

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 24 (1969)
Heft: 5

Artikel: Diagonalen im regulären n-Eck
Autor: Harborth, Heiko
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-26651>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Diagonalen im regulären n -Eck

Zeichnet man in einem konvexen n -Eck alle möglichen Diagonalen, so kann man nach den Anzahlen der entstehenden Teilflächen $F(n)$, der Seitenlinien $K(n)$ und der Eckpunkte $E(n)$ fragen (vgl. [1, 2]). Es soll dabei berücksichtigt werden, dass sich mehr als zwei Diagonalen in nur einem Punkt schneiden können.

Bedeutet $E_\nu(n)$ die Anzahl der Punkte, in denen sich genau ν Diagonalen schneiden, so folgt

$$E(n) = n + \sum_{\nu=2}^{[n/2]} E_\nu(n) . \quad (1)$$

Mit $F_\nu(n)$ als der Anzahl von ν -Ecken ergibt sich auf zwei Arten die Summe aller Ecken der Teilvielecke

$$\sum_{\nu=3}^n \nu F_\nu(n) = n(n-2) + \sum_{\nu=2}^{[n/2]} 2\nu E_\nu(n) . \quad (2)$$

Die Winkelsumme aller Teile berechnet sich ebenfalls auf zwei Arten zu

$$\pi \sum_{\nu=3}^n (\nu-2) F_\nu(n) = (n-2)\pi + 2\pi \sum_{\nu=2}^{[n/2]} E_\nu(n) . \quad (3)$$

Mit (2) und (3) folgt

$$F(n) = \sum_{\nu=3}^n F_\nu(n) = \binom{n-1}{2} + \sum_{\nu=2}^{[n/2]} (\nu-1) E_\nu(n) . \quad (4)$$

Für $K(n)$ gilt

$$2K(n) = n + \sum_{\nu=3}^n \nu F_\nu(n) , \quad (5)$$

mit (2) also

$$K(n) = \binom{n}{2} + \sum_{\nu=2}^{[n/2]} \nu E_\nu(n) . \quad (6)$$

Im weiteren sollen nur reguläre n -Ecke betrachtet werden. Ist n eine Primzahl bzw. eine ungerade Zahl, so wird in [3] bzw. [4] gezeigt, dass ausser den Eckpunkten keine Schnittpunkte von drei oder mehr Diagonalen auftreten. Da zu je vier der n Eckpunkte genau ein Diagonalschnittpunkt gehört und umgekehrt, und da man aus n Ecken auf $\binom{n}{4}$ verschiedene Arten vier auswählen kann, folgt für reguläre n -Ecke mit $n \equiv 1 \pmod{2}$

$$E(n) = n + \binom{n}{4} ; \quad F(n) = \binom{n-1}{2} + \binom{n}{4} ; \quad K(n) = \binom{n}{2} + 2 \binom{n}{4} . \quad (7)$$

Ist $n \equiv 0 \pmod{2}$, so werden die Anzahlen für $n \geq 6$ kleiner; dann gilt nämlich wegen des Mittelpunktes

$$E_{n/2}(n) = 1 , \quad (8)$$

und, da sich die $n/2$ Diagonalen in $\binom{n/2}{2}$ Punkten schneiden könnten, folgt

$$E_2(n) \leq \binom{n}{4} - \frac{n(n-2)}{8}. \quad (9)$$

Für gerades n mit $(n, 3) = 1$ soll nun die Anzahl von Diagonalschnittpunkten exakt bestimmt werden.

Die Lösungen von $w^n - 1 = 0$ in der komplexen Zahlenebene seien die Eckpunkte des regulären n -Ecks. Jede primitive n -te Einheitswurzel erzeugt alle übrigen durch Potenzieren. Seien a, b, c, d, g, h ganze Zahlen modulo n und $z = \exp(2\pi i/n)$, so sind drei beliebige Diagonalen durch

$$\begin{aligned} (a, b): \quad w &= u + i v = z^a + t_1(z^b - z^a), \\ (c, d): \quad w &= u + i v = z^c + t_2(z^d - z^c), \\ (g, h): \quad w &= u + i v = z^g + t_3(z^h - z^g) \end{aligned} \quad (10)$$

dargestellt. Durch Addition und Subtraktion des konjugiert Komplexen lassen sich die reellen Parameter t_1, t_2, t_3 eliminieren. Als notwendige und hinreichende Bedingung für einen gemeinsamen Schnittpunkt der drei Diagonalen ergibt sich dann

$$\frac{2(z^b - z^a)(z^d - z^c)(z^h - z^g)}{z^{a+b}z^{c+d}z^{g+h}} \begin{vmatrix} 1 & z^{a+b} & z^a + z^b \\ 1 & z^{c+d} & z^c + z^d \\ 1 & z^{g+h} & z^g + z^h \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Wegen $a \neq b, c \neq d, g \neq h$ muss die Determinante $D(z)$ verschwinden. Wird o. E. d. A. $g = 0$ gesetzt, so muss mit $D(z) = z^h A(z)$ gelten

$$A(z) = (1 - z^c)(1 - z^d)(1 - z^{a+b-h}) - (1 - z^a)(1 - z^b)(1 - z^{c+d-h}) = 0. \quad (12)$$

