Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 24 (1969)
Heft: 6

Artikel: Extremale konvexe Rotationshalbkörper im V, F, M-Problem des R3
Autor: Bieri, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26652

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band 24 Heft 6 Seiten 121–144 10. November 1969

Extremale konvexe Rotationshalbkörper im V,F,M-Problem des R_3[1])

Herrn Prof. Dr. H. HADWIGER in Freundschaft zum 60. Geburtstag

Eine Ebene senkrecht zur Rotationsachse schneidet einen beliebigen konvexen Rotationskörper (wenn überhaupt) in einer Kreisscheibe. Lässt man die Ebene den Körper von einem Ende zum andern monoton durchlaufen und ist die Folge der Radien monoton[2]), so bezeichnen wir den Körper als konvexen *Rotationshalbkörper*. Sein grösster Radius, am Rande liegend, heisse a. h ist die Länge des eventuell vorhandenen Randzylinders.

Die vorliegende Note bringt 8 Ungleichungen für die oben definierte Körperklasse H_a. Aus den ersten 4 lassen sich die Extremalkörper herleiten, welche bei vorgegebenem Integral der mittleren Krümmung M und ebensolcher Oberfläche F das absolute Maximum des Volumens V aufweisen. Es sind dies

a) Kappenkörper des Halbkugelzylinders von der festen Zylinderlänge $h^* = a\,(2 - \pi/4)$,

b) Halbkugelzylinder mit $h^* \geqslant h \geqslant a\,(\pi - 2)/2 = h^{**}$.

Interessanterweise sind die Kappenkörper der Halbkugel nicht extremal[3]).

1. Für die Körperklasse H_a hat Herr H. HADWIGER eine einheitliche Integraldarstellung der Masszahlen M, F, V angegeben, welche die bequeme Herleitung von 8 linearen Ungleichungen gestattet. Sie lautet:

$$\boxed{\begin{aligned} M &= \pi \int_0^{\pi/2} (a - r\sin^2\varphi)\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{\pi^2}{2}\,a + \pi h\,, \\ F &= \pi \int_0^{\pi/2} (a^2 - r^2\sin\varphi)\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} + \pi a^2 + 2\pi a h\,, \\ V &= \frac{\pi}{3} \int_0^{\pi/2} (a^3 - r^3)\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} + \pi a^2 h\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\pi/2 > \varphi \geqslant 0 \\ &a \geqslant r(\varphi) \geqslant 0\,, \\ &h \geqslant 0\,. \end{aligned}} \tag{1}$$

[1]) Die Anregung zu dieser Note stammt aus einer Vorlesung von Prof. H. HADWIGER: Elementarmathematik vom höhern Standpunkt aus, Sommer 1963.

[2]) Durch passende Wahl der Durchlaufungsrichtung lässt sich immer erreichen, dass die Radienfolge monoton nicht zunehmend ausfällt. Bei der gewählten Definition sind Körper mit zylindrischem Endstück inbegriffen.

[3]) Obschon die Halbkörper die einfachsten Körper sind, liegen die Verhältnisse doch wesentlich komplizierter als in der vollen Klasse K_a aller konvexen Rotationskörper: Dort einerlei Maximalkörper, nämlich die Kappenkörper der Kugel sowie monotones $y(x)$, hier zweierlei Maximalkörper, und $y(x)$ weist ein inneres Maximum auf.

2. Durch geeignete Kombination der Ausdrücke (1) erhalten wir die 8 linearen Ungleichungen[4])

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{1a} & F \leqslant 2\,a\,M - \pi\,(\pi+1)\,a^2\,, & {}^{5)} \\ \text{2a} & 3\,V \leqslant 3\,a^2\,M - \pi\,(8+3\,\pi)\,a^3/2\,, & \\ \text{3a} & 6\,V \leqslant 3\,a\,F - 5\,\pi\,a^3\,, & M \geqslant \pi\,(\pi/2+2)\,a \\ \text{4a} & 3\,V \leqslant 2\,a\,F - a^2\,M - \pi\,(4-\pi)\,a^3/2\,, & \\ \text{5a} & F \geqslant a\,M - \pi\,(\pi-2)\,a^2\,, & {}^{6)} \\ \text{6a} & 3\,V \geqslant a^2\,M - \pi^2\,a^3\,, & \\ \text{7a} & 3\,V \geqslant a\,F - 2\,\pi\,a^3\,, & M \geqslant \pi^2\,a \\ \text{8a} & V \geqslant a\,F - a^2\,M + \pi\,(\pi-2)\,a^3\,. & \end{array}} \tag{2}$$

Die ersten 4 sind gegenüber den entsprechenden der Note[4]) modifiziert und etwas unhandlicher. Die letzten 4 konnten unverändert übernommen werden, weil die dem Gleichheitszeichen zugeordneten Körper Halbkörper sind.

