Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 24 (1969)

Heft: 3

Artikel: Allgemeine Gestalt einer geradenerhaltenden Abbildung

Autor: Mall, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26647

Die Konstante C berechnet sich aus der Forderung, dass $w_n(x)$ für $n \to \infty$ eine Dichtefunktion der Variablen x sein muss, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} w_n(x)\, dx$ muss gleich 1 sein. Da $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ ist, folgt $C = 1/\sqrt{2\pi n p q}$.

Zusammenfassend erhält man also den Satz von Laplace:

Wenn die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ereignisses A in n unabhängigen Versuchen konstant gleich p $(0 < p < 1)$ ist, so genügt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in diesen Versuchen das Ereignis A genau x-mal eintritt, für $n \to \infty$ der Beziehung

$$w_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n p q}} \cdot e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}},$$

und zwar gleichmässig für alle x, für die sich die nach (2) entsprechende Grösse z in einem endlichen Intervall befindet.

F. HEIGL, Weiden BRD

LITERATURVERZEICHNIS

[1] P. BUCHNER, *Bemerkungen zum Satz von Bernoulli*, El. Math. 7, 8 (1952).
[2] R. v. MISES, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Rosenberg-Verlag, New York 1945).

Allgemeine Gestalt einer geradenerhaltenden Abbildung

In der folgenden Abhandlung soll gezeigt werden, dass eine stetige geradenerhaltende Abbildung der Ebene auf sich projektiv sein muss. Zu diesem Zweck wird zunächst Satz 1 bewiesen.

Satz 1: Es gibt genau eine projektive Abbildung der Ebene auf sich, die 4 Punkte A, B, C, O in allgemeiner Lage[1]) in 4 Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 in allgemeiner Lage überführt, wobei A in P_1, B in P_2, C in P_3 und O in P_4 übergeht.

Beweis: Den folgenden Überlegungen sind homogene Koordinaten zugrunde gelegt. Die gesuchte projektive Abbildung werde in der Gestalt

$$T:\quad \begin{aligned} \varrho x &= a_{11} u + a_{12} v + a_{13} w, \\ \varrho y &= a_{21} u + a_{22} v + a_{23} w, \\ \varrho z &= a_{31} u + a_{32} v + a_{33} w \end{aligned}$$

angesetzt. Das Koordinatendreieck wollen wir dabei so wählen, dass seine Ecken mit A, B, C zusammenfallen, während O der Einheitspunkt ist, was stets möglich ist, da ja A, B, C und O in allgemeiner Lage sind. Für die Koordinatendarstellung von A, B, C und O gilt dann:

$$A(1,0,0), \quad B(0,1,0), \quad C(0,0,1), \quad O(1,1,1).$$

[1]) 4 Punkte heissen «in allgemeiner Lage», wenn keine drei auf einer Geraden liegen.

Setzen wir nun die Koordinaten von $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$, $P_4(x_4, y_4, z_4)$ und die Koordinaten von A, B, C und O in T ein, so folgt

$$\left.\begin{array}{lll} k\,x_1 = a_{11}\,, & l\,x_2 = a_{12}\,, & m\,x_3 = a_{13}\,, \\ k\,y_1 = a_{21}\,, & l\,y_2 = a_{22}\,, & m\,y_3 = a_{23}\,, \\ k\,z_1 = a_{31}\,, & l\,z_2 = a_{32}\,, & m\,z_3 = a_{33}\,. \end{array}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} n\,x_4 = a_{11} + a_{12} + a_{13}\,, \\ n\,y_4 = a_{21} + a_{22} + a_{23}\,, \\ n\,z_4 = a_{31} + a_{32} + a_{33}\,. \end{array}\right\} \tag{2}$$

k, l, m und n sind dabei von Null verschiedene noch näher zu bestimmende Proportionalitätsfaktoren.

