Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **24 (1969)**

Heft 3

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Aus $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = m$ ergibt sich $m < a_1 + \cdots + a_n$. Ist nun π nicht die (n,m)-Normalaxonometrie, so verwenden wir eine m-Ebene $E_m^* \perp \pi^{-1} P$, $P \in E_m$ und die (n,m)-Normalaxonometrie $\pi^* : E_n \to E_m^*$ mit demselben orthonormierten n-Bein $(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_n)$ wie π. Nach vorigem ist hier $a_1^* + \cdots + a_n^* > m$, wo $a_i^* = |\, \pi^* \mathfrak{n}_i \,|$, $i = 1, \ldots, n$. Es ist aber auch $a_i \geqslant a_i^*$, $i = 1, \ldots, n$, weil $\pi^* (\pi \mathfrak{n}_i) = \pi^*(\mathfrak{n}_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Hieraus folgt $a_1 + \cdots + a_n \geqslant a_1^* + \ldots + a_n^*$, so dass $a_1 + \cdots + a_n > m$, was zu beweisen war. VÁCLAV HAVEL, Brno

LITERATURVERZEICHNIS

[1] B. L. v. d. WAERDEN, *Moderne Algebra* 1, 2. Aufl. (New York 1943).
[2] L. A. JAZKEWITSCH, *Grundeigenschaften der Normalaxonometrie eines n-dimensionalen euklidischen Raumes, Fragen der angewandten Geometrie* (russisch) unter Redaktion von A.M. Tewlin, (Moskau 1966).
[3] J. SCHOPP, *Über die n-dimensionalen Axonometrien*, El. Math. *19*, 108–111 (1964).
[4] V. HAVEL, *Über eine Zerlegung der singulären linearen Transformationen* (tschechisch), Cas. pest. mat. *85*, 439–447 (1960).

Aufgaben

Aufgabe 573. Man konstruiere (mit Zirkel und Lineal) a) ein beliebiges rechtwinkliges, b) ein beliebiges nichtgleichseitiges, gleichschenkliges Dreieck aus den Schnittpunkten seiner Mittelsenkrechten, seiner Höhen und seiner Winkelhalbierenden.

K. KOPFERMANN, Hannover

Lösung: Bezeichnungen: Umkreismittelpunkt O, Inkreismittelpunkt I, Höhenschnittpunkt H.

a) Wegen $HO^2 - OI^2 = HO \cdot HI \cdot 2^{1/2}$ kann jede Seite des Dreiecks OHI aus den beiden andern berechnet werden, weshalb wir voraussetzen, dass O, H und I «richtig» liegen.

Der Kreis um O mit Radius OH (Umkreis) wird von der Geraden durch H und I ein zweites Mal in P geschnitten. Der zu PO normale Durchmesser ist die Hypotenuse, H die Rechtwinkelecke des Dreiecks.

b) I ist innerer Teilpunkt von OH, Y der I harmonisch zugeordnete äussere Teilpunkt. Der Mittelpunkt P des Kreises (Apolloniuskreis) mit dem Durchmesser IY liegt auf dem Umkreis des Dreiecks. Die Schnittpunkte von Umkreis (Radius OP) und Apolloniuskreis inzidieren mit den Endpunkten der Dreiecksbasis, womit das Dreieck gezeichnet werden kann.

Bemerkungen: Y ist der Mittelpunkt des Ankreises, welcher die Basis des Dreiecks berührt. I darf nicht Mittelpunkt von OH sein. F. LEUENBERGER, Feldmeilen

Weitere Lösungen sandten M. BACHMANN (Küsnacht), P. BUNDSCHUH (Freiburg i. Br.), J. FEHÉR (Pécs/Ungarn), H. FRISCHKNECHT (Berneck), K. HODEL (Wädenswil), I. PAASCHE (München), O. REUTTER (Ochsenhausen), E. WIDMER (Biel).

Aufgabe 574. Sei r der Inkreisradius, s die Summe der (orientierten) Abstände des Mittelpunktes des Feuerbachkreises von den Seiten des Dreiecks.

Man beweise oder widerlege: Jedes nichtgleichseitige Dreieck, für das $s = 3r$ ist, lässt sich aus den Schnittpunkten der Mittelsenkrechten, der Höhen und der Winkelhalbierenden (mit Zirkel und Lineal) konstruieren. K. KOPFERMANN, Hannover

Lösung des Aufgabenstellers: Es gibt unendlich viele konstruierbare und unendlich viele nicht konstruierbare Dreiecke dieser Art.

