Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 24 (1969)
Heft: 6

Rubrik: Ungelöste Probleme

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ungelöste Probleme

Nr. 51. Es bezeichne $A \subset R$ einen eigentlichen konvexen Körper des dreidimensionalen euklidischen Raumes R und A' den Normalriss von A in eine hier fest gewählte, und auch nachfolgend stets gleichbleibende Ebene $E \subset R$. Da A innere Punkte aufweist, trifft dies auch für den Eibereich A' bezüglich seiner Trägerebene E zu. Bedeuten V und F bzw. f und l das Volumen und die Oberfläche von A bzw. den Flächeninhalt und den Umfang von A', so ist offenbar $V, F, f, l > 0$.

Es liegt auf der Hand, die Quotienten $q = F/V$ und $q' = l/f$, also die Verhältnisse von Mass und Randmass des Körpers A und seiner Projektion A', miteinander zu vergleichen. Für einige einfache Testfälle sollen die Befunde festgestellt und in der nachfolgenden Tafel eingetragen werden.

I. A = Kugel vom Radius 1; II. A = Würfel der Kantenlänge 1, E parallel zu einer Seitenfläche; III. A = reguläres Tetraeder der Kantenlänge 1, E parallel zu einer Seitenfläche; IV. A = Kegel vom Radius 1 und der Höhe 1, E parallel zur Grundfläche; V. A = Kegel vom Radius 1 und der Höhe 1, E orthogonal zur Grundfläche.

A	q	q'
I	3	2
II	6	4
III	$6\sqrt{6}$	$4\sqrt{3}$
IV	$3 + 3\sqrt{2}$	2
V	$3 + 3\sqrt{2}$	$2 + 2\sqrt{2}$

Wie unmittelbar ablesbar, gilt in diesen Fällen stets $q > q'$ und viele weitere Experimente würden die Vermutung bekräftigen, dass hinter diesem Erfahrungsresultat ein allgemein gültiger Satz stehen könnte, wonach für den ähnlichkeitsinvariant angesetzten Quotienten

$$p = q/q' = Ff/Vl \tag{1}$$

stets $p > 1$ gelten dürfte. Ein Indiz liefert auch die Feststellung, dass dies für rotationssymmetrische Eikörper jedenfalls dann zutrifft, wenn E orthogonal zur Rotationsachse gewählt wird. In der Tat gilt nach einer bekannten Ungleichung[1]) $6\,V \leqslant a\,(3\,F - 4\,\pi\,a^2)$, wobei a den Äquatorradius von A anzeigt. Der Normalriss A' ist dann kongruent mit einem Äquatorkreis von A, sodass also $f = \pi\,a^2$ und $l = 2\,\pi\,a$ gilt. Mit einfacher Umrechnung resultiert jetzt $p \geqslant 1 + (2\,\pi\,a^3/3\,V)$, wobei Gleichheit für ein Zylotop, d.h. für einen Zylinder mit zwei aufgesetzten Halbkugeln besteht.

[1]) Math. Ann. *122* (1950); Seite 175 (Ib).

Wir präzisieren nun die aufgeworfene Frage, indem wir mit dem Ansatz

$$p_0 = \inf p = \inf (Ff/Vl) \tag{2}$$

das Problem aufzeigen, das auf alle eigentlichen Eikörper A des gewöhnlichen Raumes R bezogene Infimum p_0 des Quotientenverhältnisses

$$p = p(A) = [F(A)/V(A)]/[l(A')/f(A')] \tag{3}$$

zu ermitteln.

Zunächst kann man leicht erkennen, dass

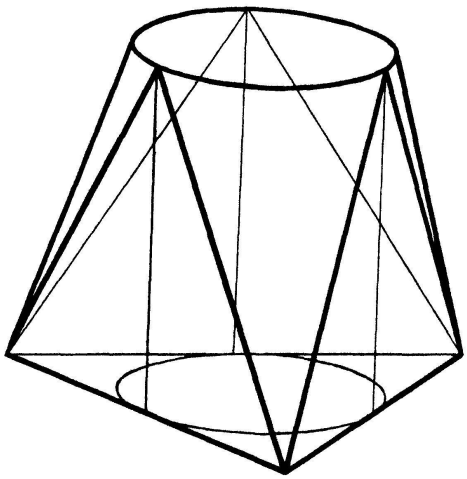
$$p_0 \leqslant 1 \tag{4}$$

ausfallen muss. Ist nämlich A ein gerader Kreiszylinder vom Radius 1 und der Höhe h und wählt man E orthogonal zur Rotationsachse, so ergibt sich $p = (1 + h)/h$, sodass mit $h \to \infty$ auf (4) geschlossen werden kann.

