

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 24 (1969)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Über das invariante Rechtwinkelpaar einer schiefen Affinität und dessen Zusammenhang mit der Jakobischen Konstruktion der Achsen einer Ellipse  
**Autor:** Sieber, Helmut  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-26644>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.04.2026

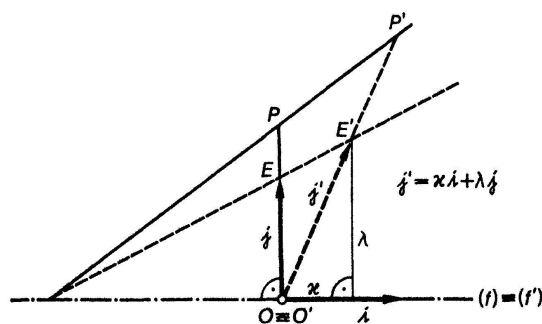
**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] K. KOMMERELL, *Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen*, Math. Ann. 60, 548–596 (1905).
- [2] E. KREYSZIG, *Differentialgeometrie*. 2. Aufl. (Leipzig 1968).
- [3] F. MINDING, *Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen aufeinander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über Flächen von unveränderlichem Krümmungsmasse*. J. reine angew. Math. 19, 370–387 (1839).
- [4] H.-W. PU, *Isometry Properties of the Surfaces of the Real and the Imaginary Parts of Analytic Functions*, M. Sc. Thesis (Supervisor E. KREYSZIG), (Ohio State University, Columbus, Ohio 1960).
- [5] P. STÄCKEL, *Zur Theorie des Gaußschen Krümmungsmasses*, Ber. Verh. Kön. Sächs. Akad. Wiss. 45, 163–169 (1893).
- [6] E. ULLRICH, *Betragflächen mit ausgezeichnetem Krümmungsverhalten*, Math. Z. 54, 297–328 (1951).
- [7] E. ULLRICH, *Geometrisches über Potenzbetragflächen*, Z. angew. Math. Mech. 31, 250–251 (1951).
- [8] A. WANGERIN, *Zur Theorie des Gaußschen Krümmungsmasses*, Ber. Verh. Kön. Sächs. Akad. Wiss. 45, 170–172 (1893).
- [9] W. WUNDERLICH, *Zur Geometrie der Potenzbetragflächen*, Arch. Math. 14, 204–211 (1963).
- [10] J. ZAAT, *Differentialgeometrie der Betragflächen analytischer Funktionen*, Mitt. Math. Sem. Univ. Giessen 30 (1944).

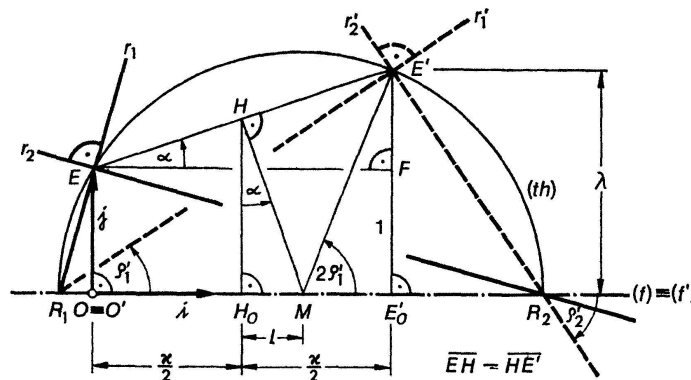
## Über das invariante Rechtwinkelpaar einer schiefen Affinität und dessen Zusammenhang mit der JAKOBISCHEN Konstruktion der Achsen einer Ellipse

Eine perspektive Affinität sei durch ihre orientierte Fixpunktgerade  $(f) \equiv (f')$  und durch ein Paar zugeordneter Punkte  $P \rightarrow P'$  gegeben. Zur Beschreibung der Abbildung legen wir  $(f)$  durch einen Einheitsvektor  $\mathbf{i}$  fest, konstruieren den Bildpunkt  $E'$  eines Punktes  $E$ , der den Abstand  $+1$  von  $(f)$  besitzt, und geben den Bildvektor  $\overrightarrow{O'E'} = \mathbf{j}' = \kappa \mathbf{i} + \lambda \mathbf{j}$  ( $\lambda \neq 0$ ) des Originalvektors  $\overrightarrow{OE} = \mathbf{j}$  an (siehe Figur 1). Die Abbildung ist durch  $\mathbf{j}'$  oder durch die Parameter  $\kappa$  und  $\lambda$  eindeutig festgelegt (vgl. [3, S. 17]).



