

<b>Zeitschrift:</b>	Elemente der Mathematik
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	25 (1970)
<b>Heft:</b>	1
<b>Artikel:</b>	Über Krümmungen höherer Ordnung in den Scheitelpunkten einiger ebener Kurven und deren konstruktive Auswertung
<b>Autor:</b>	Schröder, Eberhard
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-27348">https://doi.org/10.5169/seals-27348</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Damit sind nach dem Hilfssatz in Nr. 5 alle Möglichkeiten erschöpft, und das Endergebnis lautet:

*Durch jede Viviani-Kurve lässt sich eine einzige reguläre Kreisringfläche  $\Psi$  legen; ihr Mittenkreis hat einen Halbmesser, der gleich dem eineinhalbfachen Meridianhalbmesser ist.*

Auf die durch eine Viviani-Kurve  $v$  legbaren *Dupinschen Zyklen* soll an anderer Stelle eingegangen werden. Je zwei dieser Flächen, zu denen auch unsere spezielle Kreisringfläche  $\Psi$  gehört, sind im Bezug auf die Trägerkugel von  $v$  invers.

JOSEF KRAMES, TH Wien

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] E. KRUPPA, *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie*, Wien 1957, §§ 28 und 85.
- [2] W. WUNDERLICH, *Darstellende Geometrie I*, B-I-Hochschultaschenbücher 96, 96a, Mannheim, S. 173.

## Über Krümmungen höherer Ordnung in den Scheitelpunkten einiger ebener Kurven und deren konstruktive Auswertung

Die Darstellung ebener Kurven durch Stützfunktionen und ihre ersten Ableitungen erweist sich für differentialgeometrische Untersuchungen z. B. an Eilinien, bei denen die erforderlichen Differenzierbarkeitsbedingungen erfüllt sind, als vorteilhaft. Im folgenden soll diese Darstellungsweise auf Kegelschnitte angewandt werden, wobei ein Brennpunkt als Pol der Stützfunktion fungieren soll. So gestaltet sich die Einführung der Stützfunktion besonders einfach, weil die auf einen Brennpunkt eines Mittelpunktskegelschnittes bezogene Fusspunktcurve mit dem Hauptscheitelkreis des Kegelschnittes identisch ist. Bei der Parabel fällt die auf den Brennpunkt bezogene Fusspunktcurve mit der Scheiteltangente zusammen.

Für die folgenden Rechnungen werde der Brennpunkt des darzustellenden Kegelschnittes in den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems gelegt. Ferner sei der Hauptscheitelkreis durch die Gleichung

$$(x - t)^2 + y^2 = (s - t)^2$$

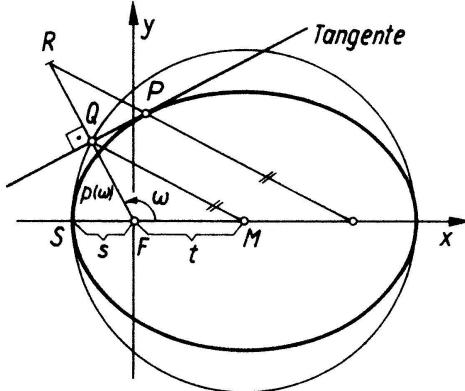
gegeben.

Von den Parametern  $s$  und  $t$ , deren geometrische Bedeutung aus Bild 1 ersichtlich ist, werde vorausgesetzt:  $s < 0$ ,  $s \neq t$ ,  $2 \neq t$ . Wendet man auf das Dreieck  $FMQ$  den Cosinus-Satz der ebenen Trigonometrie an, erhält man nach elementarer Umformung für die Stützfunktion die Darstellung

$$\phi(\omega) = t \cos \omega - W \text{ mit } W = \sqrt{s^2 - 2s t + t^2 \cos^2 \omega}. \quad (1)$$

Unter Beibehaltung des in Figur 1 eingeführten Achsenkreuzes werde die analytische Darstellung des Kegelschnittes auf die entsprechend orientierte Gaußsche Zahlen-ebene bezogen. Man erhält so eine komplexe Funktion des reellen Parameters  $\omega$  der Gestalt

$$z(\omega) = (\phi + i \phi') e^{i\omega} = t - (W + i W') e^{i\omega}. \quad (2)$$