Das Gleichheitszeichen steht in den Ungleichungen 1a bis 3a für den *Halbkugelzylinder*, insbesondere also auch für die *Halbkugel*, in 4a dagegen allgemeiner für *Kappenkörper des Halbkugelzylinders*, insbesondere also auch für die *Kappenkörper der Halbkugel*. In den Ungleichungen 5a bis 7a gilt das Gleichheitszeichen für die *Kreisscheibe*, in 8a dagegen allgemeiner für *Zylinder*.

3. Es ist sehr zweckmässig, die Ungleichungen (2) auf Koordinaten im Blaschkediagramm umzurechnen, wobei man den Formkoeffizienten

$$\lambda = 4\,\pi\,a/M \quad (0 < \lambda \leqslant 4/\pi)$$

einführt. Man erhält:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{1b} & x \leqslant 2\,\lambda - \dfrac{(1+\pi)}{4}\,\lambda^2\,, & \\ \text{2b} & y \leqslant 3\,\lambda^2 - \dfrac{(8+3\,\pi)}{8}\,\lambda^{3'}\,, & \\ \text{3b} & y \leqslant \dfrac{3\,\lambda}{2}\cdot x - \dfrac{5}{8}\,\lambda^3\,, & 0 < \lambda \leqslant 8/(\pi+4) \\ \text{4b} & y \leqslant 2\,\lambda\cdot x - \lambda^2 - \dfrac{(4-\pi)}{8}\,\lambda^3\,, & \\ \text{5b} & x \geqslant \lambda - \dfrac{(\pi-2)}{4}\,\lambda^2\,, & \\ \text{6b} & y \geqslant \lambda^2 - \dfrac{\pi}{4}\,\lambda^3\,, & \\ \text{7b} & y \geqslant \lambda\cdot x - \dfrac{\lambda^3}{2}\,, & 0 < \lambda \leqslant 4/\pi \\ \text{8b} & y \geqslant 3\,\lambda\cdot x - 3\,\lambda^2 + \dfrac{3\,(\pi-2)}{4}\,\lambda^3\,. & \end{array}} \tag{3}$$

[4]) H. HADWIGER: Elementare Studie über konvexe Rotationskörper. Math. Nachrichten, 2. Bd., Heft 3/4, März/April 1949. Die vorliegende Note stützt sich auf diese Publikation, die alles Grundsätzliche enthält. Insbesondere werden die Bezeichnungen zum grössten Teil übernommen. Die Darstellung ist abgekürzt gehalten.

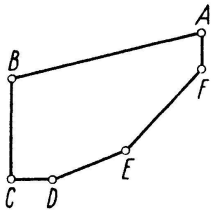
[5]) Herr HADWIGER hat auch für das restliche Intervall $\pi\,(\pi/2+2)\,a > M \geqslant \pi^2\,a$ Ungleichungen gefunden, die allerdings nicht linear sind.

[5])[6]) 1a–4a sowie 8a sind *ausziehinvariant*, 4a ausserdem *kappeninvariant*.

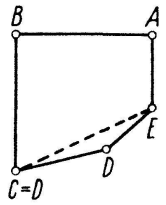
[6]) 5a–7a sind durch Herrn HADWIGER noch wesentlich verschärft worden.

Mit dem Gleichheitszeichen handelt es sich bei den Ausdrücken 3) um Strecken. Dieselben beranden in der Diagrammebene einen von λ abhängigen Sechseckbereich $P_6(\lambda)$ (Figur 1).

Für festes λ ist nun zwar $P_6(\lambda)$ festgelegt, nicht aber der genaue Bildbereich aller zulässigen Körper, Teilbereich von $P_6(\lambda)$. Zwar löst 4b mit der Aussage über die Körper, welche das Gleichheitszeichen beanspruchen sowie unter Berücksichtigung von 1b und 5b das Maximumproblem von $y(x)$. Unsere Kenntnisse über das Minimum von $y(x)$ aber sind sehr lückenhaft, gehört doch nur gerade der Bildpunkt des durch a und λ eindeutig bestimmten Zylinders zum scharfen Bildrand. Fortan lassen wir das Minimum aus dem Spiel und beschäftigen uns ausschliesslich mit dem Maximum von $y(x)$.



