

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 24 (1969)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Inhaltsmasszahlen für hyperbolische Rotationskörper  
**Autor:** Zeitler, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-26648>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 31.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

---

El. Math.

Band 24

Heft 4

Seiten 73–96

10. Juli 1969

---

## Inhaltsmasszahlen für hyperbolische Rotationskörper

### 1. Einleitung

Wird eine ebene Kurve  $k$  um eine Gerade  $z$ , die Rotationsachse, gedreht (drehen ist dabei als fortgesetztes Spiegeln an den Ebenen des durch  $z$  bestimmten Ebenenbündels zu definieren), so beschreibt  $k$  eine Rotationsfläche. Diese Fläche bestimmt für sich allein oder zusammen mit anderen Rotationsflächen (etwa Ebenen, die auf der Drehachse senkrecht stehen) Rotationskörper. In der vorliegenden Arbeit werden speziellen Körpern dieser Art im Bereich der hyperbolischen Geometrie Inhaltsmasszahlen zugeordnet<sup>1)</sup>.

Alle Untersuchungen werden im (speziellen) Poincaré-Modell durchgeführt. Wir beschränken uns dabei auf Drehkörper, bei denen die Ausgangskurve  $k$  im Modell einen euklidischen Kreis oder eine euklidische Gerade darstellt.

### 2. Hyperbolische Masszahlen im Poincaré-Modell

Im Poincaré-Modell gilt für die hyperbolische Länge  $\bar{s}$  einer Strecke  $P_1 P_2$  (Figur 1, links) bekanntlich:

$$\bar{s} = \frac{k}{2} \ln \left[ \frac{1 + \cos \alpha_1}{1 - \cos \alpha_1} : \frac{1 + \cos \alpha_2}{1 - \cos \alpha_2} \right] = k \ln \frac{\tan(\alpha_2/2)}{\tan(\alpha_1/2)}. \quad (1a)$$

Falls die hyperbolische Gerade gleichzeitig euklidische Gerade ist (Figur 1, rechts), wird daraus:

$$\bar{s} = k \ln \left( \frac{z_2}{z_1} \right) \quad (1b)$$

$k$  ist dabei ein positiver Faktor, dessen Wert von der Wahl der Längeneinheit abhängt. Die hyperbolischen Längen von Strecken werden, zur Unterscheidung euklidischer Längen, im Folgenden immer mit einem Querstrich versehen.

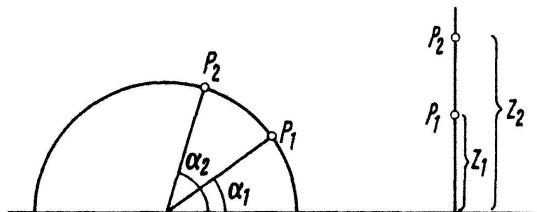
Aus der Längendefinition heraus ergibt sich ein Ausdruck für das hyperbolische Volumelement im Poincaré-Modell:

$$dV = k^3 \cdot \frac{dx \, dy \, dz}{z^3} \quad (2)$$

---

<sup>1)</sup> Einzelne der sich ergebenden Formeln finden sich bei H. LIEBMANN, *Nichteuklidische Geometrie*, Leipzig 1904.

$x, y, z$  sind dabei euklidische Koordinaten eines Modellpunktes ( $z > 0$ ). Die hyperbolische Inhaltsmasszahl ist damit ganz allgemein als Funktion euklidischer Grössen dargestellt.



Figur 1

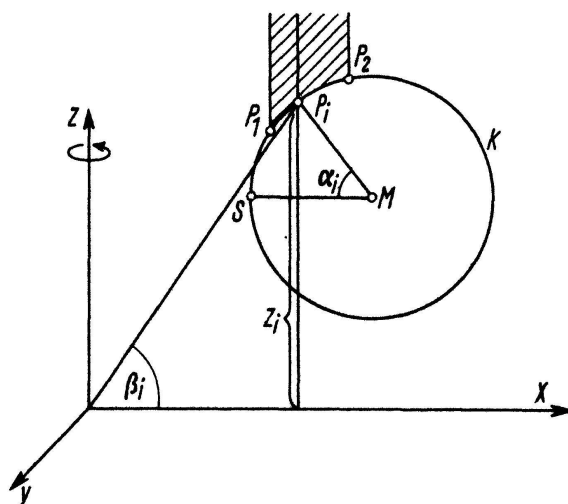
Die Längenmasszahl im Poincaré-Modell

### 3. Auswertung von Integralen

Das schraffierte Flächenstück der Figuren 2 und 3 rotiert um die Achse  $z$ . Wir ordnen dem dabei entstehenden, sich ins Unendliche erstreckenden Rotationskörper nach (2) eine Masszahl  $V$  zu:

$$V = k^3 \int_{z_i}^{\infty} \iint \frac{dx dy dz}{z^3} = \frac{k^3}{2} \iint \frac{dx dy}{z_i^2}.$$

I. Die Ausgangskurve  $k$  ist ein euklidischer Kreis (Figur 2). Kreisgleichung:  $(x - \mu R)^2 + (z - \nu R)^2 = R^2$ , dabei gilt:  $0 \leq \mu < \infty, \nu > -1$ .