In der Terminologie der Arbeit K. KOPFERMANN, *Über Dreiecke*, El. Math. *23*, 49–60 (1968): Die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden konstruierbarer, wie nicht konstruierbarer Dreiecke liegen auf $\mathfrak{d}_5''$ (siehe a.a.O. S. 57) dicht.

Beweis: Die Punkte $(p, q) \in D'$ der Ähnlichkeitsklassen derjenigen Dreiecke, für die $s = 3r$ ist, sind durch (siehe S. 54)

$$q = 3p - p^2 - 1 \tag{1}$$

charakterisiert. Für rationale p, q ist die Konstruktionsaufgabe genau dann durchführbar, wenn das kubische Polynom

$$x^3 + \lambda x^2 + \mu x + \nu \quad \text{mit} \quad \lambda = -(p+1), \quad \mu = \frac{p^2}{2} + p + \frac{q}{2}, \quad \nu = -\frac{q}{2}, \tag{2}$$

unter der Nebenbedingung (1) über den rationalen Zahlen reduzibel ist. Die rationalen Reduzibilitätsstellen sind genau die rationalen Punkte (beide Komponenten sind rational) auf den Tangenten an die Diskriminantenkurve (siehe S. 54)

$$q = 3p - p^2 - 1 \pm \sqrt{1 - 2p^3} \qquad 0 < p < 1/2 \tag{3}$$

in den rationalen Punkten dieser Kurve. Nun ist (p_0, q_0) genau dann ein rationaler Punkt dieser Kurve, wenn $1 - 2p_0$ rationales Quadrat ist. Dann sind die rationalen Punkte (p, q) auf der Tangente in (p_0, q_0) an (3) genau durch

$$3 - 2p_0 \mp 3\sqrt{1 - 2p_0} = (q_0 - q)/(p_0 - p), \qquad 1 - 2p_0 \text{ rationales Quadrat}$$

charakterisiert. Mit $\sigma^2 := 1 - 2p_0$ und $d := p_0 - p$ erhält man daraus

$$\sigma^3 + 3d\sigma \pm d^2 = 0. \tag{4}$$

Umgekehrt führt jedes rationale Paar (σ, d), das dieser Gleichung genügt, zu Werten $p = p_0 - d$ mit $2p_0 = 1 - \sigma^2$, für die das Polynom (2) (q werde nach (1) gewählt) über den rationalen Zahlen reduzibel ist.

Die Gleichung (4) verschwindet genau für die rationalen Paare (σ, d), für die die Diskriminante $9\sigma^2 \pm 4\sigma^3$ dieser in d quadratischen Gleichung rationales Quadrat ist und σ rational ist. Für diese σ erhält man

$$2p = 2p_0 - 2d = 1 - \sigma^2 + 3\sigma \pm \sigma\sqrt{9 - 4\sigma}, \qquad 0 < 2p < 1.$$

Man rechnet leicht nach, dass für $\sigma := m/n$ die reduzierte Bruchdarstellung von $2p$ stets n^2 im Nenner enthält, wobei n bzw. $2n$ stets Quadratzahl ist. Sowohl die Brüche p, die diese Eigenschaft haben, als auch die, die sie nicht besitzen, liegen in dem Intervall $0 < 2p < 1$ dicht.

Also haben wir dichte Mengen rationaler Punkte (p, q), die auf der Kurve (1) liegen, gefunden, aus denen die $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ konstruierbar bzw. nicht konstruierbar sind. Das gilt dann erst recht für alle (p, q) auf (1).

Also gibt es unendlich viele Dreiecke mit $s = 3r$, die sich aus den Schnittpunkten der Winkelhalbierenden, der Höhen und der Mittelsenkrechten konstruieren wie nicht konstruieren lassen. Bei festgehaltenen Schnittpunkten der Höhen und der Mittelsenkrechten liegen die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden derjenigen Dreiecke, die sich aus diesen Punkten konstruieren wie nicht konstruieren lassen, auf $\mathfrak{d}_5''$ dicht, q.e.d.

Eine weitere Lösung sandte O. REUTTER (Ochsenhausen).

