

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 24 (1969)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Elementare Ableitung der Laplaceschen Formel der Wahrscheinlichkeitsrechnung  
**Autor:** Heigl, F.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-26646>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Elementare Ableitung der Laplaceschen Formel der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Den Abschluss der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung bildet die Untersuchung der grundlegenden Gesetzmässigkeiten, die eines der wichtigsten Schemata der Wahrscheinlichkeitsrechnung, das Schema einer Folge unabhängiger Versuche, beherrschen. Die Tatsachen, die man an diesem Schema bemerkte, waren richtungsweisend bei der Untersuchung komplizierterer Schemata, die man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachtet. BERNOULLI hat eine Folge unabhängiger Zufallsgrössen für den Fall untersucht, dass nur die komplementären Ereignisse  $A$  und  $\bar{A}$  mit den Wahrscheinlichkeiten  $w(A) = p$ ,  $w(\bar{A}) = q = 1 - p$  eintreten. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis  $A$  bei  $n$  unabhängigen Durchführungen des Experimentes genau  $x$ -mal eintritt, ist gegeben durch die nach NEWTON bezeichnete Formel

$$w_n(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Die so bestimmte diskrete Verteilung heisst Bernoullische oder binomische Verteilung. Sie spielt in den Anwendungen eine grosse Rolle. Da die Newtonsche Formel für grosse  $n$  numerisch schwer zu handhaben ist, ist es notwendig, eine asymptotische Formel aufzustellen, die es gestattet,  $w_n(x)$  auch für grosse  $n$  in einfacher Weise und mit hinreichender Genauigkeit zu berechnen. Diese Formel hat als erster LAPLACE 1812 für beliebige  $0 < p < 1$  angegeben. Sie zählt zu den wichtigsten Resultaten der Wahrscheinlichkeitsrechnung, denn hier tritt zum erstenmal das Exponentialgesetz oder die Normalverteilung auf, die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung grosse Bedeutung hat. Bei der Ableitung der Laplaceschen Formel werden aber vielfach kompliziertere Hilfsmittel benutzt, wie Reihenentwicklungen, Stirlingsche Formel, charakteristische Funktionen, zentraler Grenzwertsatz. Hier soll aufgezeigt werden, wie man mit einfacheren Hilfsmitteln der Infinitesimalrechnung den Grenzübergang zur Laplaceschen Formel durchführen und die gleichmässige Konvergenz der Newtonschen Formel gegen die Laplacesche Formel in jedem abgeschlossenen Intervall nachweisen kann.

Der Beweis setzt die Kenntnis der statistischen Masszahlen Erwartungswert  $E(X)$  und Streuung  $D^2(X)$  einer binomisch verteilten Zufallsgrösse  $X$  voraus. Es gilt [1]

$$E(X) = \xi = \sum_{\gamma=1}^n \gamma w_n(\gamma) = n p,$$

$$D^2(X) = \sigma = E(X - \xi)^2 = n p q, \quad (p + q = 1).$$

Ordnet man nach MISES [2] der diskreten Variablen  $x$  die Variable  $y$  zu durch die Transformation

$$y = x - n p, \tag{1}$$

betrachtet man also die Zufallsgrösse

$$Y = X - n p, \quad (1')$$

so ist  $E(Y) = 0$  für alle  $n$ , während  $D^2(Y)$  unverändert gleich  $n p q$  ist. Die Transformation (1') wird nun so abgeändert, dass nicht nur  $E(Y)$  von  $n$  unabhängig wird, sondern auch  $D^2(Y)$ . Dies leistet folgende Transformation:

$$Z = h (X - n p), \quad (2)$$

wobei  $h$  ein positiver Parameter ist. Die Zufallsgrösse  $Z$  hat dann den Erwartungswert  $E(Z) = 0$ , die Streuung  $D^2(Z) = h^2 n p q$ . Setzt man

$$h^2 = \frac{1}{\tau n p q}, \quad (3)$$

wobei  $\tau$  ein beliebiger fest gewählter positiver Parameter ist, so gilt  $D^2(Z) = 1/\tau$ , die Streuung ist also unabhängig von  $n$ .

Deutet man die  $w_n(\gamma)$  als Massenpunkte, die in den Punkten  $x = \gamma$  konzentriert sind, so kann  $E(X)$  als Schwerpunkt,  $D^2(X)$  als Trägheitsmoment der Massenverteilung bezüglich des Schwerpunktes gedeutet werden. Daraus folgt, dass der Schwerpunkt der Verteilung von  $Z$  für alle  $n$  im Nullpunkt liegt, wobei die Massenpunkte um den Schwerpunkt so angeordnet sind, dass alle Verteilungen dasselbe Trägheitsmoment um den Schwerpunkt haben.