Figur 2

$k$  ist ein euklidischer Kreis

Wir führen jetzt an Stelle von  $x, y$  als neue Integrationsveränderliche den Drehwinkel  $\varphi$  der Rotation und den Erhebungswinkel  $\sphericalangle S M P = \alpha$  ein. Dann gilt für die Koordinaten eines Punktes auf der durch Rotation des Kreises  $k$  entstehenden Fläche:

$$x = R \cos \varphi (\mu - \cos \alpha), \quad z = R (\nu + \sin \alpha), \quad y = R \sin \varphi (\mu - \cos \alpha),$$

Die zur Transformation benötigte Funktionaldeterminante hat den Wert

$$R^2 \sin \alpha (\mu - \cos \alpha).$$

Damit erhalten wir für unsere Masszahl:

$$V = \frac{k^3}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \alpha (\mu - \cos \alpha) d\varphi d\alpha}{(\nu + \sin \alpha)^2} = k^3 \pi \mu \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \alpha d\alpha}{(\nu + \sin \alpha)^2} - k^3 \pi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \alpha \cos \alpha d\alpha}{(\nu + \sin \alpha)^2}.$$

Bei der späteren Verwendung dieses Integrals ist darauf zu achten, dass der Integrand auch negativ werden kann.

Wir werten dieses Integral mit den üblichen Methoden aus und unterscheiden dabei vier Fälle.

A. (3)  
 $\nu > 1$

$$\frac{V}{\pi k^3} = \left[ -\frac{2\mu}{\nu(\nu^2 - 1)} \left\{ A \arctan A (z + \nu^{-1}) + \frac{\nu + A^2 (z + \nu^{-1})}{1 + A^2 (z + \nu^{-1})^2} \right\} - \ln |\nu + \sin \alpha| - \frac{\nu}{\nu + \sin \alpha} \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}.$$

B. (4)  
 $\nu \neq 0, \quad |\nu| < 1$

$$\frac{V}{\pi k^3} = \left[ -\frac{2\mu}{\nu(1 - \nu^2)} \left\{ \frac{B}{2} \ln \left| \frac{B(z + \nu^{-1}) - 1}{B(z + \nu^{-1}) + 1} \right| + \frac{B^2(z + \nu^{-1}) - \nu}{B^2(z + \nu^{-1})^2 - 1} \right\} - \ln |\nu + \sin \alpha| - \frac{\nu}{\nu + \sin \alpha} \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}.$$

C. (5)  
 $\nu = 0$

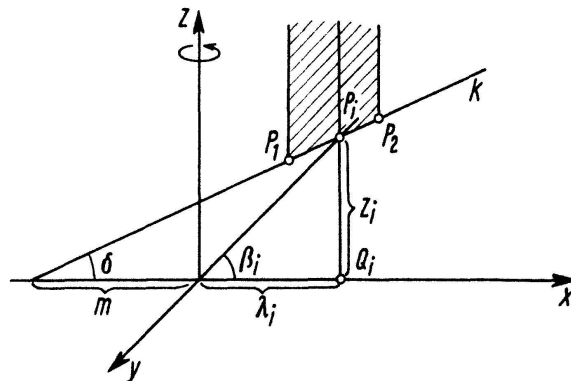
$$\frac{V}{\pi k^3} = [\mu \ln |z| - \ln |\sin \alpha|]_{\alpha_2}^{\alpha_1}.$$

D. (6)  
 $\nu = 1$

$$\frac{V}{\pi k^3} = \left[ -\mu \frac{2(1 + 3z)}{3(1 + z)^3} - \ln |1 + \sin \alpha| - \frac{1}{1 + \sin \alpha} \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}.$$

Dabei gilt:

$$z = \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right), \quad A = \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 - 1}}, \quad B = \frac{\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}}.$$



Figur 3  
 $k$  ist eine euklidische Gerade

II. Die Ausgangskurve  $k$  ist eine Gerade (Figur 3). Geradengleichung:

$$z = (x + m) \tan \delta, \quad \delta \neq \pi/2.$$

Wir führen jetzt an Stelle von  $x, y$  als neue Integrationsveränderliche den Drehwinkel  $\varphi$  der Rotation und die Strecke  $\overline{OQ} = \lambda$  ein. Dann gilt für die Koordinaten eines Punktes auf der durch Rotation der Geraden entstandenen Fläche:

$$x = \lambda \cos \varphi, \quad y = \lambda \sin \varphi, \quad z = (\lambda + m) \tan \delta.$$

Die zur Transformation benötigte Funktionaldeterminante hat den Wert  $\lambda$ . Damit erhalten wir für unsere Masszahl:

$$V = \frac{k^3}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda d\varphi d\lambda}{(\lambda + m)^2 \tan^2 \delta} = k^3 \pi \cotg^2 \delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda + m)^2}.$$

Integration liefert:

$$\frac{V}{\pi k^3} = \cotg^2 \delta \left[ \ln |\lambda + m| + \frac{m}{\lambda + m} \right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}. \quad (7)$$

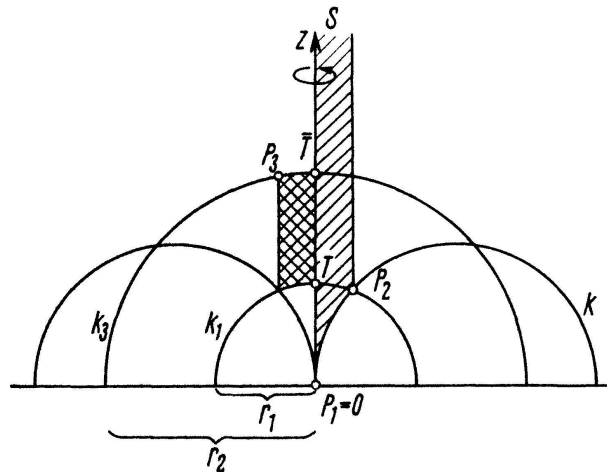
Damit sind alle in den folgenden Abschnitten benötigten Integrale bereitgestellt.

Für die weiteren Untersuchungen ordnen wir, wie aus den Figuren 2 und 3 ersichtlich ist, jedem Punkt  $P_i$  auf dem Kreis bzw. auf der Geraden  $k$  bestimmte Werte  $\alpha_i, \beta_i, z_i$  bzw.  $\lambda_i, \beta_i, z_i$  zu.