Figur 1

Ferner gilt für die  $n$ -te Evolute  $E_n$  ganz allgemein die Darstellung

$$E_n = z(\omega) - e^{i\omega} \sum_{k=0}^{n-1} i^k r_k \quad \text{mit } r_k = \phi^{(k)}(\omega) + \phi^{(k+2)}(\omega). \quad (3)$$

Für  $r_0 = \phi + \phi''$  ergibt sich in vorliegendem Fall

$$\phi + \phi'' = - \frac{s(s-2t)(s-t)^2}{W^3}. \quad (4)$$

Trägt man diese Grösse auf der zugehörigen Kurvennormalen gemäss der durch (3) aufgeprägten Orientierung ab, führt dies auf den entsprechenden Punkt der ersten Evolute. Aus (4) ergeben sich unter Verwendung der an Kegelschnitten üblichen Bezeichnungsweise

$$s = -a + e \quad \text{und} \quad t = e \quad (5)$$

für die Radien der Scheitelkrümmungskreise ( $\omega = \pi$  und  $\omega = 3/2\pi$ ) die zu erwartenden Ausdrücke

$$r_0(\pi) = \frac{a^2 - e^2}{a} \quad \text{bzw. } r_0\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - e^2}}$$

(im Fall der Ellipse). Die erste Ableitung von (4) liefert

$$\phi' + \phi''' = \frac{3}{W^5} s t^2 (t-s)^2 (2t-s) \sin \omega \cdot \cos \omega.$$

Der Krümmungsradius der ersten Evolute verschwindet hiernach für  $\omega = k\pi/2$  mit  $k = 1, 2, 3, 4$ . Dies bestätigt, dass die erste Evolute Spitzen in ihren den Scheiteln des Kegelschnittes zugeordneten Punkten aufweist. Die zweite Ableitung von (4) führt auf eine Darstellung für den Krümmungsradius der zweiten Evolute als Funktion von  $\omega$ .

Sie lautet:

$$\dot{p}'' + \dot{p}''' = \frac{-3}{W^7} (s^2 - 2s t) (s - t)^2 t^2 \{5 t^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega + W^2 (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega)\} \quad (6)$$

Setzt man darin  $\omega = \pi$  bzw.  $\omega = 3\pi/2$ , so folgt mit den in (5) eingeführten Bezeichnungen für die den Scheiteln zuzuordnenden Krümmungsradien der zweiten Evolute:

$$r_2(\pi) = \frac{3 (a^2 - e^2) e^2}{a^3} \text{ bzw. } r_2 \left( \frac{3}{2} \pi \right) = \frac{3 a^2 e^2}{(a^2 - e^2)^{3/2}}$$

(im Fall der Ellipse). Für die folgenden Betrachtungen werde der Scheitelpunkt  $S$  und die Grösse

$$\dot{p}(\omega) + \dot{p}''(\omega) = - \frac{s (s - 2t)}{s - t}$$

(Radius des Scheitelkrümmungskreises) festgehalten. Dagegen soll der Mittelpunkt  $M$  des Scheitelkreises in seiner Lage auf der allen Kegelschnitten des Büschels gemeinsamen Achse variieren, und es interessiert die Zuordnung, welche zwischen  $M$  und dem auf  $S$  bezogenen Punkt  $E_3$  der dritten Evolute besteht.

Die weiteren Rechnungen orientieren wir auf einen in der gemeinsamen Achse liegenden Zahlenstrahl mit  $S$  als Nullpunkt. Darauf werde dem Punkt  $M$  die Koordinate  $X_1$  und dem Punkt  $E_3$  die Koordinate  $X_2$  zugeordnet. Setzt man ausserdem

$$r_0 = - \frac{s (s - 2t)}{s - t}, \quad \text{so gilt } X_1 = s - t \text{ und } X_2 = r_0 \frac{s^2 - 2s t - 2t^2}{(s - t)^2}.$$

Die Punktreihen  $\{M\}$  und  $\{E_3\}$  sind folglich durch eine projektive Verwandtschaft in vereinigter Lage miteinander verknüpft, welche durch die Gleichung

$$X_1 X_2 + 2r_0 X_1 - 3r_0^2 = 0 \quad (7)$$

beschrieben wird.