Setzt man die Beziehungen (1) in (2) ein, so folgt

$$\left.\begin{array}{l} n\,x_4 = k\,x_1 + l\,x_2 + m\,x_3\,, \\ n\,y_4 = k\,y_1 + l\,y_2 + m\,y_3\,, \\ n\,z_4 = k\,z_1 + l\,z_2 + m\,z_3\,. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Zur Abkürzung führen wir ein

$$D_1 = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_4 \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Dann folgt aus den Beziehungen (3)

$$k{:}l{:}m{:}n = D_1{:}(-D_2){:}D_3{:}D_4\,.$$

Da die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 nicht zu je dreien in einer Geraden liegen, sind die 4 Determinanten D_1, D_2, D_3 und D_4 von Null verschieden. Das Verhältnis der von Null verschiedenen Proportionalitätsfaktoren k, l, m und n lässt sich daher eindeutig bestimmen. Es ist jetzt noch zu zeigen, dass die Transformation T eindeutig umkehrbar ist. Zu diesem Zweck muss gezeigt werden, dass die Determinante $|a_{ik}| \neq 0$ ist.

Aus den Formeln (1) entnimmt man

$$|a_{ik}| = k \cdot l \cdot m \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

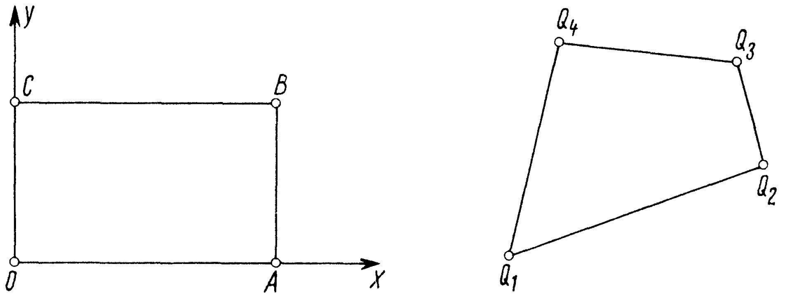
womit alles gezeigt ist.

Satz 2: Jede umkehrbar eindeutige stetige Abbildung der Ebene auf sich, die Gerade in Gerade überführt, ist eine Projektivität.

Beweis: Durch die homogenen stetigen Funktionen

$$x' = f_1(x, y, z)\,, \qquad y' = f_2(x, y, z)\,, \qquad z' = f_3(x, y, z) \tag{4}$$

sei eine umkehrbar eindeutige und geradentreue Abbildung der projektiven Ebene auf sich gegeben. Gegeben sei nun das Rechteck $OABC$. Die Eckpunkte dieses Rechtecks $OABC$ werden durch die Abbildung (4) in die Punkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 übergeführt. Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sind 4 Punkte in allgemeiner Lage. Würden nämlich etwa die Punkte Q_1, Q_2, Q_3 in gerader Linie liegen, so müsste dasselbe wegen der Geradentreue für die Punkte O, A, B gelten, im Gegensatz zur Voraussetzung, dass $OABC$ ein Rechteck ist.



a Figur 1 *b*

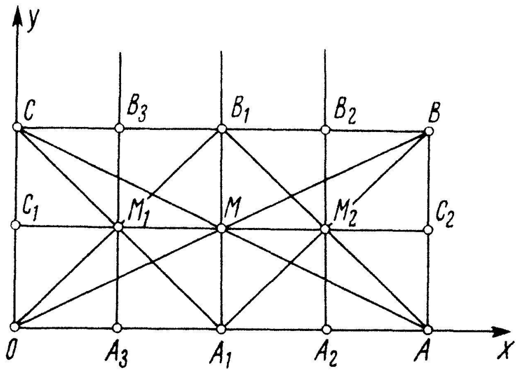
Nun existiert nach Satz 1 genau eine lineare umkehrbare Transformation, die die Punkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 in die Punkte O, A, B, C überführt. Für diese mögen die folgenden Formeln gelten:

$$\begin{aligned} \varrho u &= b_{11} x' + b_{12} y' + b_{13} z' , \\ \varrho v &= b_{21} x' + b_{22} y' + b_{23} z' , \qquad B = | b_{ik} | \neq 0 . \\ \varrho w &= b_{31} x' + b_{32} y' + b_{33} z' , \end{aligned}$$