Wir wollen jetzt für einige hyperbolische Rotationskörper die Inhaltsmasszahlen bestimmen. Die Tatsache, dass die einzelnen Körper bei den folgenden Untersuchungen im Modell spezielle Lagen haben, bedeutet dabei keine Einschränkung.

#### 4. Hyperbolische Kegel

Für  $\nu = 0$  liegen die Mittelpunkte der euklidischen Kreise  $k$  auf der Achse des Modells, sie stellen also hyperbolische Geraden dar. Wir können in Analogie zur euklidischen Geometrie die durch Rotation von  $k$  um  $z$  entstehenden Flächen als Kegelflächen bezeichnen. Je nach der gegenseitigen Lage der hyperbolischen Geraden  $k$  und  $z$  sprechen wir von einer Horo-, einer Hyper- oder einer eigentlichen Kegelfläche.



Figur 4  
Der Horokegel

4.1 *Der Horokegel.* Für  $\mu = 1$  sind  $k$  und  $z$  randparallel, und wir erhalten Figur 4. Nach (1a) gilt für die Länge  $\bar{\varrho}$  der hyperbolischen Strecke  $P_2 T$ :

$$\bar{\varrho} = \frac{k}{2} \ln \frac{1 + \cos \beta_2}{1 - \cos \beta_2}.$$

Daraus folgt:

$$\tanh(\bar{\varrho}/k) = \cos \beta_2, \quad \cosh(\bar{\varrho}/k) = 1/\sin \beta_2, \quad \sinh(\bar{\varrho}/k) = \cotg \beta_2. \quad (8)$$

Wegen  $2\beta_2 = \pi - \alpha_2$  ergibt sich also:

$$\cosh(\bar{\varrho}/k) = 1/\cos(\alpha_2/2).$$

Der durch Rotation der einfach schraffierten Fläche entstehende Körper hat also nach (5) den Inhalt:

$$\begin{aligned} V &= \pi k^3 [\ln \tan(\alpha/2) - \ln \sin \alpha]_0^{\alpha_2} \\ &= \pi k^3 [\ln \sin(\alpha/2) - \ln \cos(\alpha/2) - \ln 2 - \ln \sin(\alpha/2) - \ln \cos(\alpha/2)]_0^{\alpha_2} \\ &= -2\pi k^3 \ln \cos(\alpha_2/2) = 2\pi k^3 \ln \cosh(\bar{\varrho}/k). \end{aligned}$$

Damit kennen wir den Inhalt zweier kongruenter Horokegel, die durch Spiegelung an der durch  $k_1$  erzeugten Ebene ineinander übergehen. Die Spitze des einen ist der (euklidisch unendlich ferne) Punkt  $S$ , die des anderen der Punkt  $P_1 = 0$ . Hyperbolisch gesehen liegen beide Spitzen im Unendlichen.  $\bar{\varrho}$  ist der Radius der Kegelgrundfläche. Für einen einzigen solchen Kegel gilt also:

$$V = \pi k^3 \ln \cosh(\bar{\varrho}/k). \quad (9)$$

Rotiert in Figur 4 das doppelt schraffierte Flächenstück um  $z$ , so entsteht ein Horokegelstumpf. Für seine Inhaltsmasszahl gilt mit (9):

$$V = \pi k^3 (\ln \cosh(\bar{\varrho}/k) - \ln \cosh(\bar{\varrho}_1/k)).$$

$\bar{\varrho}$  und  $\bar{\varrho}_1$  sind dabei die Deckflächenradien  $P_2 T$  und  $P_3 \bar{T}$ . Der Figur 4 entnehmen wir:

$$\sin \beta_2 = (z_2/r_1), \quad \sin \beta_3 = (z_3/r_2).$$

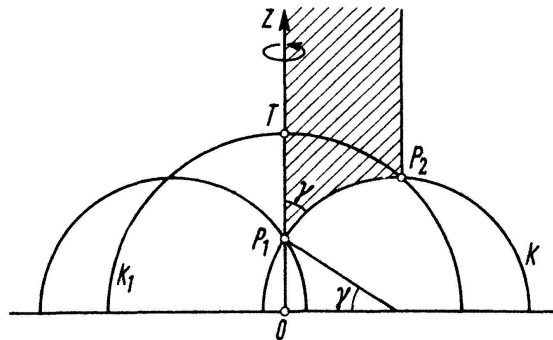
Mit (8) ergibt sich

$$V = \pi k^3 \ln \frac{\sin \beta_3}{\sin \beta_2} = \pi k^3 \ln \frac{z_3 r_1}{r_2 z_2} = \pi k^3 \left( \ln \frac{z_3}{z_2} - \ln \frac{r_2}{r_1} \right).$$

Nach (1b) erhalten wir:

$$V = \pi k^2 (\bar{s} - \bar{h}). \quad (10)$$

$\bar{s}$  ist dabei die Mantellinie,  $\bar{h}$  die Höhe des Horokegelstumpfes.



