Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 24 (1969)

Heft: 1

Artikel: Anschauliche Behandlung eines Verzweigungsprozesses (branching process)

Autor: Ineichen, Robert

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26642

REFERENCES

[1] BOBILLIER, *Tout plan qui passe par la droite que déterminent les milieux des arêtes opposés d'un tétraèdre, le divise en deux parties équivalentes*; *Correspondance mathématique et physique*, Bd 3, (1827), S. 181–182.
[2] MOLENBROEK, *Leerboek der stereometrie* (Groningen 1941), S. 174–175.
[3] HADAMARD, *Leçons de géométrie élémentaire* Bd. 2, (Paris 1932), S. 112.
[4] HOLZMÜLLER, *Elemente der Stereometrie* Bd. 2 (Leipzig 1900), S. 244.
[5] ALTSHILLER-COURT, *Modern Pure Solid Geometry* (New York 1935), S. 89.
[6] F.G.M., *Exercices de géométrie* (Tours, Paris 1907), S. 871–872.
[7] LEVY, *Correspondance mathématique et physique*, Bd. 4 (1828), S. 3.

Anschauliche Behandlung eines Verzweigungsprozesses (branching process)

Verzweigungsprozesse (branching processes) geben eine mathematische Darstellung der Entwicklung einer «Bevölkerung» (population), bestehend aus irgendwelchen Elementen, die sich nach Wahrscheinlichkeitsgesetzen fortpflanzen und nach Wahrscheinlichkeitsgesetzen sterben. Sowohl die Elemente dieser Gesamtheit als auch die Art des Fortpflanzungsvorganges können in sehr verschiedener Art gewählt werden; indessen dürfen sich die Glieder gegenseitig weder hemmen noch fördern. T. E. HARRIS hat in den letzten Jahren in [2] eine zusammenfassende Theorie dieser Prozesse gegeben. – In den folgenden Zeilen soll für einen besonders einfachen Verzweigungsprozess, den Galton-Watson-Prozess, zunächst ein Urnenschema entwickelt werden; aus diesem sollen in anschaulicher Weise einige Folgerungen gezogen werden, die nachher vor allem auf das Problem des Aussterbens der Geschlechter angewendet werden.

1. Ein Urnenschema

Wir denken uns eine mit Kugeln gefüllte Urne. Jede Kugel trage eine nichtnegative ganze Zahl z als Nummer; im übrigen seien alle Kugeln gleich und $0 \leqq z \leqq \omega$. Die Wahrscheinlichkeit, aus der gut durchmischten Urne eine Kugel mit der Zahl z als Nummer zu ziehen, sei p_z. Es ist dann $\sum_{z=0}^{\omega} p_z = 1$, und es sei $p_0 \neq 0$ und $p_0 \neq 1$. Nun werde folgendes Spiel gespielt:

1. Akt: Es wird eine Kugel gezogen und ihre Nummer $z = z_1$ notiert. Dann wird sie zurückgelegt, und die Urne wird wieder gut durchmischt.

2. Akt: Nun werden nacheinander z_1 Kugeln gezogen. Dabei legen wir jede Kugel, nachdem wir ihre Nummer notiert haben, wieder zurück und mischen, bevor die nächste Kugel gezogen wird («Ziehen mit Zurücklegen»). Wir bilden die Summe z_2 der in diesem Akt notierten Nummern.

3. Akt: In analoger Weise ziehen wir jetzt z_2 Kugeln, wieder mit Zurücklegen, und bilden die Summe z_3 ihrer Nummern, *usw.*

Sobald eine der Summen $z_i = 0$ ist, brechen wir das Spiel ab; wir setzen in naheliegender Weise in diesem Falle $z_{i+k} = 0$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Wir stellen jetzt die Frage: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit q_n, dass $z_n = 0$ ist? *q_n ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unser Spiel spätestens mit dem n-ten Akt abbricht.*

2. Die Berechnung von q_n

Natürlich ist $q_1 = p_0$. Wie gross ist q_n für $n > 1$? Wir können diese Wahrscheinlichkeit rekursiv berechnen, indem wir die nachfolgenden Ereignisse $E_0, E_1, E_2, \ldots E_\omega$ betrachten, die sich alle gegenseitig ausschliessen:

E_0: Es wird im ersten Akt eine Kugel mit der Nummer 0 gezogen. Es ist also $z_1 = 0$, und das Spiel bricht bereits mit dem ersten Akt ab: $P(E_0) = p_0$.