ϱ ist dabei ein von Null verschiedener Proportionalitätsfaktor. Durch die Funktionen

$$\left.\begin{aligned} \varrho u &= b_{11} f_1 + b_{12} f_2 + b_{13} f_3 , \\ \varrho v &= b_{21} f_1 + b_{22} f_2 + b_{23} f_3 , \\ \varrho w &= b_{31} f_1 + b_{32} f_2 + b_{33} f_3 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

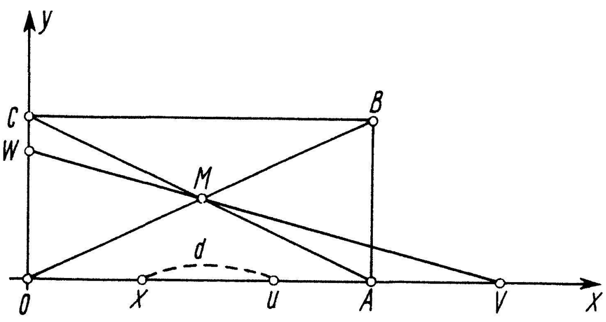
werden daher die Punkte O, A, B, C auf sich abgebildet. Es handelt sich hier also um eine Abbildung mit 4 Fixpunkten O, A, B, C.



Figur 2

Da die Geraden OB und AC bei der zusammengesetzten Abbildung in sich übergehen, ist ihr Schnittpunkt M ebenfalls ein Fixpunkt der Abbildung. Die Fixgeraden OC und AB schneiden sich in ihrem Fernpunkt, der deshalb ein Fixpunkt der Abbildung sein muss. Das gleiche gilt für den Fernpunkt der Geraden OA und CB. Die Gerade MA_1 parallel zur Y-Achse ist ebenfalls eine Fixgerade, da M ein Fixpunkt ist und die Gerade MA_1 auch durch den Fixpunkt von OC und AB hindurchgeht. Daher sind auch A_1 und B_1 Fixpunkte der Abbildung. Analog zeigt man, dass auch C_1 und C_2 Fixpunkte der Abbildung sind. Weitere analoge Betrachtungen kann man bei den Rechtecken OA_1B_1C und A_1ABB_1 vornehmen. Man erhält dadurch weitere Fixpunkte A_3 und A_2 auf der X-Achse zwischen den Punkten O und A.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens (fortgesetztes Halbieren) erkennt man sofort, dass die Fixpunkte der Abbildung auf den Strecken OA und OC überall dicht liegen. Wir wollen nun zunächst zeigen, dass jeder Punkt der Strecke OA Fixpunkt ist.



Figur 3

X sei ein beliebiger Punkt der Strecke OA. Wir nehmen zunächst an, er sei kein Fixpunkt der Abbildung. Der ihm entsprechende Punkt auf der X-Achse sei U, und es sei $|U - X| = d$. U könnte auch ausserhalb der Strecke OA liegen.

Nach den obigen Betrachtungen kann man nun X durch fortgesetztes Halbieren so zwischen zwei Fixpunkte F_n und F_{n+1} einschliessen, dass gilt:

$$|X - F_n| < \delta, \quad |X - F_{n+1}| < \delta,$$

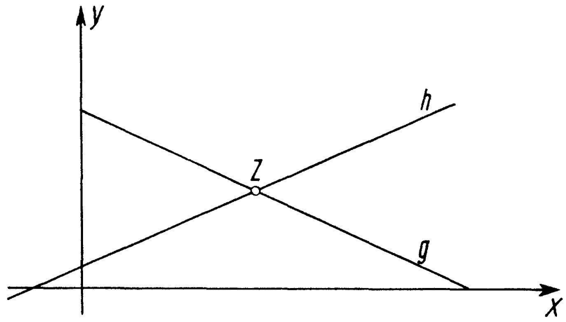
wobei δ wegen der fortgesetzten Intervallhalbierung beliebig klein gemacht werden kann. Wegen der Stetigkeit der Abbildung müsste dann auch $|U - F_n|$ und $|U - F_{n+1}|$ beliebig klein gemacht werden können. Für beide Absolutbeträge gilt aber stets

$$|U - F_n| > d - \delta \quad \text{und} \quad |U - F_{n+1}| > d - \delta,$$

was einen Widerspruch gegen die vorausgesetzte Stetigkeit der Abbildung darstellt. Sämtliche Punkte der Strecke OA sind daher Fixpunkte der Abbildung. Analog zeigt man, dass sämtliche Punkte der Strecke OC Fixpunkte der Abbildung sind.