Figur 5  
Der eigentliche Kegel

4.2 *Der eigentliche Kegel.* Für  $\mu < 1$  ( $\mu \neq 0$ ) schneiden sich  $k$  und  $z$ , und wir erhalten Figur 5. Durch Rotation des schraffierten Flächenstücks ergibt sich ein Körper, dessen Inhalt mit (5) berechnet werden kann. Der Horokegel über  $T P_2$  hat den Inhalt (9). Subtraktion beider Masszahlen ergibt den Inhalt eines eigentlichen Kegels.

$$V = \pi k^3 \left( \mu \ln \frac{\tan(\alpha_2/2)}{\tan(\alpha_1/2)} - \ln \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} - \ln \cosh(\bar{\varrho}/k) \right).$$

Mit (8) und (1a) folgt

$$V = \pi k^3 \left( \mu \frac{\bar{s}}{k} - \ln \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1 \sin \beta_2} \right).$$

Dabei ist  $\bar{s}$  die Kegelmantellinie  $P_1 P_2$ . Der Figur 5 entnehmen wir:

$$\cos \gamma = \cos \alpha_1 = \mu, \quad \sin \beta_2 = z_2/r_1, \quad \sin \alpha_2 = z_2/R, \quad \sin \alpha_1 = z_1/R.$$

Damit ergibt sich:

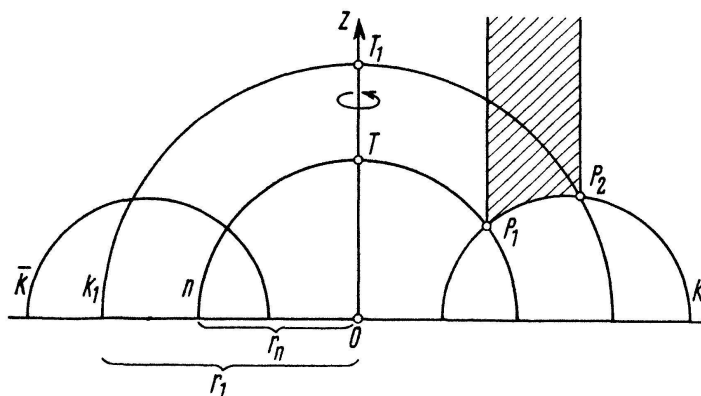
$$V = \pi k^3 \left( \frac{\bar{s}}{k} \cos \gamma - \ln \frac{r_1}{z_1} \right).$$

Mit (1b) erhalten wir

$$V = \pi k^2 (\bar{s} \cos \gamma - \bar{h}). \quad (11)$$

$\bar{h}$  ist die Kegelhöhe  $P_1 T$ .

Ganz genauso lautet die Formel für den Stumpf eines eigentlichen Kegels.  $\bar{s}$  ist dann die Mantellinie und  $\bar{h}$  die Höhe des Kegelstumpfs. Für  $\gamma \rightarrow 0$  wandert die Kegelspitze  $P_1$  ins hyperbolisch Unendliche. Aus dem eigentlichen Kegelstumpf wird ein Horokegelstumpf. Formel (11) geht in (10) über.



Figur 6  
Der Hyperkegel

4.3 *Der Hyperkegel.* Für  $\mu > 1$  sind  $k$  und  $z$  überparallel und wir erhalten Figur 6. An die Stelle der Kegelspitze tritt jetzt eine Ebene, welche durch Rotation des gemeinsamen Lotes  $n$  der Geraden  $k$  und  $\bar{k}$  um  $z$  entsteht ( $\bar{k}$  ist dabei das Spiegelbild von  $k$  an  $z$ ). Diese Ebene soll jeden Hyperkegel begrenzen.

Durch Rotation der schraffierten Fläche in Figur 6 entsteht ein Hohlkörper, dessen Volummasszahl nach (5) berechnet werden kann. Zu dieser Masszahl addieren wir zunächst den Inhalt des Horokegels über  $T P_1$  (Grundflächenradius  $\bar{\varrho}$ ) und subtrahieren schliesslich den Inhalt des Horokegels über  $T_1 P_2$  (Grundflächenradius  $\bar{\varrho}_1$ ) unter Verwendung von (9). So erhalten wir den Inhalt eines Hyperkegels:

$$V = \pi k^3 \left( \mu \ln \frac{\tan(\alpha_2/2)}{\tan(\alpha_1/2)} - \ln \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} + \ln \cosh(\bar{\varrho}/k) - \ln \cosh(\bar{\varrho}_1/k) \right).$$

Mit (1 a) und (8) wird

$$V = \pi k^3 \left( \mu \frac{\bar{s}}{k} - \ln \frac{\sin \alpha_2 \sin \beta_1}{\sin \alpha_1 \sin \beta_2} \right).$$

Dabei ist  $\bar{s}$  die Kegelmantellinie  $P_1 P_2$ .

Der Figur 6 entnehmen wir:

$$\sin \alpha_2 = \frac{z_2}{R}, \quad \sin \beta_1 = \frac{z_1}{r_n}, \quad \sin \alpha_1 = \frac{z_1}{R}, \quad \sin \beta_2 = \frac{z_2}{r_1},$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\mu} = \sin \beta_1 = \frac{1}{\cosh(\bar{\varrho}/k)}.$$

Damit ergibt sich:

$$V = \pi k^3 \left( \frac{\bar{s}}{k} \cosh \frac{\bar{\varrho}}{k} - \ln \frac{r_1}{r_n} \right).$$

Mit (1 b) wird

$$V = \pi k^2 (\bar{s} \cosh(\bar{\varrho}/k) - \bar{h}). \quad (12)$$

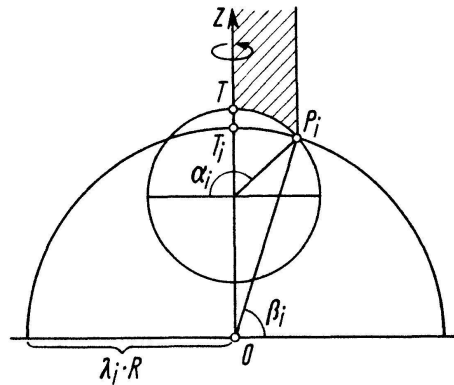
$\bar{h}$  ist die Kegelhöhe  $T T_1$ .

Ganz genauso lautet die Formel für den Stumpf eines Hyperkegels.  $\bar{s}$  ist dann die Mantellinie und  $\bar{h}$  die Höhe des Kegelstumpfs.