E_1: Es wird im ersten Akt eine Kugel mit der Nummer 1 gezogen, und das Spiel bricht spätestens mit dem n-ten Akt ab. Es ist also $z_1 = 1$. Wenn wir nun im zweiten Akt 1 Kugel ziehen, so können wir diese Fortsetzung des Spieles als Beginn eines neuen Spieles betrachten; dieses neue Spiel soll nun aber bereits nach spätestens $(n-1)$ Akten abbrechen. Deshalb ist $P(E_1) = p_1 q_{n-1}$.

E_2: Es wird im ersten Akt eine Kugel mit der Nummer 2 gezogen, und das Spiel bricht spätestens mit dem n-ten Akt ab. Es ist also $z_1 = 2$. Wenn wir nun im zweiten Akt 2 Kugeln ziehen (mit Zurücklegen!), so können wir diese Fortsetzung unseres Spieles als Beginn von zwei neuen Spielen betrachten, die wir uns der Einfachheit halber auch an zwei Urnen der oben beschriebenen Art fortgesetzt denken können; beide Spiele sollen nun aber bereits nach spätestens $(n-1)$ Akten abbrechen. Somit: $P(E_2) = p_2 q_{n-1}^2$.

Analog definieren wir die weitern Ereignisse; E_j bedeutet also für $0 < j \leqq \omega$: Im ersten Akt ergibt sich $z_1 = j$, und die Fortsetzung des Spieles betrachten wir als Beginn von j neuen Spielen, die wir uns auch an j Urnen der obigen Art fortgesetzt denken können und die alle nach spätestens $(n-1)$ Akten abbrechen sollen. Also ist $P(E_j) = p_j q_{n-1}^j$.

Wir erhalten somit

$$q_1 = p_0 \quad \text{und} \quad \text{für } n > 1: \quad q_n = \sum_{i=0}^{\omega} P(E_i) = \sum_{i=0}^{\omega} p_i q_{n-1}^i . \tag{1}$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird unser Spiel *im Laufe der Zeit* überhaupt einmal abbrechen? Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir die durch (1) gegebene Folge $q_1, q_2, q_3, \ldots$:

$$\left.\begin{array}{l}
q_1 = p_0 \\
q_2 = p_0 + p_1 q_1 + p_2 q_1^2 + p_3 q_1^3 + \cdots + p_\omega q_1^\omega = f(q_1) \\
q_3 = p_0 + p_1 q_2 + p_2 q_2^2 + p_3 q_2^3 + \cdots + p_\omega q_2^\omega = f(q_2) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_n = p_0 + p_1 q_{n-1} + p_2 q_{n-1}^2 + p_3 q_{n-1}^3 + \cdots + p_\omega q_{n-1}^\omega = f(q_{n-1}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \tag{2}$$

Die Untersuchung der Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit unser Spiel im Laufe der Zeit abbricht, läuft nun auf die Untersuchung von $\lim_{n\to\infty} q_n$ hinaus. Aus (2) folgt zunächst

$$p_0 = q_1 < f(q_1) = q_2 < f(q_2) = q_3 < \cdots < f(q_{n-1}) = q_n < f(q_n) = q_{n+1} < \cdots ; \tag{3}$$

die Folge der q_n ist also monoton wachsend. Da die q_n Wahrscheinlichkeiten darstellen, ist sie auch nach oben beschränkt. Somit existiert der Grenzwert q dieser Folge, und es ist

$$q = \lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} f(q_{n-1}) \quad \text{oder} \quad q = f(q) .$$

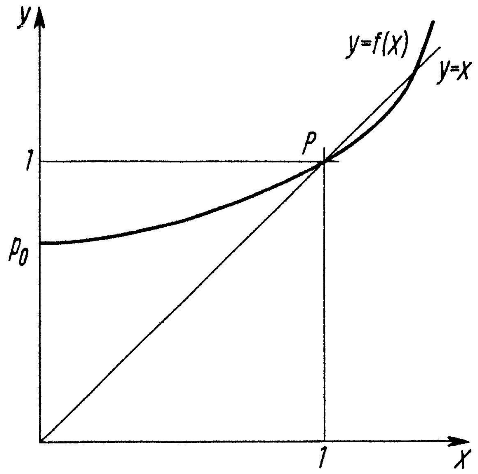
Die Wahrscheinlichkeit q, dass unser Spiel im Laufe der Zeit abbricht, ist somit gegeben als eine Lösung der Gleichung

$$x = f(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \ldots + p_\omega x^\omega . \tag{4}$$