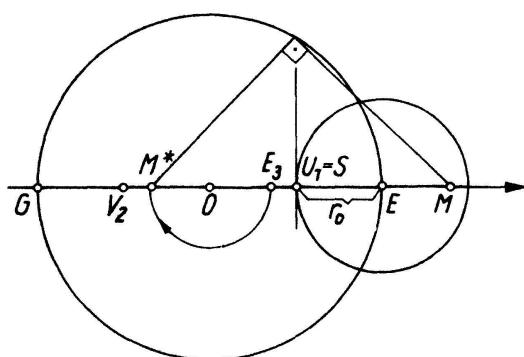
$\{M\}$  und  $\{E_3\}$  bilden auf der gemeinsamen Trägergeraden entgegengesetzt laufende Punktreihen mit sich selbst entsprechenden Punkten bei  $E = r_0$  und  $G = -3r_0$ .

Die Gegenpunkte dieser Projektivität liegen bei  $U_1 = 0$  und  $V_2 = -2r_0$ .

Daraus resultiert für die Potenz dieser Projektivität

$$\overline{U_1 X_1} \cdot \overline{V_2 X_2} = 3r_0 \quad (8)$$

und die Charakteristik der Projektivität  $\delta = -1/3$ .



Figur 2

Ferner lässt sich aus Gleichung (7) und (8) die in Figur 2 angegebene Konstruktionsvorschrift für ein Paar einander zugeordneter Punkte auf der dem Kegelschnittbüschel gemeinsamen Achse ableiten. Die gefundenen Ergebnisse werden in folgendem Satz zusammengefasst:

Für ein Büschel von Kegelschnitten mit gemeinsamen Scheitelpunkt  $S$  und Scheitelkrümmungskreis  $\kappa$  besteht auf der diesen Kegelschnitten gemeinsamen Achse eine projektive Punktverwandtschaft zwischen den Mittelpunkten  $M$  dieser Kegelschnitte und den auf  $S$  bezogenen Punkten  $E_3$  der dritten Evoluten.

Die Punktverwandtschaft wird durch Gleichung (7) beschrieben.

Wesentliche metrische Aussagen über die Kegelschnitte des Büschels lassen sich bei variabler Lage von  $E_3$  bezüglich des gemeinsamen Scheitelkrümmungskreises wie folgt zusammenfassen:

Lage von  $E_3$  bezüglich des

Scheitelkrümmungskreises  $\kappa$

$X_2 > r_0$

Art des zugeordneten Kegelschnittes

Ellipsen mit  $S$  als Nebenscheitel

$X_2 = r_0$

Kreis (identisch mit dem Scheitelkrümmungskreis  $\kappa$ )

$-2r_0 < X_2 < r_0$

Ellipsen mit  $S$  als Hauptscheitel

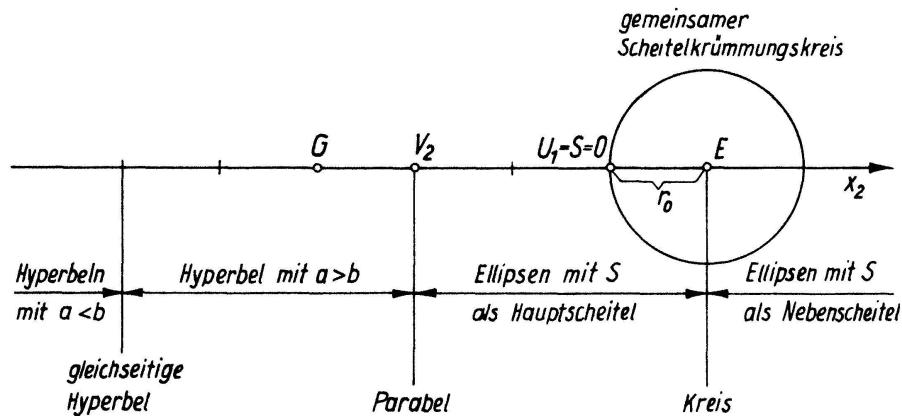
$X_2 = -2r_0$

Parabel

$X_2 < -2r_0$

Hyperbeln

Gilt speziell  $X_2 = -5r_0$ , liegt eine gleichseitige Hyperbel vor. In den sich selbst entsprechenden Punkten  $E$  und  $G$  fällt der Mittelpunkt des Kegelschnittes mit dem auf  $S$  bezogenen Punkt der dritten Evolute zusammen. Im ersten Fall handelt es sich um einen Kreis und im zweiten Fall um eine Hyperbel, deren Achsen die Proportion  $a:b = \sqrt{3}:1$  erfüllen (Figur 3).



