

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 24 (1969)  
**Heft:** 1  
  
**Rubrik:** Aufgaben

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 31.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

If  $q > 1$ , then  $(2^{r+1} - 1) \sigma(q)$ ,  $\sigma(q)$ ,  $(2^{r+1} - 1)$  and 1 are distinct divisors of  $(2^{r+1} - 1) \sigma(q)$ , so that from (1), we have

$$2^{r+1} q \geq (2^{r+1} - 1) \sigma(q) + \sigma(q) + (2^{r+1} - 1) + 1 = 2^{r+1} (\sigma(q) + 1) > 2^{r+1} q,$$

a contradiction. Therefore  $q = 1$ , so that from (1), we have  $2^{r+1} = \sigma(2^{r+1} - 1)$ , which implies that  $2^{r+1} - 1$  is a prime. Hence  $n = 2^r$ , where  $2^{r+1} - 1$  is a prime. Thus the theorem is proved.

*Problem.* Are there odd super perfect numbers?

D. SURYANARAYANA, Waltair, India

### Bemerkung zur Aufgabe 493

In den Anwendungen der Aufgabe [1] wurde gezeigt, dass die unimodular zentro-affine Krümmung eines Ovals relativ zum Schwerpunkt einem Vierscheitelsatz genügt.

Es sei nun  $P$  ein innerer Punkt eines Ovals  $K$ . Die polare Reziproke von  $K$  bezüglich des Einheitskreises mit dem Mittelpunkt  $P$  sei  $K^P$ . Wenn  $F$  den Flächeninhalt bezeichnet, so ist  $F(K) F(K^P)$  eine affine Invariante [2]. Die Bestimmung des Minimums dieses Ausdrucks, d.h.

$$\min_K \min_{P \in K} F(K) F(K^P)$$

ist eine ungelöste Frage. Das Minimum ist allgemein  $\geq 27/4$  (angenommen für ein Dreieck bezüglich seines Schwerpunkts) und  $\geq 8$  für ein symmetrisches Oval<sup>1)</sup>. Die Stützfunktion von  $K$ , gemessen von  $P$ , sei  $h(\theta)$ . Hier ist  $\theta$  der Stützwinkel. Dann ist  $h^{-1}(\theta)$  der Radiusvektor von  $K^P$  als Funktion des Polarwinkels  $\theta$ . SANTALÓ [2] hat bewiesen, dass  $F(K) F(K^P)$  ein einziges Minimum in  $K$  hat und dass der entsprechende Punkt  $P$  durch

$$\int_0^{2\pi} h^{-3}(\theta) \sin \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} h^{-3}(\theta) \cos \theta \, d\theta = 0$$

charakterisiert ist. Man überzeugt sich leicht, dass dies bedeutet, dass  $P$  der Schwerpunkt von  $K^P$  ist. Die letztere Bedingung definiert also einen einzigen Punkt in  $K$ .

Wenn  $K$  einen stetigen euklidischen Krümmungsradius  $R(\theta)$  besitzt, so ist die unimodular zentro-affine Krümmung gleich  $k(\theta) = (R h^3)^{-1} = h^{-3}/R$ . Aus Aufgabe 493 folgt sofort: *Die unimodular zentro-affine Krümmung eines Ovals relativ zum Minimalpunkt von  $F(K) F(K^P)$  genügt einem Vierscheitelsatz.*

(Research partially supported by NSF Grant GP-5760.)

H. GUGGENHEIMER, University of Minnesota, Minneapolis, Minn.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Aufgabe 493, El. Math. 21, 17–18 (1966).
- [2] L. A. SANTALÓ, *Un invariante afín para las curvas convexas del plano*. Matematicae Notae 8, 103–111; L. A. SANTALÓ, *Un invariante afín para los cuerpos convexos del espacio de n dimensiones*, Portugaliae Math. 8, 155–161 (1949).

<sup>1)</sup> K. MAHLER, Ein Minimalproblem für konvexe Polygone, Mathematica (Zutphen) B. 7, 118–127 (1938/39). Diesen Hinweis verdanke ich Herrn Dr. E. Heil, Darmstadt.

## Aufgaben

**Aufgabe 564.** Ein Glücksspiel wird nach folgender Regel gespielt: In einer Urne befinden sich  $n$  Kugeln, die die Nummern  $1, 2, \dots, n$  tragen. Ein Spieler darf nach Entrichtung eines Einsatzes diese Kugeln einzeln nacheinander aus der Urne ziehen, und wenn darunter  $r$  Kugeln sind, die beim sten Zug die Nummer  $s$  trugen, erhält er den  $r$ fachen Betrag seines Einsatzes zurück.