Figur 1[7])



Figur 2

4. Es geht jetzt darum, den obern Rand des Vereinigungsbereichs aller $P_6(\lambda)$ zu ermitteln. Zu diesem Zweck studieren wir die Abbildung

$$\boxed{\begin{aligned} & y = 2\lambda \cdot x - \lambda^2 - \left(\frac{4-\pi}{8}\right)\lambda^3, \\ & \lambda - \left(\frac{\pi-2}{4}\right)\lambda^2 \leqslant x \leqslant 2\lambda - \left(\frac{1+\pi}{4}\right)\lambda^2, \\ & 0 < \lambda \leqslant \frac{8}{\pi+4}. \end{aligned}} \tag{4}$$

Enveloppenbildung liefert:

$$\boxed{x^* = \lambda + \frac{3(4-\pi)}{16}\lambda^2, \quad y^* = \lambda^2 + \frac{(4-\pi)}{4}\lambda^3, \quad 0 < \lambda \leqslant \frac{8}{\pi+4}.} \tag{5}$$

Beide Koordinaten wachsen mit λ monoton. Wegen $dy^*/dx^* = 2\lambda$ ist die Enveloppe *von unten konvex* und liegt deshalb ganz nicht unterhalb der betrachteten Streckenschar (4). Also gehört sie (mindestens teilweise) zum obern Bildrand. Für die Enveloppe gelten die Relationen:

$$\boxed{\begin{aligned} 4F &= 4aM + 3\pi(4-\pi)a^2, \\ 3V &= a^2M + \pi(4-\pi)a^3. \end{aligned}} \tag{6}$$

[7]) $P_6(\lambda)$ ist nicht maßstäblich gezeichnet. Für die Halbkugel gilt speziell:

1b $x \leqslant \dfrac{48}{(\pi+4)^2}$; 2b $y \leqslant \dfrac{256}{(\pi+4)^3}$; 3b $y \leqslant \dfrac{12}{\pi+4} \cdot x - \dfrac{320}{(\pi+4)^3}$;

4b $y \leqslant \dfrac{16}{\pi+4} \cdot x - \dfrac{128}{(\pi+4)^3}$; 5b $x \geqslant \dfrac{8(8-\pi)}{(\pi+4)^2}$; 6b $y \geqslant \dfrac{64(4-\pi)}{(\pi+4)^3}$;

7b $y \geqslant \dfrac{8}{\pi+4} \cdot x - \dfrac{256}{(\pi+4)^3}$; 8b $y \geqslant \dfrac{24}{\pi+4} \cdot x - \dfrac{192(8-\pi)}{(\pi+4)^3}$.

(6) ist kappeninvariant. Es genügt deshalb, die Masszahlen des Halbkugelzylinders

$$\boxed{\begin{aligned} V &= \frac{\pi a^3}{3}(2+3q)\,, \\ F &= \pi a^2 (3+2q)\,, \qquad q = h/a > 0\,, \\ M &= \pi a (\pi/2 + q)\,. \end{aligned}} \tag{7}$$

in (6) einzusetzen, um das auf den ersten Blick überraschende Ergebnis

$$\boxed{q^* = 2 - \pi/4} \tag{8}$$

zu erhalten.

Nun zeigt sich aber, dass die gefundenen speziellen Kappenkörper des Halbkugelzylinders nur das Teilintervall $0 < \lambda < 16/(16+\pi)$ beanspruchen. Im restlichen Teilintervall $16/(16+\pi) \leqslant \lambda \leqslant 8/(4+\pi)$ umhüllt (5), wie man leicht nachprüft, nicht mehr die betrachteten Strecken, sondern ihre rechtsseitigen Verlängerungen. Es ist deshalb die von A (Figur 1) beschriebene Kurve ins Auge zu fassen, also die Bildkurve der Halbkugelzylinder. Für sie gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} x^{**} &= 2\lambda - \frac{(1+\pi)}{4}\lambda^2\,, \\ y^{**} &= 3\lambda^2 - \frac{(8+3\pi)}{8}\lambda^3\,; \qquad \frac{16}{16+\pi} \leqslant \lambda \leqslant \frac{8}{4+\pi}\,, \end{aligned}} \tag{9}$$

Die Kurve (9) durchläuft für $\lambda_2 = 16/(8+3\pi)$ einen Scheitel bezüglich der x-Achse, hernach für $\lambda_3 = 4/(1+\pi)$ einen Scheitel bezüglich der y-Achse und mündet mit $\lambda = 8/(4+\pi)$ in den Bildpunkt der Halbkugel ein (Figur 3). Da von S_3 an die Kurve rückläufig ist und kein Doppelpunkt existiert, fällt der Teilbogen $\widehat{S_3H}$ für das Maximum von $y(x)$ aus[8]).

Endlich ist noch das Restintervall $8/(4+\pi) > \lambda \geqslant 4/\pi$ zu erledigen[9]). Eine weitläufige, in dieser Note wegzulassende Untersuchung zeigt, dass (Figur 2) nicht A, der dem Extremalkörper zugeordnete Punkt, sondern B entscheidet. Die Koordinaten der B-Kurve fallen mit wachsendem λ monoton, und diese Kurve verläuft weit unter dem obern Bildrand (somit auch die A-Kurve).

