

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 25 (1970)  
**Heft:** 1  
  
**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Aufgaben

**Aufgabe 589.** In einer Ebene sind drei Kreisbüschel gegeben. Man konstruiere drei zueinander orthogonale Kreise, von denen jeder einem dieser Büschel angehört.

C. BINDSCHIEDLER, Küsnacht

*Lösung des Aufgabenstellers:* Es seien  $M_1, M_2$  die Mittelpunkte zweier orthogonalen Kreise, von denen der eine dem Büschel  $\mathfrak{B}_1$ , der andere dem Büschel  $\mathfrak{B}_2$  angehört.  $M_1$  und  $M_2$  beschreiben projektiv aufeinander bezogene Punktreihen  $\mathfrak{H}_1$  und  $\mathfrak{H}_2$  auf den Büschelachsen. Dasselbe gilt von den Mittelpunkten  $M_2$  und  $M_3$ , bzw.  $M_3$  und  $M_1$  für orthogonale Kreise der Büschel  $\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$  bzw.  $\mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_1$ . Damit wird auch eine Projektivität von  $\mathfrak{H}_1$  auf sich induziert. Genau die Doppelpunkte dieser letzteren sind die Mittelpunkte derjenigen Kreislinien von  $\mathfrak{B}_1$ , zu welchen je eine Kreislinie aus  $\mathfrak{B}_2$  und aus  $\mathfrak{B}_3$  so gefunden werden können, dass die drei Kreislinien zueinander orthogonal sind.

Eine weitere Lösung sandte W. VINZENZ (München), welcher u. a. bemerkt, dass auch im Falle von lauter reellen Grundpunkten der Büschel keine Lösung zu existieren braucht.

**Aufgabe 590.** Gegeben sind die Ausdrücke

$$A_n = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n \quad \text{und} \quad B_n = \frac{2}{(n+1)!} \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1}.$$

Man zeige  $A_n = B_n = n$  für  $n = 0, 1, 2, \dots$

I. PAASCHE, München

*Anmerkung der Redaktion:* Mit Rücksicht auf  $(n-1)!$  versagt der Formelausdruck für  $A_n$  im Falle  $n = 0$ .

1. *Lösung:* Für  $n \geq 1$  ist bekanntlich  $\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!$  (vgl. etwa E. NETTO,

*Lehrbuch der Combinatorik*, Teubner Leipzig/Berlin 1927, p. 249, (17)), daher  $A_n = n$  ( $n \geq 1$ ). Unter Verwendung geläufiger Eigenschaften der Binomialkoeffizienten ergibt sich die Rekursionsbeziehung (\*)  $(n+1) B_n = n B_{n-1} + 2 A_n$  ( $n \geq 1$ ). Trivialerweise gilt  $B_0 = 0$ , und die Induktionsannahme  $B_{n-1} = n-1$  führt mit (\*) und  $A_n = n$  unmittelbar zu  $B_n = n$ .

D. SVRTAN, Zagreb

2. *Lösung:* Die STIRLING-Zahlen zweiter Art  $S(m, n)$  sind durch die Rekursionsformel  $S(m+1, n) = S(m, n-1) + n S(m, n)$  mit  $S(0, 0) = 1$  gegeben (vgl. J. RIORDAN, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley New York 1958, Seite 33), woraus man leicht die Identität  $\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m = n! S(m, n)$  erhält. Für  $n > 0$  ist daher  $A_n = n! S(n, n)/(n-1)! = n$  und  $B_n = 2n! S(n+1, n)/(n+1)! = 2n(n+1)/2(n+1) = n$ , da aus der obigen Rekursionsformel  $S(n+1, n) = n(n+1)/2$  folgt. Trivialerweise ist  $B_0 = 0$ .

H. SCHEID, Mainz

Weitere Lösungen sandten G. BACH (Braunschweig), A. BAGER (Hjørring), H. BRÄNDLI (Zürich), W. BÜHLER (Berkeley, USA), P. BUNDSCHUH (Freiburg i. Br.), L. CARLITZ (Durham, USA), J. FEHÉR (Pécs, Ungarn; 2 Lösungen), F. GÖTZE (Jena), M. S. KLAMKIN (Dearborn, USA), R. KOCH (München), Z. M. MITROVIĆ (Vranje), J. RÄTZ (Bern), O. REUTTER (Ochsenhausen).

**Aufgabe 591.** Für welche reellen Zahlen  $\alpha$  gilt die Implikation

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \dots = \sum_{i=1}^n x_i^n = \alpha \Rightarrow (\forall r \in \mathbb{N}) \sum_{i=1}^n x_i^{n+r} = \alpha,$$

wobei  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) reelle Zahlen sind?