Aufgabe 575. Man beweise: Ist P das Produkt von n natürlichen Zahlen mit dem grössten gemeinsamen Teiler D und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen M, so sind die Quotienten $P/(D^{n-1}M)$ und $(D M^{n-1})/P$ ganzzahlig. W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

Lösung: n natürliche Zahlen $a_i = \prod_{j=1}^{m} p_j^{\alpha_{i,j}}$; $i = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha_{i,j} \geqq 0$, haben den grössten gemeinsamen Teiler

$$D = \prod_{j=1}^{m} p_j^{\min(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \ldots, \alpha_{n,j})},$$

das kleinste gemeinsame Vielfache

$$M = \prod_{j\ 1}^{m} p_j^{\max(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \ldots, \alpha_{n,j})}$$

und das Produkt

$$P = \prod_{j\ 1}^{m} p_j^{\alpha_{1,j} + \alpha_{2,j} + \ldots + \alpha_{n,j}}.$$

Die Ganzzahligkeit der Quotienten folgt dann aus den leicht als richtig zu erkennenden Ungleichungen, die sich aus den Exponenten der Primzahlen p_j ergeben ($j = 1, 2, \ldots, m$):

$$(n-1)\min(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \ldots, \alpha_{n,j}) + \max(\ldots) \leqq \sum_{i\ 1}^{n} \alpha_{i,j};$$

$$(n-1)\max(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \ldots, \alpha_{n,j}) + \min(\ldots) \geqq \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j}.$$

H. HARBORTH, Braunschweig

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), P. BUNDSCHUH (Freiburg i. Br.), J. FEHÉR (Pécs/Ungarn), M. D. GERHARDTS (Wuppertal), P. HOHLER (Dietikon), A. MAKOWSKI (Warschau), H. MEILI (Winterthur), I. PAASCHE (München), O. REUTTER (Ochsenhausen), D. VELJAN (Zagreb), E. WIDMER (Biel), G. WULCZYN (Bucknell Univ., USA), ferner die folgenden Studierenden der Wake Forest Univ., USA: D. ASHCRAFT, P. M. COBLE, C. CUNNINGHAM, S. HOWARD, G.-Y. KWOK, L. M. R. LOUDEN, L. V. OOT, M. A. STEELE, W. M. WATTS, D. WILSON, L. ZINZOW.

Aufgabe 576. Eine Ecktransversale, die ein Dreieck in zwei umfanggleiche Teildreiecke zerlegt, werde Umfanghalbierende genannt. Man beweise:

(1) Die drei Umfanghalbierenden eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ schneiden sich in einem Punkt U im Innern des Dreiecks.

(2) Die Länge der Umfanghalbierenden $A_i P_i$, $P_i \in A_{i+1}A_{i+2}$ wird durch U im Verhältnis $a_i : (s - a_i)$ geteilt. $\left(a_i = \overline{A_{i+1}A_{i+2}};\ 2s = \sum_k a_k\right)$.

(3) Der Punkt U, der Schwerpunkt S und der Inkreismittelpunkt I liegen auf einer Geraden, sofern das Dreieck nicht regulär ist, und es ist $\overline{US} = 2\,\overline{SI}$.

O. REUTTER, Ochsenhausen

1. *Lösung:* (1) folgt aus dem Satz von CEVA. Denn wegen $\overline{A_iP_j} = \overline{A_jP_i}$ $(i \neq j)$ gilt $(\overline{A_2P_1} : \overline{A_3P_1}) \cdot (\overline{A_3P_2} : \overline{A_1P_2}) \cdot (\overline{A_1P_3} : \overline{A_2P_3}) = 1$.

(2) erhält man aus dem Satz von MENELAOS, angewendet z.B. auf Dreieck $A_{i+1}P_iA_i$: Aus $(\overline{P_iU} : \overline{A_iU}) \cdot (\overline{A_iP_{i+2}} : \overline{A_{i+1}P_{i+2}}) \cdot (\overline{A_{i+1}A_{i+2}} : \overline{P_iA_{i+2}}) = -1$ folgt (wegen $\overline{A_{i+1}A_{i+2}} = a_i$ und $\overline{A_{i+1}A_{i+2}} = s - a_i$) $\overline{P_iU} : \overline{A_iU} = -(s - a_i) : a_i$, d.h. $\overline{A_iU} : \overline{A_iP_i} = a_i : s$.

(3) U hat von der Parallelen zu a_i durch A_i nach (2) den Abstand $r_i = h_{a_i} \cdot a_i : s = 2 \cdot F_{A_1A_2A_3} : s = \text{const}$. Also ist U der Inkreismittelpunkt desjenigen Dreiecks, dessen Seitenmitten A_1, A_2, A_3 sind.

Angewendet auf das Dreieck der Mittelpunkte M_i der Seiten a_i heisst das, dass der Inkreismittelpunkt I von Dreieck $A_1A_2A_3$ der Schnittpunkt der Umfanghalbierenden U_M von Dreieck $M_1M_2M_3$ ist. Dreieck $M_1M_2M_3$ und Dreieck $A_1A_2A_3$ liegen ähnlich mit dem Verhältnis 1 : 2. Ähnlichkeitszentrum ist S. Da dem Punkt U der Punkt $U_M = I$ entspricht, liegt S auf der Geraden $UU_M = UI$ und es ist $\overline{US} = 2\,\overline{SU_M} = 2\,\overline{SI}$.

