \mid P(x) \in A_k\}.$$

Wir bilden nun die Vereinigungen

$$C_k = A_k^* \cup M_k \cup B_k^*$$

und haben damit eine Überdeckung des Zylinderrandes ∂Z aus $n + 1$ abgeschlossenen Mengen gewonnen:

$$\partial Z = \bigcup_{k=1}^{n+1} C_k.$$

Da der Zylinderrand ∂Z symmetrisch zum Ursprung liegt und homöomorph zur n -dimensionalen Sphäre ist, können wir auf ihn den Satz von LUSTERNIK, SCHNIRELMANN, BORSUK [1], S. 487, übertragen, der in unserem Falle besagt, dass wenigstens ein C_k ein gegenüberliegendes Punktepaar $x^0, -x^0$ enthält.

x^0 liegt dabei entweder auf dem Boden oder dem Deckel des Zylinders. Andernfalls gäbe es ein M_k , welches x^0 und $-x^0$ enthielte. Somit lägen $P(x^0)$ und $P(-x^0) = -P(x^0)$ in ein und demselben A_k , welches damit ein Antipodenpaar enthielte. Das war aber zu Anfang des Beweises ausgeschlossen.

Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x^0 \in D$ und somit $x^0 \in A_k^*$ für ein gewisses k annehmen. Da $-x^0$ in C_k liegt, jedoch $A_k^* \cap M_k$ kein Paar entgegengesetzter Punkte $x, -x$ enthält, so folgt $-x^0 \in B_k^*$.

Über die Zuordnungen (1), (2) besitzen x^0 und $-x^0$ das gleiche Urbild $P(x^0)$ in K^n , also haben A_k und B_k den gemeinsamen Punkt $P(x^0)$, also gilt

$$A_k \cap B_k \neq \emptyset.$$

Das steht jedoch im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes.

Also enthält wenigstens ein A_k ein Antipodenpaar. Da die A_k und die B_k im Satz 1 vertauschbar sind, ohne dass sich am Inhalt etwas ändert, besitzt auch eines der B_k ein Antipodenpaar. –

Zum Beweis von Satz 2 benötigen wir folgendes

Lemma: *Es seien*

$$K^n = \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k, \quad \partial K^n = \bigcup_{k=1}^{n+1} B_k$$

Überdeckungen von K^n und ∂K^n mit abgeschlossenen Mengen A_k, B_k , wobei keines der B_k ein Antipodenpaar enthält und für alle $k = 1, \dots, n + 1$

$$A_k \cap B_k = \emptyset$$

gilt. Dann folgt

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k \neq \emptyset.$$

Das Lemma verallgemeinert einen Satz von SPERNER ([1], S. 378, Satz B) in ähnlicher Weise, wie Satz 2 den LEBESGUESCHEN Pflastersatz umfasst.

Beweis des Lemmas: Wir nehmen entgegen der Behauptung an, dass

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k = \emptyset \quad (4)$$

ist.

Um jeden Punkt x aus dem Inneren \dot{K}^n von K^n wird eine abgeschlossene Umgebung U_x gelegt, die ganz im Inneren von K^n liegt und die wenigstens eines der A_k nicht schneidet. Wegen der Abgeschlossenheit der A_k und der Bedingung (4) ist das möglich.

Um jeden Randpunkt $x \in \partial K^n$ legen wir ebenfalls eine abgeschlossene Umgebung U_x und zwar nach folgender Methode: Jedes $x \in \partial K^n$ liegt in mindestens einem der B_k . Gilt etwa $x \in B_k$, so betten wir x in eine so kleine abgeschlossene Umgebung U_x ein, dass A_k von U_x nicht getroffen wird und dass die Vereinigung

$$\bigcup_{x \in B_k} U_x$$

kein Antipodenpaar von ∂K^n enthält. Da B_k kein Antipodenpaar besitzt und S^n und B_k kompakt sind, ist das möglich.

Unter den U_x wähle man nun endlich viele U_{x_j} heraus, die K^n überdecken. Anschliessend bilde man die Vereinigung

$$C_k = \bigcup_{x_j \in B_k} U_{x_j} \cup \bigcup_{\substack{x_j \in \dot{K}^n \\ U_{x_j} \cap A_k = \emptyset}} U_{x_j}.$$

Jedes U_{x_j} ist in wenigstens einem C_k enthalten, also folgt

$$K^n \subset \bigcup_{k=1}^{n+1} C_k.$$

Ausserdem gilt

$$C_k \cap A_k = \emptyset, \quad k = 1, \dots, n+1.$$

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes 1 für die Überdeckungen

$$K^n = \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k, \quad K^n = \bigcup_{k=1}^{n+1} (C_k \cap K^n)$$

erfüllt. Also gibt es wenigstens ein C_k , welches ein Antipodenpaar besitzt.

Andererseits besitzt aber nach Konstruktion keines der C_k ein Antipodenpaar. Damit ist ein Widerspruch erreicht und es gilt die Behauptung

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k \neq \emptyset. \quad -$$

Bemerkung: Herr H. HADWIGER (Bern) übersandte mir einen anderen Beweis des Lemmas, der auf folgender Tatsache fusst: *Überdecken die abgeschlossenen Mengen A_1, A_2, \dots, A_{n+1} mitsamt ihren Antipodenmengen A_k^* die n -dimensionale Sphäre ∂K^{n+1} und gilt $A_k \cap A_k^* = \emptyset$ für alle k , so folgt $\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k \neq \emptyset$ ([3], S. 83, Lemma 14).* Dies zeigt den starken inneren Zusammenhang der Antipodensätze untereinander, worauf H. HADWIGER auch in [4] besonders hinweist.

