

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 24 (1969)  
**Heft:** 1

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

(Diese Übergangswahrscheinlichkeiten  $w_{jk}$  sind als bedingte Wahrscheinlichkeiten nicht definiert für jene  $j$ , für die  $P(Y_n = j) = 0$  ist.)

Diesen Galton-Watson-Prozess, der also eine spezielle Markoffsche Kette darstellt, haben wir in unseren obigen Betrachtungen daraufhin untersucht, dass er spätestens in der  $n$ -ten Generation abbricht, wofür wir die Wahrscheinlichkeit

$$q_n = P(Y_n = 0)$$

durch (1) angegeben haben. Ist aber  $Y_n = 0$ , so folgt aus der Definition des Prozesses

$$P(Y_{n+1} = 0/Y_n = 0) = w_{00} = 1.$$

Das heisst aber, dass mit der  $n$ -ten auch alle spätern Generationen 0 Objekte haben: Die Linie erlischt, das Geschlecht stirbt aus. Der Zustand  $Y_n = 0$  stellt einen *absorbierenden* Zustand dar; er kann nicht mehr verlassen werden. – Mit  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$  haben wir weiter die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass die Linie im Laufe der Zeit erlischt.

Soll unser Prozess in anderer Richtung untersucht werden, indem wir z.B. nach der Wahrscheinlichkeit fragen, in einer bestimmten Generation eine gewisse Anzahl von Objekten vorzufinden, so bieten sich als geeignete mathematische Hilfsmittel erzeugende Funktionen an; es sei dafür auf [1], [3] oder [4] verwiesen.

ROBERT INEICHEN, Luzern/Fribourg

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, 2. Aufl. (New York, London 1957).
- [2] T. E. HARRIS, *The Theory of Branching Processes*, (Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 119), (1963).
- [3] R. INEICHEN, *Vom Aussterben der Geschlechter*, Mitt. naturf. Ges. Luzern, 21 (1967).
- [4] A. LOTKA, *Théorie analytique des associations biologiques*, II<sup>e</sup> partie (Paris 1939).
- [5] A. MOSER, *Familienstatistik und Bevölkerungsvermehrung*, Mitt. des statist. Büros des Kantons Bern, Nr. 45 (1962).
- [6] E. SCHRÖDINGER, *Probability Problems in Nuclear Chemistry*, Proc. R. Ir. Acad. 51 (1945–48).

## Kleine Mitteilungen

### Super Perfect Numbers

A positive integer  $n$  is called a super perfect number if  $\sigma(\sigma(n)) = 2n$ , where  $\sigma(n)$  is the sum of all the divisors of  $n$ . The problem of finding super perfect numbers is similar to that of finding perfect numbers.

In this note we prove the following theorem concerning even super perfect numbers and pose the existence of odd super perfect numbers as a problem:

**Theorem.** An even integer  $n$  is super perfect if and only if  $n$  is of the form  $2^r$ , where  $2^{r+1} - 1$  is a prime.

*Proof.* Firstly, let  $n = 2^r$ , where  $2^{r+1} - 1$  is a prime. Then  $\sigma(\sigma(n)) = \sigma(2^{r+1} - 1) = 2^{r+1} = 2n$ , so that  $n$  is a super perfect number.

Secondly, let  $n$  be any even super perfect number. Then we can write  $n = 2^r q$ , where  $q$  is odd. Since  $n$  is super perfect, we have

$$2^{r+1} q = 2n = \sigma(\sigma(n)) = \sigma((2^{r+1} - 1) \sigma(q)). \quad (1)$$

If  $q > 1$ , then  $(2^{r+1} - 1) \sigma(q)$ ,  $\sigma(q)$ ,  $(2^{r+1} - 1)$  and 1 are distinct divisors of  $(2^{r+1} - 1) \sigma(q)$ , so that from (1), we have

$$2^{r+1} q \geq (2^{r+1} - 1) \sigma(q) + \sigma(q) + (2^{r+1} - 1) + 1 = 2^{r+1} (\sigma(q) + 1) > 2^{r+1} q,$$

a contradiction. Therefore  $q = 1$ , so that from (1), we have  $2^{r+1} = \sigma(2^{r+1} - 1)$ , which implies that  $2^{r+1} - 1$  is a prime. Hence  $n = 2^r$ , where  $2^{r+1} - 1$  is a prime. Thus the theorem is proved.