3. Die Berechnung von q

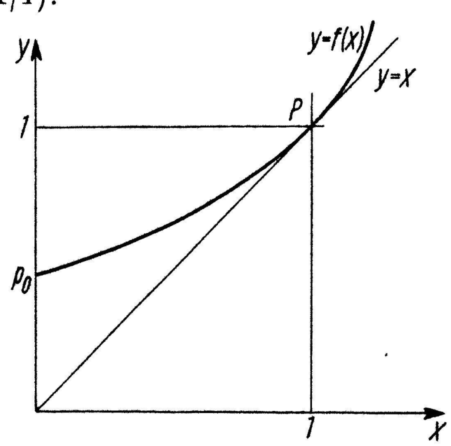
Gleichung (4) hat als eine Wurzel sicher 1, da nach der Definition unseres Spieles $\sum_{z=0}^{\omega} p_z = 1$ ist. Hat sie im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ noch weitere Wurzeln? Diese Frage kann – in Weiterführung eines Gedankens, der sich bei A. LOTKA in [4] und W. FELLER in [1] findet – wie folgt anschaulich behandelt werden: Wir betrachten die Graphen der beiden Gleichungen $y = x$ und $y = f(x)$, wobei f die bisherige Bedeutung habe. Wegen $1 = f(1)$ schneiden sich die beiden Graphen im Punkte (1/1), und wir haben zu untersuchen, ob sich im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ noch weitere Schnittpunkte befinden; solche würden uns weitere Lösungen von Gleichung (4) ergeben. Für $x \geqq 0$ ist nun der Graph von f konvex, und somit sind nur die drei Fälle denkbar:

a) *Zweiter Schnittpunkt ausserhalb* $0 \leqq x \leqq 1$:



Figur 1

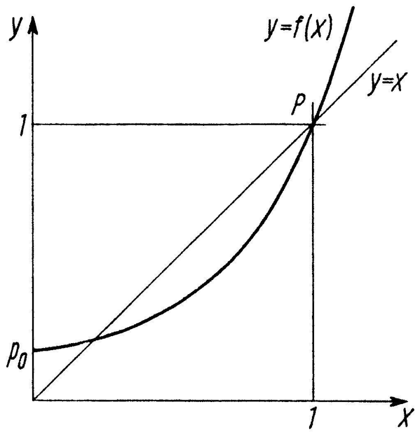
b) *Berührung im Punkte* (1/1):



Figur 2

In diesen beiden Fällen ist also 1 die einzige uns interessierende Wurzel von Gleichung (4), und die Wahrscheinlichkeit q, dass unser Spiel im Laufe der Zeit abbricht, ist in diesen Fällen $q = 1$; das Spiel bricht sicher ab, wenn es lange genug gespielt wird.

c) *Zweiter Schnittpunkt innerhalb* $0 \leqq x \leqq 1$:



Figur 3

Nur in diesem Falle hat Gleichung (4) eine von 1 verschiedene Wurzel ξ im uns interessierenden Intervall; es ist – wie aus der Figur sofort ersichtlich – $q_1 = p_0 < \xi < 1$. Daraus folgt nun aber sofort $f(q_1) = q_2 < f(\xi) = \xi$ usw., also auch $f(q_{n-1}) = q_n < f(\xi) = \xi$. In diesem Falle hat also die Folge der q_n dieses $\xi < 1$ zum Grenzwert. Er stellt die Wahrscheinlichkeit q dafür dar, dass das Spiel im Laufe der Zeit abbricht; $1 - q > 0$ *ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel niemals abbricht.*

Nun wollen wir beachten, dass die ersten beiden Fälle, a und b, durch $f'(1) \leqq 1$ und der dritte Fall, c, durch $f'(1) > 1$ charakterisiert sind.