Nunmehr verbinden wir einen beliebigen Punkt V der X-Achse mit $OV > OA$ mit dem Fixpunkt M durch eine Gerade. Diese Gerade schneidet OC in dem Fixpunkt W. WMV ist also eine Fixgerade. Da die X-Achse eine Fixgerade ist, ist auch V ein Fixpunkt der Abbildung. Sämtliche Punkte der positiven X-Achse und, wie man analog beweist, der positiven Y-Achse sind also Fixpunkte. Ebenso zeigt man, dass auch die negative X- und Y-Achse aus lauter Fixpunkten besteht.

Z sei nunmehr ein beliebiger Punkt der XY-Ebene. Zwei beliebige Geraden g und h durch Z schneiden die X- und Y-Achse in Fixpunkten, sind also selbst auch Fixgeraden. Ihr Schnittpunkt Z muss also ein Fixpunkt der Abbildung sein. Wir sehen



Figur 4

also: Jeder Punkt der XY-Ebene ist ein Fixpunkt der Abbildung. Die durch die Formeln (5) vermittelte Abbildung muss also die identische Abbildung sein.

Es muss also gelten:

$$\varrho\, x = b_{11} f_1 + b_{12} f_2 + b_{13} f_3 ,$$
$$\varrho\, y = b_{21} f_1 + b_{22} f_2 + b_{23} f_3 ,$$
$$\varrho\, z = b_{31} f_1 + b_{32} f_2 + b_{33} f_3 .$$

Wegen $B \neq O$ folgt daraus

$$f_1 = \frac{\varrho}{B} \cdot \begin{vmatrix} x & b_{12} & b_{13} \\ y & b_{22} & b_{23} \\ z & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \qquad f_2 = \frac{\varrho}{B} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & x & b_{13} \\ b_{21} & y & b_{23} \\ b_{31} & z & b_{33} \end{vmatrix}, \qquad f_3 = \frac{\varrho}{B} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & x \\ b_{21} & b_{22} & y \\ b_{31} & b_{32} & z \end{vmatrix} .$$

Die gesuchten Abbildungsgleichungen sind daher linear und homogen.

J. MALL, München

LITERATUR

BIEBERBACH, L. *Projektive Geometrie*, (Leipzig und Berlin 1931) § 10.
BLASCHKE, W. *Projektive Geometrie*, (Basel 1954). Abschnitt 17
SCHREIER, O., SPERNER, L., *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra*, II, (Leipzig 1935) § 17.

Kleine Mitteilungen

Über « Super perfect numbers »

In Band *24*, S. 16–17 dieser Zeitschrift, hat Herr D. SURYANARAYANA eine kleine Mitteilung veröffentlicht mit dem Titel «Super perfect numbers». Er betrachtet natürliche Zahlen n, welche

$$\sigma(\sigma(n)) = 2\, n \tag{1}$$

genügen, wobei $\sigma(n)$ die Summe aller (positiven) Teiler von n bedeutet. Eine solche Zahl wird «super perfect number» genannt. Wir wollen kurz s.p.n. schreiben. In der obigen Mitteilung wird der folgende Satz bewiesen: «Eine gerade Zahl n ist genau dann eine s.p.n., wenn $n = 2^r$, und $2^{r+1} - 1$ eine Primzahl ist.»

In diesem Beweis ist eine kleine Ungenauigkeit, welche aber leicht zu beheben ist. Im zweiten Teil des Beweises wird behauptet, dass $(2^{r+1} - 1)\ \sigma(q)$; $\sigma(q)$; $2^{r+1} - 1$ und 1