Man beurteile die Gewinnchance des Spielers unter der Voraussetzung, dass alle möglichen Ausfälle gleich wahrscheinlich sind.

O. REUTTER, Ochsenhausen

*Lösung:* Der Erwartungswert des Gewinnes des Spilers ist gleich seinem Einsatz, den wir als 1 annehmen. Zum Beweis bedeute  $f(s)$  die Anzahl derjenigen Permutationen von  $s$  Zahlen, bei denen keine einzige Zahl ihren ursprünglichen Platz beibehält. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler beim Ziehen der  $n$  Kugeln genau  $r$  mal die «richtige» Kugel genommen hat, ist offenbar

$$w(r) = \frac{1}{n!} \binom{n}{r} f(n-r). \quad (1)$$

Der Erwartungswert des Gewinnes ist

$$E = \sum_{r=0}^n r w(r) = \frac{1}{n!} \sum_{r=1}^n r \binom{n}{r} f(n-r). \quad (2)$$

Durch Abzählen aller Permutationen von  $n-1$  Zahlen erhält man die Beziehung

$$(n-1)! = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-1-i} f(i)$$

oder

$$f(n-1) = (n-1)! - \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{n-1-i} f(i). \quad (3)$$

Setzt man (3) im ersten Summanden der Summe in (2) ein, so folgt wegen

$$\binom{n-1}{n-1-i} = \frac{n-i}{n} \binom{n}{n-i}$$

sofort  $E = 1$ .

H. MEILI, Winterthur

Weitere Lösungen sandten G. BACH (Braunschweig) und P. HOHLER (Dietikon).

**Aufgabe 565.** Man zeige, dass in einem orthonormierten Koordinatensystem die Gleichung

$$(x_1^2 - x_2 x_3)^2 + (x_2^2 - x_3 x_1)^2 + (x_3^2 - x_1 x_2)^2 = c^4$$

eine Drehfläche darstellt. Man bestimme die Drehachse und eine Meridiankurve.

L. KIEFFER, Luxemburg

1. *Lösung:* Die gemeinsamen Punkte  $P(x_1, x_2, x_3)$  der gegebenen Fläche

$$F: \Sigma (x_i^2 - x_{i+1} x_{i+2})^2 = c^4$$

und einer zur Geraden  $g: x_1 = x_2 = x_3$  senkrechten Ebene  $E: \Sigma x_i = 3t$  (Parameter  $t$  beliebig reell) bilden einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $M(t/t/t)$ , dessen Radius  $r$  der Beziehung  $3r^4 + 36t^2r^2 = 4c^4$  genügt. Da dies für alle  $t$  gilt, ist  $F$  eine Drehfläche mit der Drehachse  $g$ .

*Beweis:* Es ist

$$\overline{MP^2} = \Sigma (x_i - t)^2 = \Sigma x_i^2 - 2t \Sigma x_i + 3t^2 = \Sigma x_i^2 - 3t^2,$$

also

$$3 \overline{MP^4} + 36t^2 \overline{MP^2} = 3(\Sigma x_i^2 - 3t^2)(\Sigma x_i^2 + 9t^2).$$

Wegen  $\Sigma x_i = 3t$  ist  $\Sigma x_i^2 + 2 \Sigma x_i x_{i+1} = 9t^2$ , somit

$$\Sigma x_i^2 - 3t^2 = (2/3)(\Sigma x_i^2 - \Sigma x_i x_{i+1}) \text{ und } \Sigma x_i^2 + 9t^2 = 2(\Sigma x_i^2 + \Sigma x_i x_{i+1}),$$

folglich

$$3 \overline{MP^4} + 36t^2 \overline{MP^2} = 4\{(\Sigma x_i^2)^2 - (\Sigma x_i x_{i+1})^2\} = 4 \Sigma (x_i^2 - x_{i+1} x_{i+2})^2 = 4c^4.$$

Bei festem  $t$  ist demnach  $\overline{MP}$  konstant für alle  $P \in E \cap F$ , und es ist  $M \in g \cap E$ , womit obige Aussage bewiesen ist.