Da $(n, 3) = 1$, ist z^3 primitive n -te Einheitswurzel und daher muss auch $A(z^3) = 0$ erfüllt sein. Aus

$$\begin{aligned} A(z^3) - (1 + z^c + z^{2c})(1 + z^d + z^{2d})(1 + z^{a+b-h} + z^{2(a+b-h)}) A(z) \\ = (1 - z^a)(1 - z^b)(1 - z^{c+d-h}) B(z) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

folgt

$$\begin{aligned} B(z) &= (1 + z^c + z^{2c})(1 + z^d + z^{2d})(1 + z^{a+b-h} + z^{2(a+b-h)}) \\ &\quad - (1 + z^a + z^{2a})(1 + z^b + z^{2b})(1 + z^{c+d-h} + z^{2(c+d-h)}) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

weil für $a = 0$ oder $b = 0$ der Schnittpunkt Eckpunkt ist, und für $c + d = h$ die Diagonalen (c, d) und $(0, h)$ parallel sind, sich also nicht schneiden. Es folgt

$$\begin{aligned} 2B(z) + A^2(z) + 2(1 - z^a)(1 - z^b)(1 - z^{c+d-h}) A(z) \\ + 3(z^a + z^b + z^{c+d-h} + z^c + z^d + z^{a+b-h}) A(z) = 3C_1(z)C_2(z) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

mit

$$C_1(z) = z^{c+d} + (z^c + z^d)z^{a+b-h} - z^{a+b} - (z^a + z^b)z^{c+d-h}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} C_2(z) &= z^c + z^d + z^{a+b-h}(1 + z^c + z^d) + z^a + z^b + z^{c+d-h}(1 + z^a + z^b) \\ &\quad + z^{c+d} + z^{a+b}. \end{aligned} \quad (17)$$

Wenn $C_1(z) = 0$, dann muss auch

$$C_1(z) (1 + z^h) - z^h A(z) = -z^{-h} M_1(z) = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} M_1(z) &= (z^a + z^b) (z^{2h} + z^{c+d}) - (z^c + z^d) (z^{2h} + z^{a+b}) \\ &= (z^b - z^c) (z^{2h} - z^{a+d}) - (z^d - z^a) (z^{2h} - z^{b+c}) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

und wegen $(n, 3) = 1$

$$\begin{aligned} M_1(z^3) - (z^{2a} + z^{2b} - z^{a+b}) (z^{4h} + z^{2(c+d)} - z^{c+d+2h}) M_1(z) \\ = (z^c + z^d) (z^{2h} + z^{a+b}) N_1(z) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

mit

$$\begin{aligned} N_1(z) &= (z^{2a} + z^{2b} - z^{a+b}) (z^{4h} + z^{2(c+d)} - z^{c+d+2h}) \\ &\quad - (z^{2c} + z^{2d} - z^{c+d}) (z^{4h} + z^{2(a+b)} - z^{a+b+2h}) \end{aligned} \quad (21)$$

erfüllt sein. $z^c + z^d = 0$ und $M_1(z) = 0$ haben $c = d + (n/2)$ und $a = b + (n/2)$, also den Mittelpunkt des n -Ecks, oder $c = d + (n/2)$ und $2h + (n/2) = c + d$, also $h = d$ bzw. $h = c$ und damit einen Eckpunkt, als Schnittpunkt zur Folge. Entsprechend folgt aus $z^{2h} + z^{a+b} = 0$ und $M_1(z) = 0$ ein Eckpunkt ($h = b$ bzw. $h = a$) oder zwei parallele Diagonalen ($a + b = c + d$). Der dritte Faktor in (20) $N_1(z) = 0$ ergibt nun auch

$$\begin{aligned} 2N_1(z) + M_1^2(z) + 2(z^c + z^d) (z^{2h} + z^{a+b}) M_1(z) - 3(z^b + z^c) (z^{2h} + z^{a+d}) M_1(z) \\ = 3(z^d - z^a) (z^{2h} - z^{b+c}) P_1(z) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

mit

$$P_1(z) = (z^b + z^c) (z^{2h} + z^{a+d}) - (z^d + z^a) (z^{2h} + z^{b+c}). \quad (23)$$