Für  $\bar{\varrho} \rightarrow 0$  rutschen die Geraden  $k, \bar{k}$  immer enger zusammen. Aus dem Hyperkegelstumpf wird ein Horokegelstumpf. Formel (12) geht in (10) über.

## 5. Hyperbolische Segmente und Zonen

Für  $\mu = 0, \nu > 1$  stellt  $k$  einen hyperbolischen Kreis dar, der bei Rotation um  $z$  in sich übergeht. Es entsteht also eine hyperbolische Kugel. Wir bestimmen jetzt die Volummasszahl für das Kugelsegment, für die Vollkugel und schliesslich für die Kugelzone.



Figur 7  
Das Kugelsegment

5.1 *Das Kugelsegment.* Durch Rotation des schraffierten Flächenstücks in Figur 7 ergibt sich ein Körper, dessen Volummasszahl nach (3) bestimmt werden kann. Wir wählen zunächst  $\pi/2 < \alpha_i \leq \pi$ . Der Horokegel über  $P_i T_i$  hat den Inhalt (9). Subtraktion liefert das Volumen eines Kugelsegments:

$$\frac{V}{\pi k^3} = \ln \cosh \frac{\bar{\varrho}_i}{k} - \left[ -\ln(\nu + \sin \alpha) - \frac{\nu}{\nu + \sin \alpha} \right]_{(\pi/2)}^{\alpha_i}$$

$$= \ln \cosh \frac{\bar{\varrho}_i}{k} + \ln(\nu + \sin \alpha_i) - \ln(\nu + 1) + \frac{\nu}{\nu + \sin \alpha_i} - \frac{\nu}{\nu + 1}.$$

Aus Figur 7 entnehmen wir:

$$\cosh(\bar{\varrho}_i/k) = 1/\sin \beta_i = \lambda_i/(\nu + \sin \alpha_i),$$

$$(R \cos \alpha_i)^2 + (\nu R + R \sin \alpha_i)^2 = \lambda_i^2 R^2 \quad \text{also} \quad \sin \alpha_i = (\lambda_i^2 - \nu^2 - 1)/2\nu.$$

Für die hyperbolische Länge der Strecke  $T_i$   $T$  gilt mit (1b):

$$\bar{h}_i = k \ln \frac{\nu + 1}{\lambda_i} \quad \text{also} \quad \sinh \frac{\bar{h}_i}{k} = \frac{(\nu + 1)^2 - \lambda_i^2}{2 \lambda_i (\nu + 1)}.$$

Mit diesen drei Aussagen formen wir unser Ergebnis um und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi k^3} &= -\ln \frac{(\nu + 1)(\nu + \sin \alpha_i)}{\lambda_i (\nu + \sin \alpha_i)} + \nu \frac{1 - \sin \alpha_i}{(\nu + 1)(\nu + \sin \alpha_i)} \\ &= -\frac{\bar{h}_i}{k} + \frac{\lambda_i}{(\nu + \sin \alpha_i)} \cdot \frac{(\nu + 1)^2 - \lambda_i^2}{2 \lambda_i (\nu + 1)} = -\frac{\bar{h}_i}{k} + \cosh \frac{\bar{\varrho}_i}{k} \sinh \frac{\bar{h}_i}{k}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Segmenthöhe mit  $\bar{h}$  und den Radius des Segmentgrundkreises mit  $\bar{\varrho}$ , so gilt also:

$$\boxed{V = \pi k^3 \left( -\frac{\bar{h}}{k} + \cosh \frac{\bar{\varrho}}{k} \cdot \sinh \frac{\bar{h}}{k} \right)} \quad (13)$$

Wie sich leicht zeigen lässt, bleibt diese Formel auch noch richtig für  $3\pi/2 > \alpha_i > \pi$ .

**5.2 Die Kugel.** Läuft  $\alpha$  von  $\pi/2$  bis  $3\pi/2$ , so vereinfacht sich die Rechnung ganz wesentlich, und wir erhalten den Inhalt einer Kugel.  $\bar{\varrho}$  verschwindet, und aus  $\bar{h}$  wird der Kugeldurchmesser  $2\bar{R}$ .

$$\boxed{V = \pi k^3 \left( -(2\bar{R}/k) + \sinh(2\bar{R}/k) \right)} \quad (14)$$

**5.3 Die Kugelzone.** Werden aus der Kugel zwei Segmente mit den Höhen  $\bar{h}_1$ ,  $\bar{h}_2$  ( $\bar{h}_2 > \bar{h}_1$ ) und den Grundkreisradien  $\bar{\varrho}_1$ ,  $\bar{\varrho}_2$  ausgeschnitten, so entsteht eine Kugelzone. Unter Verwendung der Ergebnisse über das Kugelsegment ergibt sich als Inhaltsmasszahl:

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi k^3} &= \left( -\frac{\bar{h}_2}{k} + \frac{\nu}{\nu + \sin \alpha_2} - \frac{\nu}{\nu + 1} \right) - \left( -\frac{\bar{h}_1}{k} + \frac{\nu}{\nu + \sin \alpha_1} - \frac{\nu}{\nu + 1} \right) \\ &= -\frac{\bar{h}}{k} + \nu \frac{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2}{(\nu + \sin \alpha_1)(\nu + \sin \alpha_2)}; \end{aligned}$$

$\bar{h} = \bar{h}_2 - \bar{h}_1$  ist dabei die Zonenhöhe.