Aus  $3r^4 + 36t^2r^2 = 4c^4$  ist zu entnehmen, dass eine Meridiankurve vom Typus einer Konchoide ist; sie nähert sich für  $|t| \rightarrow \infty$  asymptotisch der Drehachse  $g$  und nimmt für  $t = 0$  ihren grössten Achsenabstand  $c(4/3)^{1/4}$  an.

O. REUTTER, Ochsenhausen

*2. Lösung:* Unter Beibehaltung der  $x_3$ -Achse drehen wir die  $x_1$ -Achse in die Halbierende des 1. Quadranten der  $x_1 x_2$ -Ebene. Das neue System heisse  $XYZ$ . Bei fester  $Y$ -Achse drehen wir sodann die  $Z$ -Achse in die ursprüngliche Gerade  $x_1 = x_2 = x_3$ , die sich in der Bezeichnung  $z$ -Achse als Drehachse der Rotationsfläche erweisen wird. Das endgültige System heisse  $xyz$ . Insgesamt liegt jetzt vor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2/3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2/3} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2/3} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Die Flächengleichung lautet dann  $4c^4 = 3(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 4z^2)$ . Es liegt also wie angekündigt eine Drehfläche  $z = f(x^2 + y^2)$  vor. Der Meridian  $x = 0$  hat z. B. für  $c^4 = 3/4$  die Gleichung  $z = (1/2)\sqrt{y^{-2} - y^2}$ . I. PAASCHE, München

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küschnacht) und K. ZACHARIAS (Berlin).

**Aufgabe 566.** In einer Ebene, in der ein Kreis  $K$  und ein Punkt  $A$  gegeben sind, wird jedem Punkt  $P$  derjenige Punkt  $P'$  auf der Geraden  $AP$  zugeordnet, der zu  $P$  bezüglich  $K$  konjugiert ist. Man beweise: Fasst man alle Geraden der Ebene, die durch die Abbildung  $P \rightarrow P'$  in zueinander ähnliche Kegelschnitte übergehen, in eine Schar zusammen, so sind die Enveloppen dieser Scharen konzentrische Kreise. Diejenigen Geraden, die in gleichseitige Hyperbeln übergehen, bilden das Büschel durch das gemeinsame Zentrum dieser Kreise. C. BINDSCHEDLER, Küschnacht

*Lösung:* Der Bildpunkt  $P'$  des Punktes  $P$  der Geraden  $g$  ist der Schnittpunkt von  $AP$  mit der Polaren  $p$  von  $P$ .  $p$  läuft durch den Pol von  $g$  und steht senkrecht auf  $MP$  ( $M$  = Mittelpunkt von  $K$ ). Die Geraden  $AP$  ( $P \in g$ ) und die zugehörigen Polaren  $p$  bilden daher zwei projektive Strahlenbüschel mit dem Kegelschnitt  $g'$  (= Bild von  $g$ ) als «Schnittkurve».

Die Ferngerade der Ebene wird auf den Thaleskreis  $T$  mit dem Durchmesser  $AM$  abgebildet. Wegen  $(P')' = P$  sind die Urbilder der Fernpunkte von  $g'$  die (reellen oder komplexen) Schnittpunkte  $S_1, S_2$  von  $g$  mit  $T$ . Die Bildpunkte  $S'_1, S'_2$  liegen auf  $AS_1, AS_2$ . Also ist  $\sphericalangle S_1AS_2$  der «Winkel» zwischen den Fernpunkten von  $g'$ . Zwei Kegelschnitte sind ähnlich, wenn ihre Fernpunkte denselben (reellen oder komplexen) Winkel einschliessen.  $\sphericalangle S_1AS_2$  ist Peripheriewinkel auf dem Thaleskreis  $T$ . Es werden somit diejenigen Geraden als ähnliche Kegelschnitte abgebildet, die (nach dem Peripheriewinkelsatz) gleichlange Sehnen aus  $T$  ausschneiden, die also einen zu  $T$  konzentrischen Kreis einhüllen. (Im Fall gleichseitiger Hyperbeln ist  $\sphericalangle S_1AS_2 = \pi/2$ , d. h.  $S_1S_2$  Durchmesser von  $T$ .)

W. VINZENZ, München

Weitere Lösungen sandten K. GRÜN (Linz/Donau) und L. KIEFFER (Luxemburg).

**Aufgabe 567.** Man beweise: Eine Zahl  $\alpha$  ist genau dann rational, wenn die Zahlenfolge  $\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \dots$  eine wenigstens dreigliedrige geometrische Teilfolge enthält.