D. VELJAN, Zagreb

*First solution:* Put

$$f(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n.$$

By Newton's identities we have

$$s_k + c_1 s_{k-1} + \cdots + c_{k-1} s_1 + k c_k = 0 \quad (k = 1, \dots, n), \quad (*)$$

$$s_k + c_1 s_{k-1} + \cdots + c_{n-1} s_{k-n+1} + c_n s_{k-n} = 0 \quad (k > n), \quad (**)$$

where

$$s_k = x_1^k + \cdots + x_n^k.$$

Since  $s_1 = \cdots = s_n = \alpha$ , it follows from (\*) that  $c_1 = -\alpha$ ,  $c_2 = \binom{\alpha}{2}$ ,  $c_3 = -\binom{\alpha}{3}$  and generally  $c_k = (-1)^k \binom{\alpha}{k}$ . Indeed assuming that this formula holds up to and including the value  $k < n$ , we have from (\*)

$$(k+1) c_{k+1} = -\alpha \left\{ 1 - \alpha + \binom{\alpha}{2} - \cdots + (-1)^k \binom{\alpha}{k} \right\} = -\alpha \cdot (-1)^k \binom{\alpha-1}{k},$$

so that  $c_{k+1} = (-1)^{k+1} \binom{\alpha}{k+1}$ .

In the next place, by (\*\*), if  $s_k = \alpha$  for  $k = n+1, n+2, \dots$ , we have

$$\alpha (1 + c_1 + \cdots + c_n) = 0.$$

Then, as above,  $\binom{\alpha}{n+1} = 0$ , so that  $\alpha = 0, 1, \dots, n$ .

Conversely let  $\alpha = r$ , where  $0 \leq r \leq n$ . Then

$$f(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} x^{n-k} = x^{n-r} (x-1)^r.$$

Thus by properly numbering the  $x_j$  we have

$$x_1 = \cdots = x_r = 1, \quad x_{r+1} = \cdots = x_n = 0.$$

L. CARLITZ, Durham (USA)

*Second solution:* Anwendung von Theorem 2 der Arbeit M. S. KLAMKIN and D. J. NEWMAN, *Uniqueness Theorems for Power Equations*, welche in dieser Zeitschrift erscheinen wird.

Weitere Lösungen sandten G. BACH (Braunschweig), A. BAGER (HJØRRING), C. BINDSCHIEDLER (Küsnacht), J. FEHÉR (Pécs, Ungarn), O. REUTTER (Ochsenhausen), D. SVRTAN (Zagreb), W. VINZENZ (München).

**Aufgabe 592.** Für  $k = 1, 2, \dots$  bezeichne  $(n, m)_k$  den grössten gemeinsamen Teiler von  $n$  und  $m$  der Potenz  $k$ ,  $\sigma_s(k, m)$  die Teilerfunktion

$$\sigma_s(k, m) = \sum_{td^k = m} t^s$$

und  $c_n^{(k)}(m)$  die verallgemeinerte Ramanujansche Summe

$$c_n^{(k)}(m) = \sum_{\substack{r=1 \\ (r, n^k)_k = 1}}^{n^k} e^{2\pi i r m / n^k}.$$

Man beweise die für  $R(s) > 1/k$  gültige Darstellung

$$\sigma_{s-1}(k, m) = \zeta(k, s) m^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)}(m) n^{-ks},$$

worin  $\zeta$  die Riemannsche Zetafunktion bedeutet.

E. KRÄTZEL, Jena

*Lösung:* Wir setzen  $f^{(k)}(d, m) = f^{(k)}(d) = d^k$ , falls  $d^k | m$  und  $= 0$ , falls  $d^k \nmid m$ ; ferner werde wie üblich  $e(x) = e^{2\pi i x}$  definiert. Dann ist

$$\sum_{d|n} c_d^{(k)}(m) = \sum_{d|n} \sum_{\substack{r=1 \\ (r, d^k)_k = 1}}^{d^k} e\left(\frac{r m}{d^k}\right) = \sum_{q=1}^{n^k} e\left(\frac{q m}{n^k}\right). \quad (1)$$

Zu jedem festen  $q$  mit  $1 \leq q \leq n^k$  existiert nämlich genau ein  $d'$  mit  $d' | n$  derart, dass  $d'^k | q$  und  $(q, n^k)_k = d'^k$ . Setzt man  $q = d'^k r$  und  $n/d' = d$ , so existiert also zu jedem  $q$  mit  $1 \leq q \leq n^k$  genau ein  $r$  mit  $1 \leq r \leq d^k$  und  $(r, d^k)_k = 1$ . Die Umkehrung überlegt man genauso leicht. Die Summe rechts in (1) ist gleich  $n^k$ , falls  $n^k | m$  und gleich 0, falls  $n^k \nmid m$ ; also ist

$$f^{(k)}(n) = \sum_{d|n} c_d^{(k)}(m). \quad (*)$$

Wendet man hierauf die Möbiussche Umkehrformel an, so folgt

$$c_n^{(k)}(m) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f^{(k)}(d)$$

und dies liefert dann

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)}(m) n^{-ks} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-ks} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f^{(k)}(d) = \sum_{d'=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d') d'^{-ks} f^{(k)}(d) d^{-ks} \\ &= \sum_{d'=1}^{\infty} \mu(d') d'^{-ks} \sum_{d=1}^{\infty} f^{(k)}(d) d^{-ks}. \end{aligned} \quad (2)$$