Es gilt:

$$\bar{h} = k \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \text{also} \quad \sinh \frac{\bar{h}}{k} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Verwenden wir zur Umformung die aus Figur 7 bereits entnommenen Ausdrücke, so erhalten wir zunächst

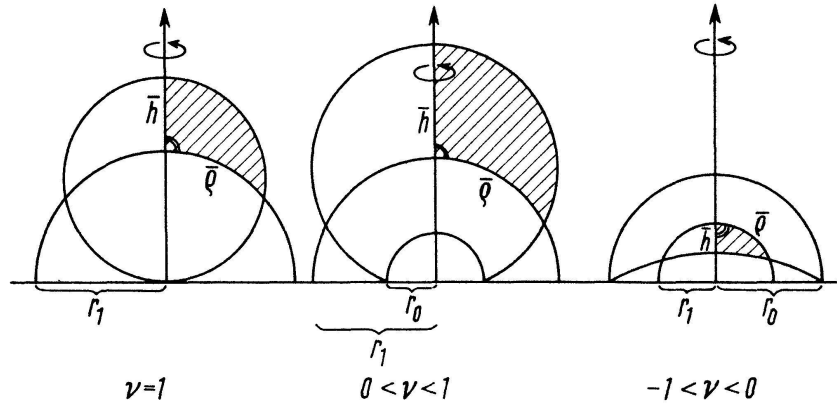
$$\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2 = (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)/2\nu$$

und weiter

$$\frac{V}{\pi k^3} = -\frac{\bar{h}}{k} + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \lambda_1 \lambda_2}{2(\nu + \sin \alpha_1)(\nu + \sin \alpha_2) \lambda_1 \lambda_2}.$$

Damit ergibt sich für den Inhalt der Kugelzone:

$$V = \pi k^3 \left( -\frac{\bar{h}}{k} + \sinh \frac{\bar{h}}{k} \cosh \frac{\bar{\varrho}_1}{k} \cosh \frac{\bar{\varrho}_2}{k} \right). \quad (15)$$



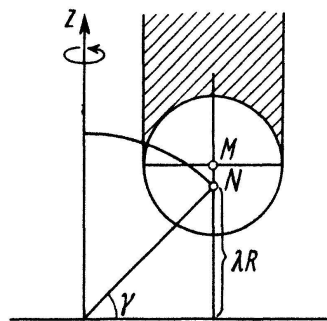
Figur 8

Horosphären- und Hypersphärensegmente

5.4 *Segmente und Zonen bei Horo- und Hypersphäre.* Für  $\mu = 0$  und  $\nu = 1$  bzw.  $|\nu| < 1, \nu \neq 0$  ergibt sich bei Rotation von  $k$  um  $z$  eine Horo- bzw. Hypersphäre. Figur 8 erläutert die Entstehung von Segmenten in diesen zwei Fällen. Die Herleitungen in 5.1 und 5.3 lassen sich wörtlich übernehmen. Für die Inhaltsmasszahlen der Segmente und Zonen von Horo- und Hypersphäre gelten also wieder die Formeln (13) und (15). Ein Analogon zu Formel (14) existiert nicht. Die Masszahl des Horosphärensegments wächst nämlich für  $r_1 \rightarrow 0$  (Figur 8) unbeschränkt, ebenso die des Hypersphärensegments für  $r_1 \rightarrow r_0$  (Figur 8).

## 6. Hyperbolischer Torus

Für  $\mu \geq 1, \nu > 1$  stellt  $k$  einen hyperbolischen Kreis dar, der bei Drehung um  $z$  einen Torus (Figur 9) erzeugt. Durch Rotation der schraffierten Fläche in Figur 9



Figur 9

Der Torus

( $\alpha$  läuft von 0 bis  $\pi$ ) entsteht ein Körper, dessen Volumen  $V_2$  nach (3) bestimmt werden kann. Nimmt man zu der schraffierten Fläche noch die Kreisfläche dazu, so ergibt sich bei Drehung ein zweiter Körper. Mit (3) lässt sich auch sein Volumen  $V_1$  ermitteln

( $\alpha$  läuft jetzt von  $2\pi$  bis  $\pi$ ). Subtraktion liefert das Torusvolumen  $V$ .

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi k^3} = \frac{V_1 - V_2}{\pi k^3} &= \frac{2\mu}{v(v^2 - 1)} \left\{ A \arctan \frac{A}{v} + A \frac{\pi}{2} + v \right\} \\ &+ \frac{2\mu}{v(v^2 - 1)} \left\{ A \frac{\pi}{2} - A \arctan \frac{A}{v} - v \right\} = \frac{2\pi\mu}{(v^2 - 1)\sqrt{v^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Für den hyperbolischen Durchmesser  $2\bar{R}$  des hyperbolischen Kreises  $k$  gilt nach (1b):

$$2\bar{R} = k \ln \frac{v+1}{v-1},$$

daraus folgt

$$\cosh \frac{2\bar{R}}{k} - 1 = \frac{2}{v^2 - 1}.$$

Weiter erhalten wir mit (1b):

$$\bar{R} = k \ln \frac{\lambda}{v-1} = k \ln \frac{v+1}{k},$$

und daraus folgt  $\lambda^2 = v^2 - 1$ .

Für den hyperbolischen Abstand  $\bar{a}$  des hyperbolischen Kreismittelpunktes  $N$  von  $z$  ergibt sich nach (8):

$$\sinh(\bar{a}/k) = \cotg \gamma = \mu/\lambda = \mu/\sqrt{v^2 - 1}.$$

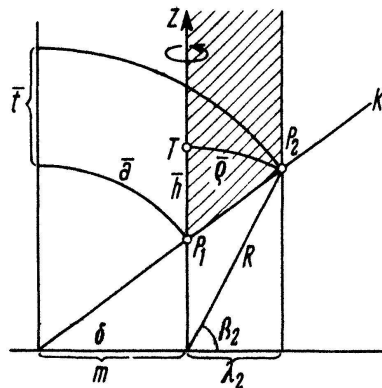
Durch Einsetzen bekommen wir schliesslich als Inhaltsmasszahl eines Torus:

$$\boxed{V = \pi^2 k^3 \sinh \frac{\bar{a}}{k} \left( \cosh \frac{2\bar{R}}{k} - 1 \right)} \quad (16)$$

$\bar{R}$  ist dabei der Kreisradius und  $\bar{a}$  der Abstand des Kreismittelpunktes von der Drehachse.