E. TEUFFEL, Korntal/Stuttgart

*Lösung:* Ist  $\alpha = p/q$  ( $p$  und  $q$  natürliche Zahlen), so sind  $\alpha, \alpha + p$  und  $\alpha + 2p + p^2/q$  in geometrischer Progression. Wenn  $\alpha$  rational, aber nicht positiv ist, wende man das obige auf die positive rationale Zahl  $\alpha - [\alpha] + 1$  an.

Sind umgekehrt  $\alpha, \alpha + n$  und  $\alpha + n + m$  in geometrischer Progression ( $n$  und  $m$  natürliche Zahlen), so ist  $\alpha = n^2/(m - n)$  rational. A. BAGER, Hjørring, Dänemark

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küschnacht), P. BUNDSCUH (Freiburg/Br.), P. HOHLER (Dietikon), W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf), H. MEILI (Winterthur), O. REUTTER (Ochsenhausen).

## Neue Aufgaben

**Aufgabe 589.** In einer Ebene sind drei Kreisbüschel gegeben. Man konstruiere drei zueinander orthogonale Kreise, von denen jeder einem dieser Büschel angehört.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

**Aufgabe 590.** Gegeben sind die Ausdrücke

$$A_n = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n \quad \text{und} \quad B_n = \frac{2}{(n+1)!} \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1}.$$

Man zeige  $A_n = B_n = n$  für  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

I. PAASCHE, München

**Aufgabe 591.** Für welche reellen Zahlen  $\alpha$  gilt die Implikation

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \dots = \sum_{i=1}^n x_i^n = \alpha \Rightarrow (\forall r \in \mathbf{N}) \sum_{i=1}^n x_i^{+r} = \alpha,$$

wobei  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) reelle Zahlen sind?

D. VELJAN, Zagreb

**Aufgabe 592.** Für  $k = 1, 2, \dots$  bezeichne  $(n, m)_k$  den grössten gemeinsamen Teiler von  $n$  und  $m$  der Potenz  $k$ ,  $\sigma_s(k, m)$  die Teilerfunktion

$$\sigma_s(k, m) = \sum_{t \mid d^k - m} t^s$$

und  $c_n^{(k)}(m)$  die verallgemeinerte Ramanujansche Summe

$$c_n^{(k)}(m) = \sum_{\substack{1 \leq r \leq n^k \\ (r, n^k)_k = 1}} e^{2\pi i r m / n^k}.$$

Man beweise die für  $R(s) > 1/k$  gültige Darstellung

$$\sigma_{s-1}(k, m) = \zeta(k s) m^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^{(k)}(m)}{n^{ks}},$$

worin  $\zeta$  die Riemannsche Zetafunktion bedeutet.

E. KRÄTZEL, Jena

## Literaturüberschau

*Calculus of Fractions and Homotopy Theory.* Von P. GABRIEL und M. ZISMAN. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35. X und 168 Seiten mit 114 Figuren. DM 38.–. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg und New York 1967.

Dieses Buch vermittelt eine in sich abgeschlossene Darstellung der semisimplizialen Topologie. Es wird dabei durchweg ausführlicher Gebrauch der KategorienSprache gemacht. Der Leser findet zu Beginn des Buches eine Zusammenstellung der fundamentalen Begriffe und Konstruktionen in der Kategorientheorie.

Hauptanliegen des Buches ist die Konstruktion der sogenannten homotopischen Kategorie  $H$  und ihre Beziehung zu andern wohlbekannten Kategorien. Insbesondere wird gezeigt, dass die Kategorie  $H$  äquivalent ist zur Kategorie der CW-Komplexe modulo Homotopie. Ausgangspunkt der Konstruktion von  $H$  ist die Kategorie  $\Delta^0 E$  der semisimplizialen Mengen. In dieser wird eine Homotopie erklärt und in der entsprechenden Kategorie  $\overline{\Delta^0 E}$  der semisimplizialen Mengen modulo Homotopie eine spezielle Klasse  $A$  von Morphismen ausgezeichnet. Geometrisch gesprochen ist  $A$  die Klasse derjenigen Morphismen in  $\overline{\Delta^0 E}$ , deren geometrische Realisierung invertierbar ist. Die homotopische Kategorie  $H$  geht nun aus  $\overline{\Delta^0 E}$  dadurch hervor, dass die Morphismen der Klasse  $A$  formal