Figur 3

Die hier gefundene projektive Punktverwandtschaft soll bei näherungsweiser Konstruktion der Biegelinie eines auf Druck belasteten homogenen Stabes der Länge  $l_0$  angewendet werden. Entsprechend dem in Bild 4 vorgelegten Belastungsfall lautet die Differentialgleichung der Biegelinie:

$$y'' + \mu y (1 + y'^2)^{3/2} = 0 \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{P}{E J} \quad \text{und} \quad P = \frac{E J \pi^2}{l_0^2}. \quad (9)$$

Für den Scheitelpunkt der Biegelinie gelten die Bedingungen

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = d \quad \text{und} \quad y'\left(\frac{l}{2}\right) = 0.$$

Daraus resultiert durch Einsetzen in die Differentialgleichung und ihre weiteren Ableitungen:

$$y''\left(\frac{l}{2}\right) = -\mu d, \quad y'''\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \quad \text{und} \quad y''''\left(\frac{l}{2}\right) = \mu^2 d (1 - 3\mu d^2). \quad (10)$$

Weiterhin lassen sich die höheren Ableitungen durch die Krümmungsradien dieser Kurve und ihrer ersten und zweiten Evolute – auf den Scheitelpunkt der Biegelinie bezogen – ausdrücken. Es bestehen die Gleichungen:

$$y''\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{r_0}, \quad y'''\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{r_1}{r_0^3}, \quad y''''\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{r_0^5} (3r_0^2 + 3r_1^2 - r_0 r_2). \quad (11)$$

Aus dem Vergleich der Darstellungen (10) und (11) für die höheren Ableitungen folgt:

$$r_0 = -\frac{1}{\mu d}, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = -\frac{1}{\mu^2 d^3}, \quad r_0^2 = -dr_2. \quad (12)$$

Die Krümmungsradien  $r_0$  und  $r_2$  sind auf der Kurvennormalen von  $S$  bzw.  $E_1$  aus gemäss der Darstellung (3) für die  $n$ -te Evolute abzutragen. Allgemein stellt ein Schmiegkegelschnitt an eine Kurve eine Hyperbel, Parabel, Ellipse dar, falls für die ersten drei Krümmungsradien beziehentlich folgende Bedingung gilt:

$$9r_0^2 + 4r_1^2 - 3r_0 r_2 \leq 0. \quad (13)$$

Setzt man darin die in (9) und (12) angeführten Grössen ein, folgt für die Art des im Scheitelpunkt von 5. Ordnung berührenden Schmiegkegelschnittes

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\pi d - l_0 &< 0 \text{ Hyperbel,} \\ \sqrt{3}\pi d - l_0 &= 0 \text{ Parabel,} \\ \sqrt{3}\pi d - l_0 &> 0 \text{ Ellipse mit } S \text{ als Hauptscheitel.} \end{aligned}$$

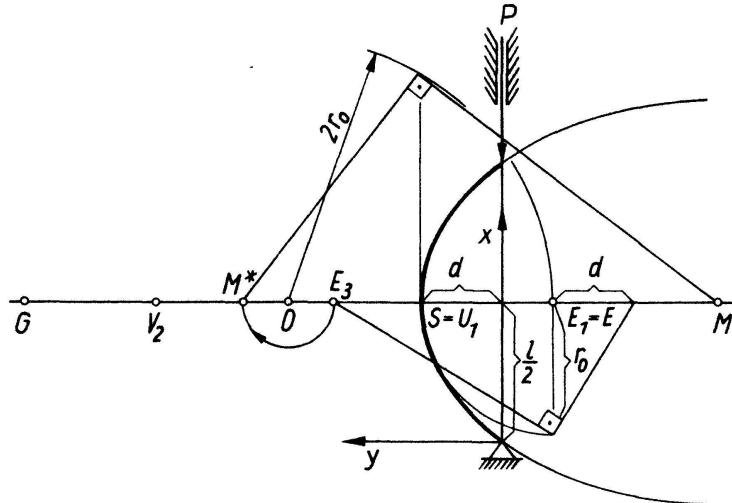
Hierin bedeuten  $d$  die Auslenkung des Stabmittelpunktes  $S$  aus der entspannten Lage und  $l_0$  die Länge des unverformten Stabes, also zwei der Messung unmittelbar zugängliche Grössen.