Transformation (2) hat noch folgende bemerkenswerte Eigenschaften: Da  $z = h(x - n p)$  ist, gilt

$$x = n p + \frac{z}{h}, \quad x + 1 = n p + \frac{z + h}{h},$$

d. h. ändert sich  $x$  um 1, so ändert sich die entsprechende Grösse  $z$  um  $h$ . Ist nun  $n$  genügend gross, so ist  $h$  nach (3) entsprechend klein. Das bedeutet, dass die  $w_n$ -Werte, als Funktionen der diskreten Veränderlichen  $z$  aufgefasst, mit zunehmendem  $n$  immer mehr um den Nullpunkt zusammengeschoben werden, so dass die Streuung konstant bleibt. Man kann daher erwarten, dass sich für die oberen Begrenzungspunkte der  $w_n$ -Werte für  $n \rightarrow \infty$  eine kontinuierliche glatte Kurve ergibt, deren Gleichung nun ermittelt werden soll.

Der Beweis stützt sich auf einige bekannte Eigenschaften der Exponentialfunktion. Es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

wobei  $n$  irgendeine divergente Zahlenfolge durchläuft. Die Folge der Funktionen  $f_n(x) = (1 + (x/n))^n$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$  konvergiert monoton gegen  $e^x$ , sofern  $1 + (x/n) > 0$  ist. Durch Wahl genügend grosser  $n$  kann diese Ungleichung für alle  $x$  aus einem abgeschlossenen Intervall erfüllt werden. Man kann nun zeigen, dass eine in einem abgeschlossenen Intervall  $J = (a, b)$  mit  $a < b$  monotone beschränkte Funktionenfolge in  $J$  sogar gleichmässig konvergiert. Um dies für unseren Fall zu beweisen, setzt man

$$\delta_n(x) = e^x - (1 + (x/n))^n.$$

Es ist dann zu zeigen, dass  $\delta_n(x) < \varepsilon$  wird für  $n > N(\varepsilon)$ , wobei  $N$  von den  $x$  aus  $J$  unabhängig ist. Betrachtet man einen Punkt  $x_1$  aus  $J$ , so sei  $\delta_n(x_1) < \varepsilon/2$  für  $n > N(x_1)$ . Da aber  $\delta_n(x)$  eine stetige Funktion für alle  $x$  aus  $J$  ist, insbesondere für  $x = x_1$ , so gibt es eine abgeschlossene Umgebung  $U(x_1)$  von  $x_1$ , so dass die Schwankung von  $\delta_n(x)$  für alle  $x$  aus  $U(x_1)$  die Grösse  $\varepsilon/2$  nicht überschreitet. Es ist dann  $\delta_n(x) < \varepsilon$  für alle  $x$  aus  $U(x_1)$  und  $n > N(x_1)$ . Die abgeschlossene Punktmenge aus  $J$  lässt sich durch endlich viele Umgebungen  $U(x_\mu)$  ( $\mu = 1, 2, 3, \dots, m$ ) so lückenlos überdecken – wobei teilweise Überlagerungen der einzelnen  $U(x_\mu)$  nicht ausgeschlossen sind – so dass für alle  $x$  aus den  $U(x_\mu)$  jeweils  $\delta_n(x) < \varepsilon$  wird, sofern nur  $n > N(x_\mu)$  ist. Ist  $N = \text{Max } [N(x_1), N(x_2), \dots, N(x_m)]$ , so ist  $\delta_n(x) < \varepsilon$  für alle  $x$  aus  $J$ , d. h. die Folge der  $f_n(x)$  konvergiert für alle  $x$  aus  $J$  gleichmässig gegen  $e^x$ .

Da der Ausdruck für  $w_n(x)$  infolge der darin vorkommenden Binomialkoeffizienten schwer zu handhaben ist, betrachtet man den Quotienten  $w_n(x+1)/w_n(x)$ . Es gilt wegen (2) und (3)

$$\frac{w_n(x+1)}{w_n(x)} = \frac{n-x}{n+1} \cdot \frac{p}{q} = \frac{1 - \frac{z}{n h q}}{1 + \frac{z+h}{n h p}}.$$

Daraus folgt

$$\ln w_n(x+1) - \ln w_n(x) = \ln \left(1 - \frac{z}{n h q}\right) - \ln \left(1 + \frac{z+h}{n h p}\right).$$