W. VINZENZ, München

2. Lösung: Wir setzen wie üblich

$$A_1A_2A_3\ P_1P_2P_3\ a_1a_2a_3\ s\text{-}a_1\ s\text{-}a_2\ s\text{-}a_3 = ABCPQR\ abc\ s_as_bs_c.$$

Es handelt sich um einen im 19. Jahrhundert und z.T. vorher bekannten Sachverhalt:

(1) P, Q, R sind offenbar die Ankreisberührpunkte auf a, b, c, weil $s_a = BR = CQ$ usw. zyklisch gilt. U ist daher innerer Cevapunkt für die Abschnittsprodukte $s_as_bs_c = s_bs_cs_a$ auf den Seiten a, b, c, q.e.d. Bekanntlich heisst U Nagelpunkt.

(2) Der bekannte Satz von H. van Aubel lautet im vorliegenden Spezialfall $CU/RU = CP/BP + CQ/AQ = s_b/s_c + s_a/s_c = c/s_c$, q.e.d.

(3) Die folgenden je 4 harmonischen und ähnlich gelegenen Punkte mit Abständen (Zwischenräumen) im Verhältnis 2:1:3 liegen auf der

Eulergeraden	*Nagel-Longhurstgeraden*
Umkreiszentrum	Inkreiszentrum
Gravizentrum	Gravizentrum
Feuerbachzentrum	Umfangsschwerpunkt (Spiekerpunkt)
Orthozentrum	Nagelpunkt

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Literatur:

H. BAUER, *Besondere Punkte im Dreieck*, Prax. Math. *9* (1967), S. 265–270, Fig. 6.
TH. SPIEKER, *Lehrbuch der ebenen Geometrie*, 21. Aufl., Potsdam 1894, S. 178–181.
H. DÖRRIE, *Mathematische Miniaturen*, Breslau 1943, S. 73, Nr. 69.
CHR. RENNER, *Planimetrie*, 4. Aufl., München 1952, S. 152, Aufgabe 91 und 92.
Prax. Math. *4* (1962), S. 133–135, Problem 108 mit zahlreichen Literaturangaben.
Prax. Math. *6* (1964), S. 134, Problem 180.
(Prax. Math. *6* (1964), S. 49–51, Problem 171 ist verwandt.)
ARCHIMEDES *15* (1963), S. 22, Aufgabe 768 von J. E. Hofmann. I. PAASCHE, München

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), J. FEHÉR (Pécs/Ungarn), H. FRISCHKNECHT (Berneck), W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf), L. KIEFFER (Luxemburg), D. VELJAN (Zagreb).

Neue Aufgaben

Aufgabe 597. Es sei G eine Gruppe und U eine Teilmenge von G, die mindestens zwei von 1 verschiedene Elemente enthält. Ist dann $U^{-1}x = U$ für alle von 1 verschiedenen $x \in U$, so ist U eine Untergruppe von G. HEINZ LÜNEBURG, University of Illinois, USA

Aufgabe 598. Let p be a fixed prime. Show that the integer n has the property

$$p \nmid \binom{n}{k} \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

if and only if

$$n = a\,p^s + p^s - 1 \quad (0 \leqslant a < p;\ s \geqslant 0).$$

L. CARLITZ, Duke University, USA

Aufgabe 599. Es sei

$$F_s(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j < x} (i, j)^s .$$

Dann ist

$$F_1(x) = \frac{x^2 \ln x}{2\,\zeta(2)} + O(x^2), \quad F_2(x) = \frac{x^3\,\zeta(2)}{3\,\zeta(3)} + O(x^2 \ln x),$$

$$F_s(s) = \frac{x^{s+1}\,\zeta(s)}{(s+1)\,\zeta(s+1)} + O(x^s) \quad (s > 2).$$

E. TEUFFEL, Korntal/Stuttgart

Aufgabe 600. In O greifen drei koplanare Kräfte $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$ und $\boldsymbol{OC}$ gleicher Grösse so an, dass A, B und C das Dreieck Δ bilden. Man zeige, dass die Resultierende genau dann zu einer Seite von Δ parallel ist, wenn Δ nicht stumpfwinklig ist und die Seitenlängen des Höhenfusspunktdreiecks von Δ zudem eine arithmetische Folge (1. Ordnung) bilden.