Der erste Faktor rechts ist bekanntlich  $(\zeta(k, s))^{-1}$  für  $\operatorname{Re}(s) < 1/k$ ; der zweite berechnet sich zu

$$\sum_{d=1}^{\infty} f^{(k)}(d) d^{-ks} = \sum_{\substack{d \\ d^k | m}} d^{k(1-s)} = m^{1-s} \sum_{\substack{t \\ t \cdot d^k = m}} t^{s-1} = m^{1-s} \sigma_{s-1}(k, m).$$

Trägt man die letzten beiden Ergebnisse in (2) ein und löst nach  $\sigma_{s-1}(k, m)$  auf, so erhält man das behauptete Resultat.

P. BUNDSCHUH, Freiburg i. Br.

Eine weitere Lösung sandte H. SCHEID (Mainz), welcher für die Herleitung der Beziehung (\*) auf einen Artikel von E. COHEN (Duke Math. J. 16, 85–90 (1949)) hinweist.

## Neue Aufgaben

**Aufgabe 614.** Wird

$$e_n(m) = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{(k+m)(k+m+1)\dots(k+2m)} \quad (m \geq 0 \text{ ganz})$$

als reduzierter Bruch dargestellt und ist  $\alpha_n(m)$  der Exponent von 2 in der Primzahlpotenzzzerlegung des Zählers, so gilt für jedes  $m$

$$\alpha_n(m) \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

(Aufgabe 551 behandelte den Fall  $m = 0$ ).

E. TEUFFEL, Korntal/Stuttgart

**Aufgabe 615.** Prove the inequalities

$$n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \sqrt[n]{(n+1)!} \geq 1 + \sqrt[n]{n!}, \quad \sqrt[n]{(n+1)!!} \geq 1 + \sqrt[n]{n!!}$$

where  $n!! = 1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot n!$ .

Ž. MITROVIĆ, Vranje (Yugoslavia)

**Aufgabe 616.** Show that for  $m > 3$  the Diophantine equation

$$x^{2^m-2} + y^{2^m-2} = p z^{2^m-2}$$

has no solution with coprime integers  $x, y, z$  if  $p \equiv 1$  or  $2 \pmod{2^m}$ .

J. M. GANDHI, Edmonton (Canada)

**Aufgabe 617.** Démontrer que pour tout nombre naturel  $m$  il existe au moins un nombre triangulaire qui est, de  $m$  façons au moins, une somme de deux nombres triangulaires.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

## Literaturüberschau

*Introduction to Analytic Number Theory.* Von K. CHANDRASEKHARAN. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 148. 140 Seiten mit 4 Figuren. DM 28,-. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg und New York 1969.

Die ersten vier Kapitel dieses aus einer Vorlesung an der ETH hervorgegangenen Buches sind der elementaren Zahlentheorie gewidmet (Primfaktorzerlegung, Kongruenzen, Rationale Approximationen von Irrationalzahlen (Satz von Hurwitz), Quadratische Reste, Summen von zwei und vier Quadraten). Die analytischen Methoden setzen im 5. Kapitel beim Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes ein, das aus einer (mit komplexer Integration gewonnenen) Reziprozitätsformel für verallgemeinerte Gauss'sche Summen hergeleitet wird. Nur reelle Analysis ist notwendig für die Untersuchung der arithmetischen Funktionen und ihrer summatorischen Funktionen (6. Kapitel) sowie für die elementare Theorie der Primzahlverteilung (Satz von Chebyshev, Bertrandsche Vermutung, Formeln von Euler und Mertens) im 7. Kapitel. Kapitel 8 behandelt Sätze von Weyl und Kronecker über Gleichverteilung mod 1. Kapitel 9 enthält einen Beweis von Siegel für den Satz von Minkowski über Gitterpunkte in konvexen Bereichen. Die komplexe Funktionentheorie kommt in den letzten beiden Kapiteln beim Beweis des Dirichletschen Satzes über die arithmetische Progression und des Primzahlsatzes nochmals zur Anwendung.

Dieses sorgfältig und klar abgefasste Werk bietet die willkommene Möglichkeit, sich von berufenster Hand in klassische Gebiete von unvergänglicher Schönheit einführen zu lassen.

E. TROST