Für  $x \neq n$  sind die Argumente der Logarithmen  $> 0$ . Mit der Abkürzung  $\ln w_n(x) = y_n(z)$  werden nun die Quotienten

$$\frac{y_n(z+h) - y_n(z)}{h} = \ln \left(1 - \frac{z}{n h q}\right)^{1/h} - \ln \left(1 + \frac{z+h}{n h p}\right)^{1/h}$$

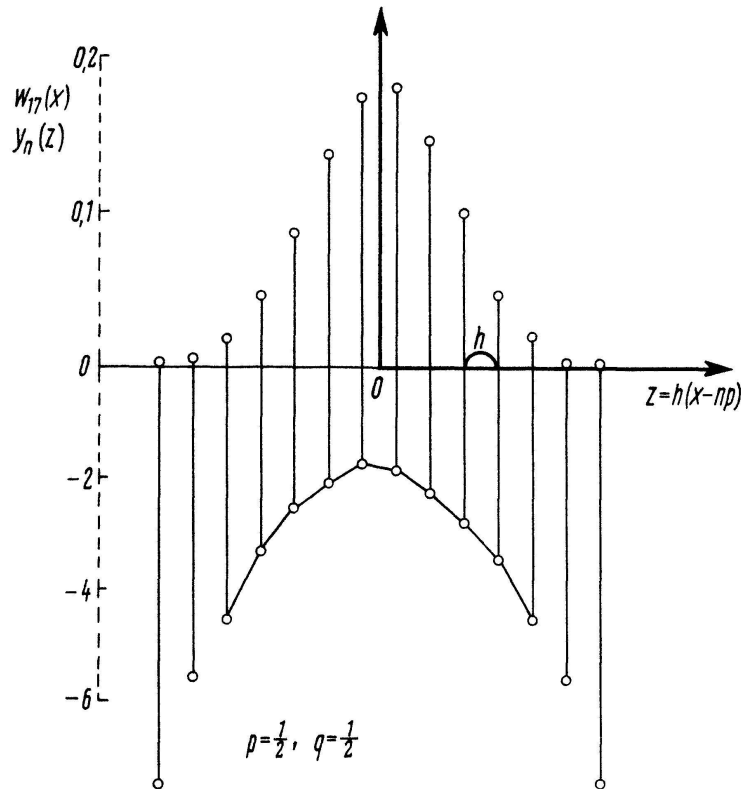
gebildet, die nur für solche diskrete Werte  $z$  definiert sind, für die das Argument von  $w_n$  eine ganze Zahl ist. Da nach (3)  $h^2 = 1/\tau n p q$  ist, also  $n h q = 1/\tau p h$ ,  $n h p = 1/\tau q h$  ist, gilt

$$\frac{y_n(z+h) - y_n(z)}{h} = \ln(1 - \tau p h z)^{1/h} - \ln(1 + \tau q h (z+h))^{1/h}.$$

Die Argumente der Logarithmen stellen wegen (3) für  $n = 1, 2, 3, \dots$  zwei Folgen in  $z$  dar, die nach den obigen Feststellungen für  $n \rightarrow \infty$  gleichmässig gegen  $e^{-\tau p z}$  bzw.  $e^{-\tau q z}$  konvergieren. Infolge der Stetigkeit des Logarithmus konvergieren also auch die Quotienten gleichmässig, und zwar gegen  $-\tau p z - \tau q z = -\tau z$ , da  $p + q = 1$  ist. Die gesuchte Grenzfunktion der  $y_n(z)$  für  $n \rightarrow \infty$ , die mit  $y(z)$  bezeichnet wird, genügt daher der Differentialgleichung  $y'(z) = -\tau z$ , daher ist  $y(z) = -(\tau/2) z^2 + \text{konst.}$  Damit ist

$$\left| \frac{y_n(z+h) - y_n(z)}{h} + \tau z \right| < \varepsilon \quad \text{für } n > N(\varepsilon) \quad (4)$$

und alle  $z$  etwa aus dem Intervall  $J = (-a, a-h)$ , so dass  $|z| < a$ ,  $|z+h| < a$  ist. Verbindet man nun die Endpunkte jeweils benachbarter Ordinaten  $y_n(z)$  geradlinig (s. Abbildung), so entsteht ein stetiger Kurvenzug der kontinuierlich veränderlichen Grösse  $z$ .