Damit können wir folgendes Schlussergebnis formulieren:

Im Intervall $0 < x < x_1$ besitzen spezielle Kappenkörper des Halbkugelzylinders, im Intervall $x_1 \leqslant x \leqslant x_3$ Halbkugelzylinder mit $h^* \geqslant h \geqslant h^{**}$ bei vorgegebenem x das absolute Maximum von y (Figur 3).[10])

(10)

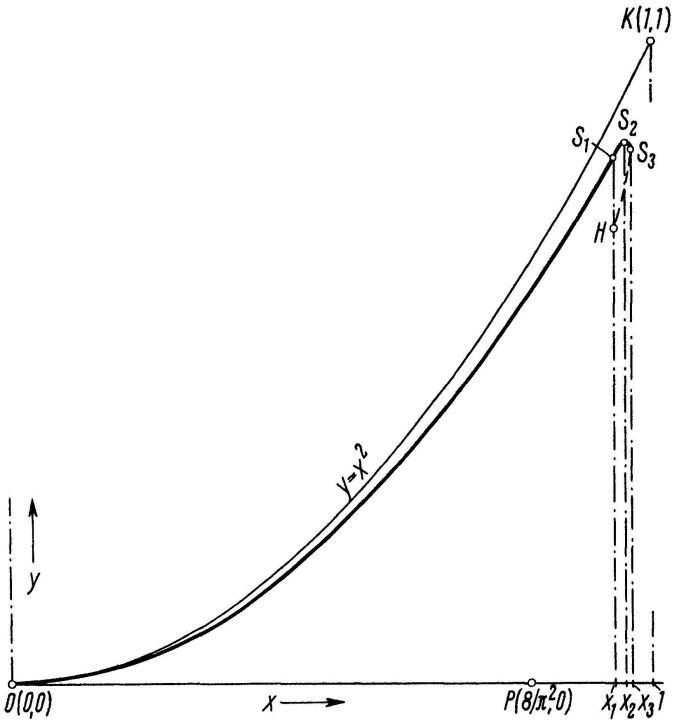
[8]) Dass kein anderer Rand in Frage kommt, folgt aus der Untersuchung von $y_\lambda = 0$. Überdies kann direkt berechnet werden, dass die Steigung der Halbkugelzylinderkurve im zulässigen Intervall kleiner ist als 2λ, die Steigung der Strecken. Ferner kann man zeigen, dass die beiden Kurven in S_1 tangential anschliessen, so dass keine Ecke auftritt.

[9]) Vergleiche H. HADWIGER: Math. Nach. 2, 114 (1949); 13, 19 (1955); 14, 377 (1956); Math. Annalen 122, 175 (1950); Abh. math. Sem. Hamburg. Uni. 18, 38 (1952); El. Math. 12, 101 (1957).

[10]) In (5) und (9) liesse sich noch λ eliminieren, und man erhielte Ungleichungen in x und y. Dieselben fallen aber im Gegensatz zum analogen Problem in der vollen Klasse K_a kompliziert und sogar irrational aus, weshalb wir darauf verzichten.

Punkt	λ	x	y	q
S_1	$\dfrac{16}{16+\pi}$	$\dfrac{32\,(14-\pi)}{(16+\pi)^2}$	$\dfrac{256\,(32-3\,\pi)}{(16+\pi)^3}$	$2-\pi/4>1$
S_2	$\dfrac{16}{8+3\,\pi}$	$\dfrac{32\,(6+\pi)}{(3\,\pi+8)^2}$	$\dfrac{256}{(8+3\,\pi)^2}$	$\pi/4<1$
S_3	$\dfrac{4}{1+\pi}$	$\dfrac{4}{1+\pi}$	$\dfrac{8\,(3\,\pi-2)}{(1+\pi)^3}$	$\pi/2-1$
H	$\dfrac{8}{4+\pi}$	$\dfrac{48}{(\pi+4)^2}$	$\dfrac{256}{(4+\pi)^3}$	0

$$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\lambda_H\,; \qquad x_H<x_1<x_2<x_3\,.$$



Figur 3 (maßstäblich)

Damit ist aber auch bewiesen, dass die gefundenen Extremalkörper bei vorgegebenem M und ebensolchem F grösstes Volumen V aufweisen[11]).

H. BIERI, Bern

[11]) Es stellt sich noch die Frage, ob man die Klasse der Vergleichskörper auf konvexe Nichtrotationskörper erweitern könnte. Dies ist zu vermuten und kann in einem (y, z)-Diagramm mit Hilfe der Schwarzschen Abrundung in gewissem Umfang bewiesen werden.