Nach der eingangs erörterten Hypothese, wonach stets $p > 1$ gelten müsste, würde andererseits $p_0 \geqslant 1$ sein, sodass sich mit $p_0 = 1$ die vollständige Lösung des aufgeworfenen Problems kennzeichnen liesse.

Leider ist aber die Vermutung, die sich mit der Musterung vieler Beispiele aufdrängt, falsch!

Dies wollen wir nachfolgend zeigen: Es sei K ein Kreisbereich vom Radius 1, D ein in der parallelen Ebene E im Abstand h liegendes reguläres Dreieck der Seitenlänge $2\sqrt{3}$, derart, dass die Verbindungsgerade des Zentrums von K mit dem Schwerpunkt von D auf E orthogonal steht. Der Normalriss von K in die Ebene E fällt dann mit dem Inkreis von D zusammen. Die konvexe Hülle von K und D im Raum R ist ein allgemeines Prismatoid P mit der Deckfläche K, der Grundfläche D und der Höhe h (vgl. hierzu die Figur).



Für die erforderlichen Rechnungen ist es nützlich, das Prismatoid P durch die Schnittbereiche $S(t)$ zu kennzeichnen, die von den Ebenen parallel zu E im Abstand th $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ von der Grundebene E aus P ausgeschnitten werden. Es ist nämlich $S(t) = (1 - t)\, D + t\, K$, wobei die angeschriebene Verbindung die Minkowskische Linearkombination bezeichnet. $S(t)$ ist der äussere Parallelbereich eines regulären

Dreiecks der Seitenlänge $2\sqrt{3}\,(1-t)$ der Spanne t. Für Flächeninhalt und Umfang ergeben sich die Formeln

$$f(t) = 3\sqrt{3}\,(1-t^2) + \pi t^2; \quad l(t) = 6\sqrt{3}\,(1-t) + 2\pi t\,.$$

Offensichtlich sind $f = f(0) = 3\sqrt{3}$ und $l = l(0) = 6\sqrt{3}$ die Masszahlen des Normalrisses P' von P. Mit passender Integration gewinnt man

$$V = [(6\sqrt{3} + \pi)/3]\,h\,,$$

$$F = 3\sqrt{3}\,(1+h) + \pi + 3\int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + h^2 - 4\cos w\,(1-\cos w)}\;dw\,.$$

Mit naheliegender einfacher Abschätzung resultiert

$$F < (3\sqrt{3} + \pi)\,(1 + \sqrt{1+h^2})\,,$$

sodass sich gemäss (1)

$$p < \frac{9\sqrt{3} + 3\pi}{12\sqrt{3} + 2\pi}\left(\frac{1+\sqrt{1+h^2}}{h}\right)$$

ergibt. Mit $h \to \infty$ schliesst man nach (2) auf

$$p_0 \leqslant (9\sqrt{3} + 3\pi)/(12\sqrt{3} + 2\pi) \sim 0{,}924\ldots, \tag{5}$$

sodass also jedenfalls $p_0 < 1$ ausfällt.

Schliesslich wollen wir noch darauf hinweisen, dass sich die Frage nach dem Wert von p_0 nicht etwa dadurch trivialisiert, dass p beliebig kleine Werte annehmen kann, sodass $p_0 = 0$ wäre, sondern dass gezeigt werden kann, dass stets $p > 1/2$ gilt. Der Nachweis kann an dieser Stelle nicht geführt werden. Im Hinblick hierauf wird mit Sicherheit

$$p_0 \geqslant 1/2 \tag{6}$$

gelten. Das hier vorgelegte ungelöste Problem lautet also: Welches ist der Wert des mit (2) angesetzten Infimums p_0 $(0{,}500 \leqslant p_0 \leqslant 0{,}924)$? H. HADWIGER

Kleine Mitteilungen

An Elementary Set Partition Problem

In an earlier note R. SCHNEIDERREIT [2] considers the problem of distributing the numbers $1, 2, \ldots, n$ into two boxes so that not more than m consecutive numbers are in the same box; permuting the numbers in a box or interchanging the boxes does not give a new distribution. If $F_m(n)$ denotes the number of such distributions it is shown that

$$F_m(n) = F_m(n-1) + \cdots + F_m(n-m)\,, \quad n > m \tag{1}$$