Was bedeutet $f'(1) = 1\,p_1 + 2\,p_2 + 3\,p_3 + \cdots + \omega\,p_\omega$? Wir betrachten eine *zufällige Variable Z*, die die Werte 0, 1, 2, 3, ... mit den Wahrscheinlichkeiten $p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots$, beziehungsweise p_ω annimmt; Z ist also gegeben durch die Nummern der Kugel, die bei einem Zug aus unserer Urne erscheinen können. Dann ist $f'(1)$ gerade der *Erwartungswert* $E(Z)$ dieser zufälligen Variablen Z, und wir haben das Ergebnis: *Die Wahrscheinlichkeit q, dass das Spiel im Laufe der Zeit abbricht, ist genau dann* < 1, *wenn* $E(Z) > 1$.

4. Beispiele

4.1 Wir denken uns einen *männlichen Neugeborenen* als *Stammvater eines Geschlechtes*; er repräsentiere die 0. Generation. Die Zahl seiner männlichen Nachkommen, die als Stammhalter für den Fortbestand des Geschlechtes sorgen, wollen wir als Wert einer zufälligen Variablen Z auffassen; für die Werte z von Z gelte $0 \leqq z \leqq \omega$. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten seien p_z; $\sum_{z=0}^{\omega} p_z = 1$. Diese männlichen Nachkommen bilden die 1. Generation. Unabhängig von Einflüssen der Vererbung, der Zeit oder der Umwelt bestehe nun für jeden männlichen Neugeborenen der 1. Generation wieder die Wahrscheinlichkeit p_z, im Laufe seines Lebens genau z männliche Nachkommen zu haben. Diese männlichen Nachkommen der 1. Generation bilden die

2. Generation. Wiederum bestehe für jeden von diesen – unabhängig von den genannten Einflüssen – die Wahrscheinlichkeit p_z, im Laufe seines Lebens genau z männliche Nachkommen zu erhalten, usw. Offensichtlich lässt sich die Entwicklung dieses Geschlechtes durch unser obiges Urnenschema darstellen. Das Ergebnis des zweiten Abschnittes gibt uns jetzt die Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass in einer Generation 0 männliche Nachkommen sein werden, mit andern Worten, *die Wahrscheinlichkeit dafür zu finden, dass das Geschlecht ausstirbt.* Diese Wahrscheinlichkeit ist gerade durch unser q gegeben. Der oben eingeführte Erwartungswert $E(Z)$ erhält nun ebenfalls eine sehr anschauliche Bedeutung: $E(Z)$ stellt den Erwartungswert der direkten (männlichen) Nachkommen für ein Element irgendeiner Generation dar, also etwa die *«mittlere Anzahl von direkten (männlichen) Nachkommen» eines Elementes irgendeiner Generation.* Und das Ergebnis unserer Untersuchung besagt: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Geschlecht im Laufe der Zeit ausstirbt, ist genau dann kleiner als 1, wenn die «mittlere Anzahl von direkten (männlichen) Nachkommen» eines Elementes grösser als 1 ist. Genau in diesem Falle besteht also eine von 0 verschiedene Wahrscheinlichkeit dafür, dass das vom Stammvater hoffnungsvoll begründete Geschlecht weiterblüht ...

Es ist vielleicht angebracht, nochmals auf die wesentlichsten unserer vereinfachenden Annahmen für die Entwicklung eines Geschlechtes hinzuweisen: Wir haben die p_z als zeitlich konstant vorausgesetzt; die Statistiker weisen indessen darauf hin, dass zunächst infolge des Rückganges der Sterblichkeit immer mehr Neugeborene das heiratsfähige Alter erreichen und dass ferner eine säkulare Zunahme der Heiratsfähigkeit festgestellt werden kann. (Man vergleiche darüber z. B. A. MOSER [5].) Wir haben weiter auch vorausgesetzt, dass die p_z nicht davon abhängen, ob das Element, das Nachkommen erzeugt, etwa aus einer Familie mit viel oder wenig Nachkommen stammt.