In (22) bedeutet $z^d - z^a = 0$ wiederum einen Eckpunkt ($a = d$). Aus $z^{2h} - z^{b+c} = 0$ und $M_1(z) = 0$ folgt entweder $b = c$ (Eckpunkt) oder $2h = a + d = b + c$. Die letzten beiden Beziehungen in $A(z) = 0$ eingesetzt ergibt (vgl. (12))

$$A(z) = z^{-(h+c+d)} (z^h - z^c) (z^h - z^d) (z^{c+d} - z^{2h}) (1 + z^h) = 0. \quad (24)$$

Die ersten drei Differenzen bedingen Eckpunkte ($h = c$, $h = d$, $b = d$) und aus $1 + z^h = 0$ folgt $h = n/2$, so dass in diesem Fall Schnittpunkte von drei Diagonalen vorliegen:

$$g = 0; \quad h = n/2; \quad a = -d; \quad b = -c. \quad (25)$$

Mit $P_1(z) = 0$ aus (22) wird schliesslich noch

$$P_1(z) + M_1(z) = -2(z^d - z^b) (z^{2h} - z^{a+c}) = 0. \quad (26)$$

Diese Differenzen entsprechen denjenigen in (22), wenn man bedenkt, dass $A(z)$ in a und b symmetrisch ist.

Aus $C_2(z) = 0$ wird nun in analoger Weise gefolgt:

$$(z^{a+b} - z^{c+d}) C_2(z) + (z^{a+b} + z^{c+d}) A(z) = 2z^{-h} M_2(z) = 0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} M_2(z) &= (z^a + z^b) (z^{a+b+h} - z^{2(c+d)}) - (z^c + z^d) (z^{c+d+h} - z^{2(a+b)}) \\ &= (z^h + z^{b+c}) (z^{2a+b} - z^{c+2d}) - (z^h + z^{a+d}) (z^{2c+d} - z^{a+2b}) = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} M_2(z^3) &= (z^{2a} + z^{2b} - z^{a+b}) (z^{2(a+b+h)} + z^{4(c+d)} + z^{a+b+2(c+d)+h}) M_2(z) \\ &= (z^c + z^d) (z^{c+d+h} - z^{2(a+b)}) N_2(z) = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} N_2(z) &= (z^{2a} + z^{2b} - z^{a+b}) (z^{2(a+b+h)} + z^{4(c+d)} + z^{a+b+2(c+d)+h}) \\ &\quad - (z^{2c} + z^{2d} - z^{c+d}) (z^{2(c+d+h)} + z^{4(a+b)} + z^{2(a+b)+c+d+h}). \end{aligned} \quad (30)$$

In (29) ergibt $z^c + z^d = 0$ mit $M_2(z) = 0$ entweder den Mittelpunkt ($c = d + (n/2)$, $a = b + (n/2)$) oder $c = d + (n/2)$ und $a + b + h = 2(c + d)$, woraus durch Einsetzen in (12)

$$A(z) = (z^{2d-h} - z^a) (z^{2d-a} - 1) (z^{2d-h} + 1) = 0 \quad (31)$$

folgt. In (31) ergeben sich aus den ersten beiden Faktoren mit $a - d = d - h$, $d - b = -d$, $c = d + (n/2)$ bzw. $d - a = -d$, $b - d = d - h$, $c = d + (n/2)$ zwei Fälle von Schnittpunkten, die sich durch Umbenennung der Diagonalen (a, b) , (b, c) , $(0, h)$ in $(c' - a', d' - a')$, $(h' - a', -a')$, $(0, b' - a')$ bzw. in $(d' - a', c' - a')$, $(h' - a', -a')$, $(0, b' - a')$ als in (25) enthalten erweisen. Ist der dritte Faktor in (31) Null, so sind wegen $a + b = 2(c + d) - h = 4d - h = h$ die Diagonalen (a, b) und $(0, h)$ parallel.

Aus dem zweiten Faktor von (29) $z^{c+d+h} - z^{2(a+b)} = 0$ und $M_2(z) = 0$ wird durch Vertauschen von (a, b) mit (c, d) der mit (31) diskutierte Fall, oder es folgt $h = 2(a + b) - (c + d) = 2(c + d) - (a + b)$, so dass sich wegen $(n, 3) = 1$ $a + b = c + d$ ergibt (parallele Diagonalen).