Bei näherungsweiser Berechnung der Biegelinie wird i. allg. das Glied  $y'^2$  der Differentialgleichung als vernachlässigbar klein gegen 1 angesehen. Die Rechnung führt unter dieser vereinfachenden Annahme auf eine Sinuslinie. Da diese Kurve jedoch nur Hyperbeln als Schmiegkegelschnitte zulässt, die in Bezug auf die Wendepunkte in doppelt zählende Geraden, nämlich die zu diesen Punkten gehörigen Wendetangenten zerfallen, dürfte die Beschreibung der Biegelinie für  $\sqrt{3}\pi d > l_0$  durch eine Sinuslinie eine kaum brauchbare Annäherung sein.

Figur 4 zeigt die Konstruktion des Schmiegkegelschnittes im Scheitelpunkt der Biegelinie aus den Grössen  $l_0$  und  $d$  für den Fall  $\sqrt{3}\pi d > l_0$  unter Ausnutzung der zwischen  $M$  und  $E_3$  bestehenden projektiven Punktverwandtschaft. Der Kegelschnitt nähert die tatsächliche Biegelinie im Scheitelpunkt von 5. Ordnung an, während die

Sinuslinie nur eine Näherung dritter Ordnung darstellt. Der relative Fehler des Krümmungsradius  $r_2$  der zweiten Evolute bezüglich des Scheitelpunktes beläuft sich bei der Sinuslinie auf

$$\left| \frac{\Delta r_2}{r_2} \right| = \frac{3 \pi^2 d^2}{l_0^2}.$$



Figur 4

Ausbiegungen von Stäben unter Druckbelastung in der hier betrachteten Grössenordnung kann man z. B. bei den in verschiedenen Sportarten verwendeten Glasfaserstäben beobachten.

Abschliessend sollen die Bilder der Funktionen  $y = \cos c x - 1$  und  $y = \cosh c x - 1$  in ihrem gemeinsamen Scheitelpunkt  $S$  auf die höheren Krümmungsradien untersucht und die zugehörigen Schmiegkegelschnitte konstruiert werden.

Die sinngemäss Anwendung der Formeln (11) auf die Cosinus-Linie im Punkt  $S(0, 0)$  ergibt für die ersten drei Krümmungsradien folgende Werte:

$$r_0 = -\frac{1}{c^2}, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = -\frac{1}{c^4} (1 + 3 c^2). \quad (14)$$

Für die Kettenlinie erhält man in gleicher Weise:

$$r_0 = \frac{1}{c^2}, \quad \bar{r}_1 = 0, \quad \bar{r}_2 = -\frac{1}{c^4} (1 - 3 c^2). \quad (15)$$