*Problem.* Are there odd super perfect numbers?

D. SURYANARAYANA, Waltair, India

### Bemerkung zur Aufgabe 493

In den Anwendungen der Aufgabe [1] wurde gezeigt, dass die unimodular zentro-affine Krümmung eines Ovals relativ zum Schwerpunkt einem Vierscheitelsatz genügt.

Es sei nun  $P$  ein innerer Punkt eines Ovals  $K$ . Die polare Reziproke von  $K$  bezüglich des Einheitskreises mit dem Mittelpunkt  $P$  sei  $K^P$ . Wenn  $F$  den Flächeninhalt bezeichnet, so ist  $F(K) F(K^P)$  eine affine Invariante [2]. Die Bestimmung des Minimums dieses Ausdrucks, d. h.

$$\min_K \min_{P \in K} F(K) F(K^P)$$

ist eine ungelöste Frage. Das Minimum ist allgemein  $\geq 27/4$  (angenommen für ein Dreieck bezüglich seines Schwerpunkts) und  $\geq 8$  für ein symmetrisches Oval<sup>1)</sup>. Die Stützfunktion von  $K$ , gemessen von  $P$ , sei  $h(\theta)$ . Hier ist  $\theta$  der Stützwinkel. Dann ist  $h^{-1}(\theta)$  der Radiusvektor von  $K^P$  als Funktion des Polarwinkels  $\theta$ . SANTALÓ [2] hat bewiesen, dass  $F(K) F(K^P)$  ein einziges Minimum in  $K$  hat und dass der entsprechende Punkt  $P$  durch

$$\int_0^{2\pi} h^{-3}(\theta) \sin \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} h^{-3}(\theta) \cos \theta \, d\theta = 0$$

charakterisiert ist. Man überzeugt sich leicht, dass dies bedeutet, dass  $P$  der Schwerpunkt von  $K^P$  ist. Die letztere Bedingung definiert also einen einzigen Punkt in  $K$ .

Wenn  $K$  einen stetigen euklidischen Krümmungsradius  $R(\theta)$  besitzt, so ist die unimodular zentro-affine Krümmung gleich  $k(\theta) = (R h^3)^{-1} = h^{-3}/R$ . Aus Aufgabe 493 folgt sofort: *Die unimodular zentro-affine Krümmung eines Ovals relativ zum Minimalpunkt von  $F(K) F(K^P)$  genügt einem Vierscheitelsatz.*

(Research partially supported by NSF Grant GP-5760.)

H. GUGGENHEIMER, University of Minnesota, Minneapolis, Minn.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Aufgabe 493, *El. Math.* 21, 17–18 (1966).
- [2] L. A. SANTALÓ, *Un invariante afín para las curvas convexas del plano*. *Matematicae Notae* 8, 103–111; L. A. SANTALÓ, *Un invariante afín para los cuerpos convexas del espacio de  $n$  dimensiones*, *Portugaliae Math.* 8, 155–161 (1949).

<sup>1)</sup> K. MAHLER, Ein Minimalproblem für konvexe Polygone, *Mathematica (Zutphen)* B. 7, 118–127 (1938/39). Diesen Hinweis verdanke ich Herrn Dr. E. Heil, Darmstadt.

## Aufgaben

**Aufgabe 564.** Ein Glücksspiel wird nach folgender Regel gespielt: In einer Urne befinden sich  $n$  Kugeln, die die Nummern 1, 2, ...,  $n$  tragen. Ein Spieler darf nach Entziehung eines Einsatzes diese Kugeln einzeln nacheinander aus der Urne ziehen, und wenn darunter  $r$  Kugeln sind, die beim  $s$ ten Zug die Nummer  $s$  trugen, erhält er den  $r$ -fachen Betrag seines Einsatzes zurück.

Man beurteile die Gewinnchance des Spielers unter der Voraussetzung, dass alle möglichen Ausfälle gleich wahrscheinlich sind.

O. REUTTER, Ochsenhausen