Es muss nun nach (29) $N_2(z) = 0$ gelten und damit auch

$$\begin{aligned} 2N_2(z) + M_2^2(z) + 2(z^c + z^d) (z^{c+d+h} - z^{2(a+b)}) M_2(z) \\ - 3(z^h - z^{b+c}) (z^{2a+b} + z^{c+2d}) M_2(z) = 3(z^h + z^{a+d}) (z^{2c+d} - z^{a+2b}) P_2(z) \end{aligned} \quad (32)$$

mit

$$P_2(z) = (z^h - z^{b+c}) (z^{2a+b} + z^{c+2d}) - (z^h - z^{a+d}) (z^{2c+d} + z^{a+2b}). \quad (33)$$

Aus $z^h + z^{a+d} = 0$ und $M_2(z) = 0$ ergibt sich entweder $h = a + d + (n/2)$, $h = b + c + (n/2)$ oder $h = a + d + (n/2)$, $2a + b = c + 2d$. In (12) jeweils eingesetzt ergeben sich die Bedingungen

$$A(z) = z^{-(a+b+h)} (1 + z^h) (z^h - z^{a+b}) = 0, \quad (34)$$

$$A(z) = (z^a - z^d) (1 - z^{c-2a}) (1 + z^{c+d-a}) = 0. \quad (35)$$

Gleichung (34) bedingt einmal $h = n/2$, also mit den anderen Beziehungen Schnittpunkte vom Typ (25), und zum anderen $a + b = h$, d.h. parallele Diagonalen. In (35) bedeutet die erste Differenz einen Eckpunkt ($a = d$), während $1 - z^{c-2a} = 0$ Schnittpunkte von drei Diagonalen zur Folge hat:

$$g = 0; \quad h = a + d + (n/2); \quad c = 2a; \quad b = 2d. \quad (36)$$

Der dritte Faktor von (35) $1 + z^{c+d-a} = 0$ ergibt $c = a - d + (n/2)$. Ersetzt man hierin und in $h = a + d + (n/2)$ und $b = d - a + (n/2)$ die Diagonalen (a, b) , (c, d) und $(0, h)$ durch $(h' - d', - d')$, $(b' - d', a' - d')$ und $(0, c' - d')$, so erkennt man durch Auflösen nach h' , c' und b' , dass Schnittpunkte vom Typ (36) vorliegen.

Aus (32) folgt weiter $z^{2c+d} - z^{a+2b} = 0$ und mit $M_2(z) = 0$ ist entweder $2c + d = a + 2b$, $h = b + c + (n/2)$, was sich durch Vertauschen von (a, b) und (c, d) gleich dem durch (35) betrachteten Fall erweist, oder $2c + d = a + 2b$, $2a + b = c + 2d$. Durch Addition folgt $3(a + b) = 3(c + d)$ und wegen $(n, 3) = 1$ $a + b = c + d$, d.h. (a, b) ist parallel (c, d) .

Zuletzt wird in (32) noch $P_2(z) = 0$ und daher

$$P_2(z) + M_2(z) = -2(z^h + z^{b+d})(z^{2c+d} - z^{b+2a}) = 0. \quad (37)$$

Durch Vertauschen von a und b ergeben sich die gleichen zu diskutierenden Ausdrücke wie in (32).

Setzt man in (36) $h = n/2$, so zeigt sich, dass (25) in (36) enthalten ist. Es gilt somit der

Satz: *Ist $n \equiv \pm 2 \pmod{6}$, so schneiden sich im regulären n -Eck ausser in Eckpunkten und Mittelpunkt höchstens drei Diagonalen in einem Punkt.*

Es werden nun zunächst die Dreifachschnittpunkte gezählt, die (25) erfüllen

$$E_3^{(1)}(n) = n \sum_{a=1}^{\lfloor n/4 \rfloor - 1} \sum_{b=a+1}^{\lfloor n/2 \rfloor - a - 1} 1 = n \left[\frac{n-4}{4} \right] \left(\frac{n}{2} - \left[\frac{n+4}{4} \right] \right). \quad (38)$$