F. LEUENBERGER, Feldmeilen

Aufgabe 601. Nach SURYANARAYANA (vgl. El. Math. *24*, 16–17 (1969)) heisst eine natürliche Zahl n superperfekt, wenn $\sigma(\sigma(n)) = 2n$ gilt. Dabei bedeutet $\sigma(k)$ die Summe aller Teiler der natürlichen Zahl k. Man beweise: Ist $n = p^2$, p eine ungerade Primzahl, so ist n nicht superperfekt. P. BUNDSCHUH, Freiburg/Br.

Literaturüberschau

Mathematische Methoden der Zuverlässigkeitstheorie I. Von B. W. GNEDENKO, J. K. BELJAJEW und A. D. SOLOWJEW. Band XXI der II. Abteilung der Mathematischen Lehrbücher und Monographien. XII und 222 Seiten mit 37 Abbildungen und 3 Tabellen. Akademie-Verlag, Berlin 1968.

Unter der *Zuverlässigkeit* eines Erzeugnisses versteht man dessen Fähigkeit, seine Qualität unter bestimmten Nutzungsbedingungen zu wahren; Zuverlässigkeit ist also *über die Zeit erstreckte Qualität.* Aus dem Bestreben, die Zuverlässigkeit industrieller Erzeugnisse zu erhöhen, hat sich im Laufe der letzten Jahrzehnte eine eigentliche Zuverlässigkeitstheorie ergeben, an der Ingenieure, Ökonomen und Mathematiker interessiert sind. Die vielseitigen Probleme dieser Theorie erforderten die Schaffung eines eigenen mathematischen Apparates; das vorliegende Buch bringt die mathematischen Methoden einiger Teile des bereits weit verzweigten Gesamtgebietes. Im Teil I, der hier anzuzeigen ist, werden behandelt: Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der mathematischen Statistik (mehr im Sinne eines Überblickes über die benötigten Grundlagen), die Charakteristika der Zuverlässigkeit und schliesslich die Probleme der Reservierung mit und ohne Erneuerung. Der II. Teil soll weitere statistische Ausführungen und vor allem auch die Darstellung der statistischen Qualitätskontrolle bringen. – Wer um das Geschick Gnedenkos weiss, statistische Probleme knapp und doch sehr verständlich darzustellen, wird die Lektüre dieses Buches mit Freude beginnen. Er wird sicher nicht enttäuscht werden.
R. INEICHEN

Elementare Topologie. Von B. H. ARNOLD. (Aus dem Amerikanischen übersetzt von H. FREUND, G. HOLLAND und A. KIRSCH.) 189 Seiten mit 91 Figuren. DM 19.80. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1964.

Dieses kleine Werk ist vorzüglich geeignet, einem Anfänger einen Begriff zu geben, was Topologie ist. Der Verfasser appelliert an das anschauliche Intuitionsvermögen des Lesers und verzichtet bewusst auf eine axiomatische Grundlegung. So kommt der Leser rasch in Kontakt mit den eigentlichen Problemen. Natürlich handelt es sich bei den gegebenen Beweisen mehr um Beweisideen und -skizzen.

Im ersten Teil (Kapitel 1–5) werden unter anderem folgende anschauliche Probleme erörtert: Netze und Landkarten, Vierfarbenproblem, Klassifikation der Flächen, Eulerscher Polyedersatz, Siebenfarbensatz für den Torus, Jordanscher Kurvensatz.

Der zweite Teil (Kapitel 6–8) ist der Einführung in die Grundbegriffe der mengentheoretischen Topologie gewidmet. Er enthält die Kapitel: Mengen, Abbildungen, Räume.

Jedem Abschnitt sind einige anregende Aufgaben beigefügt, die es dem Leser erleichtern, sich in die behandelten Fragen einzuarbeiten. J. M. EBERSOLD

Theoretische Mechanik. Eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik. Von G. HAMEL. Band 57 der Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berichtigter Nachdruck. VIII und 796 Seiten mit 161 Figuren. DM 84.–. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg und New York 1967.

Es handelt sich hier um den berichtigten Nachdruck des 1949 erschienenen Werkes. Es stellt ein Lehrbuch, nicht ein Handbuch, der klassischen Mechanik dar, das sich an mit den mathematischen Methoden bekannte Leser wendet. HAMEL gibt hier eine Einführung in die gesamte klassische Mechanik, in der es ihm besonders darauf ankommt, diese als eine einheitliche Wissenschaft darzustellen und den Aufbau konsequent auf das Prinzip