Mit der so definierten Funktion, die mit  $\bar{y}_n(z)$  bezeichnet wird, betrachtet man die Integralfolge

$$\int_{z_0}^z \frac{\bar{y}_n(t+h) - \bar{y}_n(t)}{h} dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (5)$$

Dabei sollen  $z_0$  und  $z$  ( $z_0 < z$ ) positiven ganzzahligen  $x$  entsprechen. Deutet man das bestimmte Integral als Fläche, so ergibt sich aus der Abbildung für (5) die Darstellung:  $y_n(z + (h/2)) - \bar{y}_n(z_0 + (h/2))$ . Da (4) auch dann gilt, wenn man  $y_n$  durch  $\bar{y}_n$  ersetzt, erhält man

$$\left| \int_{z_0}^z \left( \frac{\bar{y}_n(t+h) - \bar{y}_n(t)}{h} + \tau t \right) dt \right| < \varepsilon (z - z_0) < \varepsilon \cdot 2a.$$

Die Integralfolge (5) konvergiert also gleichmäßig gegen die Grenzfunktion

$$-\int_{z_0}^z \tau t dt = -\frac{\tau}{2} \cdot z^2 + \frac{\tau}{2} \cdot z_0^2.$$

Daraus ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz der Folge  $\bar{y}_n(z)$  gegen die Grenzfunktion  $-(\tau/2) z^2 + \text{konst.}$  Dasselbe gilt auch für die Folge  $y_n(z)$ , denn  $\bar{y}_n(z) = y_n(z)$  für solche  $z$ , denen positive ganzzahlige  $x$  entsprechen, und das ist das wesentlichste Ergebnis der ganzen Untersuchung.

Da  $y_n(z) = \ln w_n(x)$  ist, folgt

$$w_n(x) = C \cdot e^{-\frac{\tau}{2} z^2} = C \cdot e^{-\frac{(x - np)^2}{2npq}}$$

unabhängig von  $\tau$ .

Die Konstante  $C$  berechnet sich aus der Forderung, dass  $w_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  eine Dichtefunktion der Variablen  $x$  sein muss, d.h.  $\int_{-\infty}^{\infty} w_n(x) dx$  muss gleich 1 sein. Da  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  ist, folgt  $C = 1/\sqrt{2\pi n p q}$ .

Zusammenfassend erhält man also den Satz von Laplace:

Wenn die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ereignisses  $A$  in  $n$  unabhängigen Versuchen konstant gleich  $p$  ( $0 < p < 1$ ) ist, so genügt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in diesen Versuchen das Ereignis  $A$  genau  $x$ -mal eintritt, für  $n \rightarrow \infty$  der Beziehung

$$w_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n p q}} \cdot e^{-\frac{(x - n p)^2}{2 n p q}},$$

und zwar gleichmässig für alle  $x$ , für die sich die nach (2) entsprechende Grösse  $z$  in einem endlichen Intervall befindet.

F. HEIGL, Weiden BRD

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] P. BUCHNER, *Bemerkungen zum Satz von Bernoulli*, *El. Math.* 7, 8 (1952).  
 [2] R. v. MISES, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Rosenberg-Verlag, New York 1945).

## Allgemeine Gestalt einer geradenerhaltenden Abbildung

In der folgenden Abhandlung soll gezeigt werden, dass eine stetige geradenerhaltende Abbildung der Ebene auf sich projektiv sein muss. Zu diesem Zweck wird zunächst Satz 1 bewiesen.

*Satz 1:* Es gibt genau eine projektive Abbildung der Ebene auf sich, die 4 Punkte  $A, B, C, O$  in allgemeiner Lage<sup>1)</sup> in 4 Punkte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  in allgemeiner Lage überführt, wobei  $A$  in  $P_1$ ,  $B$  in  $P_2$ ,  $C$  in  $P_3$  und  $O$  in  $P_4$  übergeht.

*Beweis:* Den folgenden Überlegungen sind homogene Koordinaten zugrunde gelegt. Die gesuchte projektive Abbildung werde in der Gestalt

$$\begin{aligned} \varrho x &= a_{11} u + a_{12} v + a_{13} w, \\ T: \quad \varrho y &= a_{21} u + a_{22} v + a_{23} w, \\ \varrho z &= a_{31} u + a_{32} v + a_{33} w \end{aligned}$$

angesetzt. Das Koordinatendreieck wollen wir dabei so wählen, dass seine Ecken mit  $A, B, C$  zusammenfallen, während  $O$  der Einheitspunkt ist, was stets möglich ist, da ja  $A, B, C$  und  $O$  in allgemeiner Lage sind. Für die Koordinatendarstellung von  $A, B, C$  und  $O$  gilt dann:

$$A(1, 0, 0), \quad B(0, 1, 0), \quad C(0, 0, 1), \quad O(1, 1, 1).$$

<sup>1)</sup> 4 Punkte heissen «in allgemeiner Lage», wenn keine drei auf einer Geraden liegen.