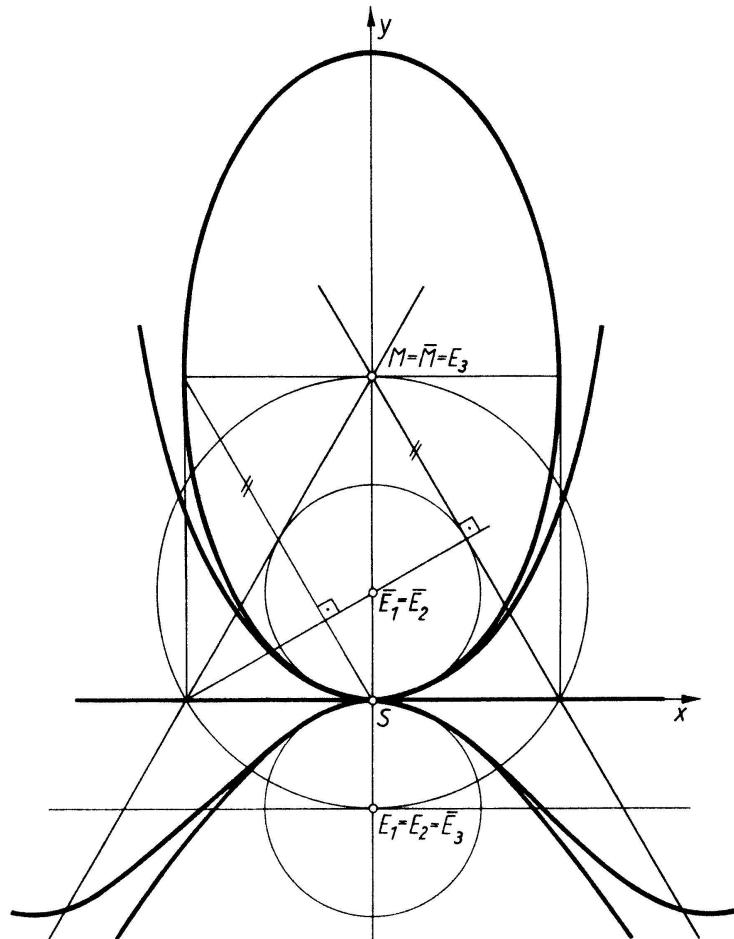
Aus (13) folgt, dass der in  $S$  von 5. Ordnung berührende Schmiegkegelschnitt für die Cosinus-Linie eine Hyperbel und für die Kettenlinie eine Ellipse darstellt. Die auf den gemeinsamen Scheitelpunkt  $S$  bezogene Evoltenpunkte  $E_i$  bzw.  $\bar{E}_i$  liegen auf der  $y$ -Achse.

Nach (3), (14) und (15) ergeben sich die Koordinaten

$$E_1 \left( 0, -\frac{1}{c^3} \right), \quad E_3 \left( 0, \frac{1}{c^4} (1 + 2 c^2) \right) \text{ bzw. } \bar{E}_1 \left( 0, \frac{1}{c^2} \right), \quad \bar{E}_3 \left( 0, \frac{1}{c^4} (1 - 2 c^2) \right).$$

Damit errechnen sich nach Gleichung (7) für die Mittelpunkte  $M$  und  $\bar{M}$  der Schmiegkegelschnitte bezüglich des gemeinsamen Scheitelpunktes die Koordinaten  $M(0, 3)$  und  $\bar{M}(0, 3)$ .

Dieses Ergebnis zeigt, dass die beiden Schmiekegelschnitte einen gemeinsamen, von  $c$  unabhängigen Mittelpunkt und gemeinsame Achsen haben. Die Diagonalen des Achsenrechtecks der Ellipse (Schmiekegelschnitt der Kettenlinie in  $S$ ) sind zugleich die Asymptoten der Hyperbel (Schmiekegelschnitt der Cosinus-Linie in  $S$ ). Im Fall  $c = 1$  gilt für das Achsenverhältnis  $a : b = \sqrt{3} : 1$  (Bild 5).



Figur 5

Für  $c = 1/\sqrt{3}$  ist der Schmiekegelschnitt an die Kettenlinie ein Kreis mit dem Radius  $r = 3$  und an die Cosinus-Linie eine gleichseitige Hyperbel. Die zwischen den Krümmungsradien und Schmiekegelschnitten der beiden Funktionen bestehenden Wechselbeziehungen resultieren aus der Gleichung  $\cos c x = \cosh c i x$ .

EBERHARD SCHRÖDER, TU Dresden

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] PH. WEINMEISTER, *Über höhere Evoluten*. Sitzungsber. und Abhandl. der Isis, Sektion Mathematik 1910, S. 113–119.
- [2] H. WIELEITNER, *Spezielle ebene Kurven* (Göschens-Verlag, Leipzig 1908), S. 7.
- [3] K. STRUBECKER, *Differentialgeometrie I, Kurventheorie der Ebene und des Raumes* (de Gruyter, Berlin 1964), S. 120.
- [4] M. LINDOW, *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (Verlag B. G. Teubner, Leipzig 1951), S. 71–73.