Aus dem Lemma folgt Satz 2, indem wir eine bekannte Schlussweise anwenden, s. [1], S. 378.

Beweis des Satzes 2: Mit $M_i, i = 1, \dots, n + 1$, bezeichnen wir die Vereinigung aller A_k , die zu B_i fremd sind, jedoch nicht fremd zu B_j mit $j < i$. Jedes A_k liegt in genau einem M_i , somit überdecken die M_i die Kugel K^n und es gilt $M_i \cap B_i = \emptyset$ für alle $i = 1, \dots, n + 1$. Aus dem Lemma folgt daher

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} M_i \neq \emptyset .$$

Also gibt es wenigstens $n + 1$ Mengen A_k mit nichtleerem Durchschnitt. –

3. Anwendung

Mit Korollar 1 lässt sich leicht folgender Existenzsatz für Lösungen nichtlinearer Gleichungen beweisen.

Satz 3: *Es seien $f: K^n \rightarrow R^n, g: K^n \rightarrow R^n$ stetige Abbildungen, die auf ∂K^n folgende Bedingungen erfüllen:*

- (a) *für alle $\mu > 0$ folgt $f(-x) \neq \mu f(x)$,*
- (b) *für alle λ mit $0 \leq \lambda < 1$ folgt $f(x) \neq \lambda g(x)$.*

Dann gibt es ein $x \in K^n$ mit

$$f(x) = g(x) .$$

Für $f(x) \equiv x$ und $|g(x)| \leq 1 (x \in K^n)$ erhält man daraus den BROUWERSchen Fixpunktsatz, während sich für $g(x) \equiv 0$ der BORSUKSche Antipodensatz (KRASNOSELS'KII [5], S. 100, Theorem 2.4') ergibt. Satz 3 lässt sich umgekehrt mühelos aus dem BORSUKSchen Antipodensatz herleiten (über die Homotopie $\varphi(x, t) = f(x) - (1 - t)g(x), t \in [0, 1]$).

Beweis: Wir benutzen die Norm $|x| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$. Die Funktionen f bzw. g werden zu stetigen Funktionen \hat{f}, \hat{g} auf $K_4^n = \{x \in R^n \mid |x| \leq 4\}$ erweitert durch folgende Festsetzungen:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } |x| \leq 1 \\ f\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{für } 1 < |x| \leq 2 \\ f\left(\frac{x}{|x|}\right) - (|x| - 2) f\left(-\frac{x}{|x|}\right) & \text{für } 2 < |x| \leq 3 \\ f\left(\frac{x}{|x|}\right) - f\left(-\frac{x}{|x|}\right) & \text{für } 3 < |x| \leq 4 \end{cases}$$

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } |x| \leq 1 \\ (2 - |x|) g\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{für } 1 < |x| \leq 2 \\ 0 & \text{für } 2 < |x| \leq 3 \\ (|x| - 3) \cdot p & \text{für } 3 < |x| \leq 4 \end{cases}$$

Dabei sei p ein beliebiger Punkt aus R^n mit positiven Komponenten $p_k > 0$ und

$$|p| < \min_{|x|=1} |f(x) - f(-x)|.$$

Das obenstehende Minimum ist wegen (a) positiv.

Wir bilden nun die abgeschlossenen Mengen

$$A_k = \{x \in K_4^n \mid \hat{f}_k(x) \geq \hat{g}_k(x)\}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$A_{n+1} = \{x \in K_4^n \mid \text{für alle } k = 1, \dots, n \text{ gilt } \hat{f}_k(x) \leq \hat{g}_k(x)\}$$

(\hat{f}_k, \hat{g}_k Komponenten von f, g). Sie überdecken offenbar K_4^n . Man überzeugt sich davon, dass die A_1, \dots, A_{n+1} antipodenpaarfrei auf ∂K_4^n sind (auf ∂K_4^n ist $\hat{g}(x) = p$). Also besitzen die A_k nach unserem Korollar einen gemeinsamen Punkt x_0 , für den, nach Definition der A_k , nur

$$\hat{f}(x_0) = \hat{g}(x_0)$$

gelten kann. Die \hat{f}, \hat{g} sind aber so konstruiert, dass sie, wegen (a) und (b) in $1 < |x| \leq 4$ stets $\hat{f}(x) \neq \hat{g}(x)$ erfüllen. Also folgt

$$f(x_0) = g(x_0). \quad -$$

Das Korollar im Abschnitt 1 erscheint also als topologisches Konzentrat sowohl des BROUWERSCHEN Fixpunktsatzes als auch des BORSUKSCHEN Antipodensatzes.

FRIEDRICH WILLE, Freiburg i. Br.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] ALEXANDROFF, P., HOPF, H., *Topologie*, 1. Band (N. Y. 1965).
- [2] BORSUK, K., *Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Math. 20, 177–190 (1933).
- [3] GRANAS, A., *The Theory of Compact Vector Fields and Some of its Applications to Topology of Functional Spaces (I)*, Rozprawy Matematyczne (Warszawa 1962).
- [4] HADWIGER, H., *Elementare Kombinatorik und Topologie*, El. Math. 15, 49–60 (1960).
- [5] KRASNOSEL'SKII, M. A., *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations* (Pergamon Press, Oxford, London, N. Y., Paris 1964).