Figur 1

Da die Frage nach dem invarianten Rechtwinkelpaar für  $\kappa = 0$  (Identität, normale Geradenspiegelung, normale Affinität) uninteressant ist, soll  $\kappa \neq 0$  vorausgesetzt werden. Für  $\kappa \neq 0$ ,  $\lambda = 1$  erhalten wir eine Scherung, für  $\kappa \neq 0$ ,  $\lambda = -1$  eine Schrägspiegelung, für  $\kappa \neq 0$ ,  $|\lambda| \neq 1$  eine eigentliche schiefe Achsenaffinität. Unsere Untersuchungen für  $\kappa \neq 0$ ,  $\lambda \neq 0$  schliessen also die Sonderfälle Scherung und schiefe Geradenspiegelung ein. In bekannter Weise konstruieren wir zunächst das invariante Rechtwinkelpaar  $r_1'$  und  $r_2'$  einer solchen perspektivaffinen Punktverwandtschaft (siehe Figur 2; vgl. z. B. [2, S. 78]) und berechnen dann die zu  $r_1'$  und  $r_2'$  gehörenden, auf  $(f) \equiv (f')$  bezogenen Richtungswinkel  $\varrho_1'$  und  $\varrho_2'$  aus den Skalaren  $\kappa$  und  $\lambda$ .



Figur 2

### 1. Die Richtungswinkel des invarianten Rechtwinkelpaares

Wegen  $\varrho_1' = \varrho_2' \pm 90^\circ$  genügt es, einen der beiden Winkel mit Hilfe von  $\kappa$  und  $\lambda$  auszudrücken.

Nach dem Satz vom Mittelpunktswinkel ist  $\sphericalangle R_2 M E' = 2\varrho_1'$  (siehe Figur 2). Da  $\cot 2\varrho_1' = \cot 2\varrho_2'$  ist, gilt für jeden Richtungswinkel  $\varrho_i'$  des invarianten Rechtwinkelpaares  $\cot 2\varrho_i' = \overline{ME_0'}/\overline{E_0'E'}$ . Nun ist  $\overline{H_0E_0'} = \kappa/2$ . Wegen  $\overline{ME_0'} = \overline{H_0E_0'} - \overline{H_0M} = (\kappa/2) - l$  ist  $\cot 2\varrho_i' = ((\kappa/2) - l)/\lambda$  mit  $l = \overline{H_0M}$ . Aus  $\tan \alpha = \overline{FE'}/\overline{EF} = (\lambda - 1)/\kappa$  und  $\tan \alpha = \overline{H_0M}/\overline{H_0H} = 2l/(1 + \lambda)$  ergibt sich  $l = (\lambda^2 - 1)/2\kappa$ . Also gilt:

$$\cot 2\varrho_i' = \frac{1}{2} \left( \frac{\kappa}{\lambda} - \frac{\lambda^2 - 1}{\kappa\lambda} \right) \kappa \neq 0, \quad \lambda \neq 0 \quad (1)$$

Durch Spezialisierung von (1) für  $\lambda = +1$  (Scherung) und für  $\lambda = -1$  (Schrägspiegelung) erhalten wir für diese Abbildungen:

$$\text{Scherung:} \quad \cot 2\varrho_i' = \kappa/2 \quad \kappa \neq 0 \quad (1')$$

$$\text{Schrägspiegelung:} \quad \cot 2\varrho_i' = -\kappa/2 \quad \kappa \neq 0 \quad (1'')$$

Das Rechtwinkelpaar einer Schrägspiegelung mit Parameter  $\kappa$  ergibt sich aus dem Rechtwinkelpaar einer Scherung mit demselben Parameter und derselben Achse durch Normalspiegelung an dieser Achse. Geometrisch ist das evident, da sich diese Schrägspiegelung durch Hintereinanderausführung der Scherung und der Normalspiegelung ersetzen lässt.