Dabei bedeute $[r]$ die grösste ganze Zahl kleiner oder gleich r . Die übrigbleibenden Punkte von (36) liegen auf Kreisbögen um z^a mit dem Radius $|z^a - 1|$. Damit kein Punkt doppelt gezählt wird, muss $h = (n/2) + a + d < n/2$ und $d - c = d - 2a > n/2$, also $2a + (n/2) + 1 \leq d \leq n - a - 1$ und $1 \leq a \leq [(n-4)/6]$ gelten; ausserdem müssen noch $[1/2(1 + [(n-4)/6])]$ Punkte abgezogen werden, die für $b - a = 2d - a = n/2$ in (38) schon enthalten sind. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} E_3^{(2)}(n) &= n \sum_{a=1}^{\lfloor (n-4)/6 \rfloor} \sum_{d=1+2a+(n/2)}^{n-a-1} 1 - n \left[\frac{\lfloor (n-4)/6 \rfloor + 1}{2} \right] \\ &= \frac{n}{2} \left[\frac{n-4}{6} \right] \left(n - 2 - 3 \left[\frac{n+2}{6} \right] \right) - n \left[\frac{\lfloor (n+2)/6 \rfloor}{2} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

und zusammen

$$E_3(n) = E_3^{(1)}(n) + E_3^{(2)}(n). \quad (40)$$

Da drei Geraden sich in drei Punkten schneiden könnten, folgt unter Berücksichtigung von (8) und (9)

$$E_2(n) = \binom{n}{4} - \frac{n(n-2)}{8} - 3E_3(n). \quad (41)$$

Aus (1), (4), (6) und (40) erhält man nun für $n \equiv \pm 2 \pmod{6}$

$$E(n) = n + \binom{n}{4} - \frac{(n+2)(n-4)}{8} - 2E_3(n), \quad (42)$$

$$F(n) = \binom{n-1}{2} + \binom{n}{4} - \frac{(n-2)(n-4)}{8} - E_3(n), \quad (43)$$

$$K(n) = \binom{n}{2} + 2 \binom{n}{4} - \frac{n(n-4)}{4} - 3 E_3(n) \quad (44)$$

mit

$$E_3(n) = \begin{cases} \frac{1}{48} n(n-2)(5n-38), & \text{wenn } n \equiv \pm 2 \pmod{12}, \\ \frac{1}{48} n(n-4)(5n-28), & \text{wenn } n \equiv \pm 4 \pmod{12}. \end{cases} \quad (45)$$

Ist $n \equiv 0 \pmod{6}$, so sind alle Punkte aus (25) und (36) Schnittpunkte von mindestens drei Diagonalen. Für $n > 6$ treten Schnittpunkte von mehr als drei Diagonalen auf, wie sich zum Beispiel durch Einsetzen von $a = 1, b = (2n/3) - 1, c = 3, d = (5n/6) - 1$ und $h = n/2$ in (12) und Beachten von (25) zeigt. (42), (43) und (44) mit $E_3(n)$ aus (40) stellen also für diese regulären n -Ecke echte obere Schranken dar.

HEIKO HARBORTH, Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] G. GENTILE, *Punti diagonali e poligoni di divisione di un n -gono piano convesso*, Boll. Mat. (4) 1, 71–74 (1940).
- [2] Z. SCHNEIDER und B. STANKOVITSCH, *Über die Anzahl und Anordnung der Diagonalschnitte in einem regelmässigen n -Eck*, El. Math. 14, 6–11 (1959).
- [3] H. T. CROFT and M. FOWLER, *On a Problem of Steinhaus About Polygons*, Proc. Cambridge philos. Soc. 57, 686–688 (1961).
- [4] H. HEINEKEN, *Regelmässige Vielecke und ihre Diagonalen*, L'Enseignement math., II. sér. 8, 275–278 (1962).

Bei der Korrektur: Herr Dr. H. HEINEKEN teilte mir inzwischen mit, daß eine Arbeit von ihm zum gleichen Thema in den Rendiconti Sem. U. Padova erscheinen wird.

Kleine Mitteilungen

Ein einfacher Beweis der Stirlingschen Formel

Die bekannte Stirlingsche Formel, welche $n!$ durch eine geeignete einfache Funktion von n abschätzt, soll hier aus zwei sehr elementaren Hilfssätzen (vgl. [1]) hergeleitet werden.

Hilfssatz 1. Für $x > 0$ gilt $e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+0,5}$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} e^{1/(x+0,5)} &= 1 + \frac{1}{x+0,5} + \frac{1}{2(x+0,5)^2} + \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{1}{(x+0,5)^{\nu}} < 1 + \frac{2(x+0,5)+1}{2(x+0,5)^2} \\ &+ \frac{1}{6(x+0,5)^3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j (x+0,5)^j} = 1 + \frac{1}{x} \cdot \frac{6x^2 + 7,5x + 2,5}{6x^2 + 7,5x + 3 + (3/8x)} < 1 + \frac{1}{x}. \end{aligned} \quad (1)$$

Nun setzen wir zur Abkürzung

$$n! e^n n^{-n-0,5} = \gamma_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2)$$