### 7. Kegelartige Rotationskörper

Die Gerade  $k$  in Figur 3 kann als ein Hyperzyklus gedeutet werden, der mit  $z$  einen hyperbolisch unendlich fernen Punkt gemeinsam hat. Wir wenden uns zunächst dem Spezialfall zu, dass sich  $k$  und  $z$  auch noch in einem endlichen Punkt  $P_1$  (Figur 10) schneiden.



Figur 10

Kegelartiger Drehkörper

Durch Rotation der schraffierten Fläche in Figur 10 entsteht ein Körper, dessen Volumen nach (7) berechnet werden kann. Der Horokegel über  $P_2 T$  hat den Inhalt

(9). Subtraktion beider liefert die Volummasszahl eines kegelartigen Körpers. Sie soll jetzt genauer untersucht werden.

$$\frac{V}{\pi k^3} = \cotg^2 \delta \left[ \ln |\lambda + m| + \frac{m}{m + \lambda} \right]_0^{\lambda_2} - \ln \cosh \frac{\bar{\varrho}}{k}.$$

Daraus ergibt sich nach (8):

$$\frac{V}{\pi k^3} = \cotg^2 \delta \ln \frac{\lambda_2 + m}{m} + \ln \sin \beta_2 - \frac{\lambda_2}{m + \lambda_2} \cotg^2 \delta.$$

Mit den Bezeichnungen der Figur ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi k^3} &= \cotg^2 \delta \ln \frac{z_2}{z_1} + \ln \frac{z_2 z_1}{R z_1} - \frac{(m + \lambda_2) \lambda_2}{z_2 (m + \lambda_2)} \cotg \delta \\ &= \ln \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{1}{\sin^2 \delta} + \ln \frac{z_1}{R} - \frac{\lambda_2}{z_2} \cotg \delta. \end{aligned}$$

Mit (1b) und (8) folgt weiter:

$$\frac{V}{\pi k^3} = \frac{\bar{t}}{k} \cdot \frac{1}{\sin^2 \delta} - \frac{\bar{h}}{k} - \cotg \delta \cotg \beta_2 = \frac{\bar{t}}{k} \cosh^2 \frac{\bar{a}}{k} - \frac{\bar{h}}{k} - \sinh \frac{\bar{a}}{k} \cdot \sinh \frac{\bar{\varrho}}{k}.$$

Für die Länge des Hyperzyklenbogens  $P_1 P_2$  gilt bekanntlich  $\bar{s} = \bar{t} \cosh (\bar{a}/k)$ , damit erhalten wir für das Volumen unseres kegelartigen Rotationskörpers:

$$V = \pi k^3 \left( \frac{\bar{s}}{k} \cosh \frac{\bar{a}}{k} - \frac{\bar{h}}{k} - \sinh \frac{\bar{a}}{k} \cdot \sinh \frac{\bar{\varrho}}{k} \right).$$

Daraus ergibt sich sofort eine Formel für den zu diesem Körper gehörenden Stumpf:

$$V = \pi k^3 \left( \frac{\bar{s}}{k} \cosh \frac{\bar{a}}{k} - \frac{\bar{h}}{k} - \sinh \frac{\bar{a}}{k} \left( \sinh \frac{\bar{\varrho}_2}{k} - \sinh \frac{\bar{\varrho}_1}{k} \right) \right).$$

Dabei sind  $\bar{s}$  die Mantellinie,  $\bar{h}$  die Höhe,  $\bar{\varrho}_1$  und  $\bar{\varrho}_2$  die Grundflächenradien des Stumpfs.

Genau die gleiche Formel erhalten wir für den Fall, dass Hyperzyklus und Drehachse nur einen einzigen, nämlich den unendlich fernen Punkt gemeinsam haben.

Für  $\delta = \pi/2$  wird  $\bar{a} = 0$  und es ergibt sich die Formel (10) für den Horokegelstumpf.

Haben Hyperzyklus und Drehachse zwei unendlich ferne Punkte gemeinsam, so bedeutet das  $m = 0$  und weiter  $\bar{a} = \bar{\varrho}_1 = \bar{\varrho}_2 = \bar{\varrho}$ . Die Stumpfformel vereinfacht sich zu:

$$V = \pi k^2 (\bar{s} \cosh (\bar{\varrho}/k) - \bar{h}).$$

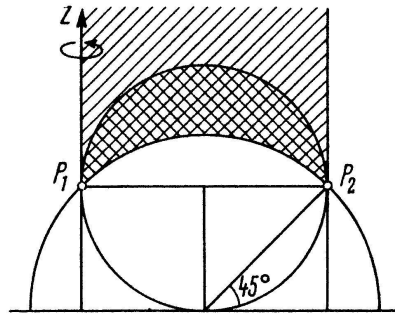
## 8. Spezielle hyperbolische Rotationskörper

Um auch noch für die Integrale (4) und (6) Anwendungsbeispiele zu haben, berechnen wir das Volumen zweier ganz spezieller Rotationskörper.