Es sei  $\sphericalangle C O A_2 = \varphi$ ; mit  $\overline{OC} = a_1 \cos \varphi$  und  $\overline{CA_2} = a_1 \sin \varphi$  ergibt sich:

$$\begin{array}{l|l} \overline{OA_2}^2 = a_1^2 \cos^2 \varphi + (a_1 \sin \varphi - b_1)^2 & \overline{OA_2}^2 = a_1^2 \cos^2 \varphi + (a_1 \sin \varphi + b_1)^2 \\ = a_1^2 + b_1^2 - 2 a_1 b_1 \sin \varphi & = a_1^2 + b_1^2 + 2 a_1 b_1 \sin \varphi \end{array}$$

Nun ist aber  $2 a_1 b_1 \sin \varphi = 2 a b$  (Flächentreue!) und  $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$ ; damit ergibt sich:

$$\overline{OA_2}^2 = (a - b)^2 \quad | \quad \overline{OA_2}^2 = (a + b)^2 \quad \text{q.e.d.}$$

R. JAKOBI hat seine Konstruktion im Jahre 1952 veröffentlicht und durch kinematische Betrachtungen bewiesen (vgl. [1]). O. TAMASCHKE gab 1963 einen elementargeometrischen Beweis (vgl. [4]). H. SIEBER führte 1967 zwei abbildungsgeometrische Beweise, die nur Drehungen, Parallelverschiebungen und Geradenspiegelungen verwenden (vgl. [3], S. 37–39).

HELMUT SIEBER, Böblingen

#### LITERATUR

- [1] R. JAKOBI, *Zur Konstruktion der Achsen einer Ellipse*, Z. angew. Math. Mech. 32, 30 (1952).
- [2] M. JEGER, *Konstruktive Abbildungsgeometrie*, Rüber (Luzern und Stuttgart, 1964).
- [3] H. SIEBER, *Achsenaffinitäten im Unterricht*, Der Mathematikunterricht, 9. Jahrgang, 1967, S. 5–47.
- [4] O. TAMASCHKE, *Zur Konstruktion der Achsen einer Ellipse nach R. JAKOBI*, El. Math. 18, 3 (1963), S. 58.

## Kleine Mitteilungen

### Eine Bemerkung zum Verfahren von Leverrier

Verschiedene mathematische und technische Probleme führen auf die Berechnung des charakteristischen Polynoms

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda E - A),$$

wobei  $A$  eine beliebige Matrix aus  $M_n(K)$ , dem Ring der komplexen  $n \times n$ -Matrizen, und  $E$  die Einheitsmatrix ist. Entwickelt man diese Determinante in üblicher Weise als Summe von Produkten ihrer Elemente und ordnet dann nach fallenden Potenzen von  $\lambda$ , so erhält man das Ergebnis

$$p_A(\lambda) = \sum_{\omega=0}^n (-1)^\omega c_\omega \lambda^{n-\omega},$$

wobei  $c_0 = 1$ ,  $c_n = \det A$  und für alle  $j = 1, 2, \dots, n-1$

$$c_j = \sum_{[\gamma_1, \dots, \gamma_j] \in K_j} \det \begin{pmatrix} a_{\gamma_1 \gamma_1} & \dots & a_{\gamma_1 \gamma_j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\gamma_j \gamma_1} & \dots & a_{\gamma_j \gamma_j} \end{pmatrix}$$

ist.  $K_j$  ist dabei die Menge sämtlicher Kombinationen  $j$ -ter Klasse ohne Wiederholung:  $[\gamma_1, \dots, \gamma_j] \subseteq [1, \dots, n]$  und  $1 \leq \gamma_1 < \dots < \gamma_j \leq n$ . ([6], S. 114).