**8.1 Spezialkörper, erzeugt durch Rotation eines Horozyklus.** Ein Horozyklus berührt zwei randparallele hyperbolische Geraden in den Punkten  $P_1 P_2$  (Figur 11). Durch Rotation der einfach schraffierten Fläche um eine dieser Geraden entsteht ein sich ins Unendliche erstreckender Körper. Zur Bestimmung seiner Inhaltsmasszahl verwenden wir (6). Dabei gilt  $\mu = \nu = 1$ . Der Winkel  $\alpha$  läuft von 0 bis  $\pi$ . Wir erhalten  $V =$

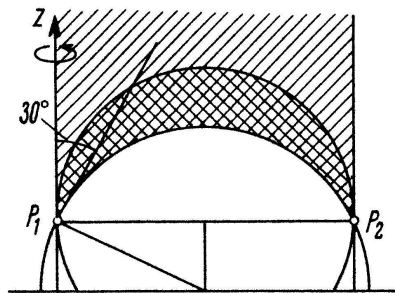
$(2/3) \pi k^3$ . Lässt man die durch  $P_1 P_2$  bestimmte hyperbolische Gerade mitrotieren, so liefert das doppelt schraffierte Flächenstück einen weiteren Körper. Zur Bestimmung seiner Inhaltsmasszahl verwenden wir (5). Dabei gilt  $\nu = 0$ ,  $\mu = 1/\sqrt{2}$ . Der Winkel  $\alpha$  läuft von  $\pi/4$  bis  $3\pi/4$ . Zusammen mit dem vorigen Ergebnis erhalten wir:

$$V = \pi k^3 \left( \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 1) - (2/3) \right)$$



Figur 11  
Spezialkörper mit Horozyklus

8.2 *Spezialkörper, erzeugt durch Rotation eines Hyperzyklus.* Ein Hyperzyklus berührt zwei randparallele hyperbolische Geraden in den Punkten  $P_1 P_2$  (Figur 12). Die durch  $P_1 P_2$  bestimmte hyperbolische Gerade soll den Hyperzyklus unter einem Winkel von  $30^\circ$  schneiden. Durch Rotation des einfach schraffierten Flächenstücks um



Figur 12  
Spezialkörper mit Hyperzyklus

eine der beiden Geraden entsteht ein sich ins Unendliche erstreckender Körper. Zur Bestimmung seiner Inhaltsmasszahl verwenden wir (4). Dabei gilt  $\mu = 1$ ,  $\nu = 1/\sqrt{3}$ . Der Winkel  $\alpha$  läuft von 0 bis  $\pi$ . Wir erhalten:

$$V = \pi k^3 \left( (3/2) \sqrt{6} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - 3 \right).$$

Lässt man die hyperbolische Gerade durch  $P_1 P_2$  mitrotieren, so liefert das doppelt schraffierte Flächenstück einen weiteren Körper. Zur Bestimmung seiner Inhaltsmasszahl verwenden wir (5). Dabei gilt  $\nu = 0$ ,  $\mu = \sqrt{3}/2$ . Der Winkel  $\alpha$  läuft von  $\pi/6$  bis  $5\pi/6$ . Zusammen mit dem vorigen Ergebnis erhalten wir:

$$V = \pi k^3 \left( \sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3}) - (3/2) \sqrt{6} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + 3 \right).$$

### 9. Schlussbetrachtung

Ziel der Arbeit ist es, an Beispielen eine Methode vorzuführen, die es gestattet, die Inhaltsmasszahlen gewisser hyperbolischer Rotationskörper zu ermitteln. Die Auswahl der Beispiele erfolgte nach zwei Gesichtspunkten. Einmal sollten alle in Teil 3 ausgewerteten Integrale bei der Bestimmung von Masszahlen tatsächlich vorkommen. Zum andern aber wollten wir vor allem solche Drehkörper behandeln, die in der euklidischen Geometrie ein Gegenstück haben. Es ist besonders interessant, in diesen Fällen den Übergang von der hyperbolischen zur euklidischen Formel durchzuführen. Wir zeigen das am Beispiel des Torus. In Formel (16) werden die vorkommenden hyperbolischen Funktionen in Reihen entwickelt:

$$V = \pi^2 k^3 \left( \frac{\bar{a}}{k} + \frac{1}{3!} \left( \frac{\bar{a}}{k} \right)^3 + \dots \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2\bar{R}}{k} \right)^2 + \dots - 1 \right)$$

Wächst jetzt  $k$  unbegrenzt, so ergibt sich das Torusvolumen der euklidischen Geometrie  $V = \pi^2 a \cdot 2 R^2$ .

H. ZEITLER, Weiden

## On $\mathcal{S}_c$ Functions

### Introduction

In this paper we prove that the Dirac Delta and all its derivatives can be represented by sequences of constructed discontinuous functions. Although this result is stated in [1] it is not formally proved.

We then prove that by using this definition of the  $n$ -th derivative of the Dirac Delta its Laplace Transform is  $s^n$ . This result again can be considered as "classical" (see for example [3]) but is not proved either.

We feel that although the results are known the approach is new and our proof is rigorous which justifies the contents of this paper.

### Definition of the $n$ -th Derivative of a Function

Let  $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  be an  $n$ -dimensional vector. We say that the vector tends *basewise* to zero if the components  $v_k$  tend to zero *successively*. We write symbolically

$$V \xrightarrow[B]{} 0. \quad (1)$$

Geometrically speaking this means that the end point of  $V$  describes a polygonal line whose sides are parallel to the axes of the basis.

We shall use the notation  $\prod V = \prod_{m=1}^n v_m$  for the product of the components of the vector.

Let  $f(t) \in C^n[b, c]$  be the class of functions that are defined and continuous as well as their derivatives up to and including the order  $n$  for  $b \leq t \leq c$ . Let  $a_k, k = 1, 2, \dots, n$ , be such that  $(t + \alpha_{h,n}) \in [b, c]$ , where  $\alpha_{h,n}$  represents the sum of any  $h$  of the  $n$