In diesem Zusammenhange mögen Schätzwerte für die p_z und für $E(Z)$ interessieren. Soviel uns bekannt ist, lassen sich solche Schätzwerte nicht ohne weiteres aus bereits vorhandenen statistischen Unterlagen gewinnen. Wir sind dieser Frage in [3] nachgegangen. Eine Untersuchung in Luzern (durchgeführt für Korporationsbürger) ergab nach Ausgleichung die folgenden Schätzwerte:

$$p_0 \approx 0{,}605; \quad p_z \approx 0{,}654 \cdot e^{-0{,}977\,z} \quad \text{für } z \geqq 1; \quad E(Z) \approx 0{,}635\,.$$

In Deutschland sind vor einem Jahrzehnt Erhebungen über die «ideale Familiengrösse» durchgeführt worden; es ist dabei auch auf die gute Übereinstimmung zwischen der «idealen», d. h. der gewünschten, und der tatsächlichen Kinderzahl hingewiesen worden. Für Geschlechter, die sich nach diesem «Idealfall» entwickeln, lassen sich ebenfalls Schätzwerte für die p_z errechnen, wenn noch einige naheliegende weitere Annahmen gemacht werden:

$$p_0 \approx 0{,}43;\ p_1 \approx 0{,}30;\ p_2 \approx 0{,}21;\ p_3 \approx 0{,}053;\ p_4 \approx 0{,}005;\ p_5 \approx 0{,}002;\ E(Z) \approx 0{,}91\,.$$

Für alle Einzelheiten und weitere Schätzwerte sei auf die bereits genannte Arbeit [3] verwiesen. In den beiden genannten Fällen ist also $E(Z)$ geschätzt kleiner als 1; Familien, die sich so entwickeln, sterben mit Sicherheit aus. – A. LOTKA gibt in [4] entsprechende Schätzwerte, die auf der amerikanischen Bevölkerungsstatistik des Jahres 1920, die weisse Rasse betreffend, basieren; hier ergab sich für $E(Z) \approx 1{,}260$ und eine Wahrscheinlichkeit von etwa 82% für das Aussterben einer solchen Linie.

4.2 Unser Urnenschema ist aber nicht nur für dieses Problem aus der Familienstatistik anwendbar. So hat E. SCHRÖDINGER in [6] derartige Betrachtungen an *Kettenreaktionen* angestellt: Durch ein Neutron der geeigneten Energie (0. Generation) wird mit der Wahrscheinlichkeit p ein schwerer Kern gespalten, dabei mögen m Neutronen entstehen. Diese bilden die 1. Generation. Nun denken wir uns den Prozess fortgesetzt, wobei für jedes dieser Neutronen wieder die Wahrscheinlichkeit p bestehe, neue Kerne zu spalten usw. Hier ist also $p_0 = 1 - p$ und $p_m = p$; für $z \neq 0, m$ ist $p_z = 0$. In gewissen einfachen Fällen könnte unser Schema ferner auf *Warteschlangen* angewendet werden: An einem Arbeitsplatz, an welchem immer nur ein Stück repariert werden kann, befinde sich ein Stück in Reparatur (0. Generation). Alle Stücke, die während der Zeit eintreffen, da dieses Stück repariert wird, gelten als seine «Nachkommen» und bilden die 1. Generation. p_z ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während der Zeit, da das Stück der 0. Generation instand gestellt wird, genau z weitere Stücke eintreffen und warten müssen. Alle Stücke, die eintreffen, während ein Stück der 1. Generation wiederhergestellt wird, bilden die 2. Generation usw. Sobald eine Generation 0 Stücke umfasst, werde die Arbeit eingestellt. – Hinweise auf analoge Problemstellungen bei gewissen *chemischen Kettenreaktionen* oder bei Fragen der *Genetik* finden sich z.B. bei T.E. HARRIS in [2].

5. Der Galton-Watson-Prozess

Unser Urnenschema stellt, wie in der Einleitung erwähnt, einen sogenannten *Galton-Watson-Prozess*[1]) dar, den wir im Anschluss an T.E. HARRIS [2] wie folgt definieren können:

a) Wir denken uns Objekte, die weitere Objekte *derselben* Art, ihre Nachkommen, erzeugen können.

b) Die am Anfang gegebene Menge solcher Objekte nennen wir die 0. Generation, ihre Nachkommen bilden die 1. Generation, deren Nachkommen die 2. Generation usw.

c) Die Anzahl der Objekte in der i-ten Generation ist ein Wert einer zufälligen Variablen Y_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Wir setzen stets $Y_0 = 1$; die Wahrscheinlichkeit, dass $Y_1 = z$, mit $z = 0, 1, 2, \ldots \omega$, bezeichnen wir mit p_z:

$$P(Y_1 = z) = p_z , \qquad \sum_{z=0}^{\omega} p_z = 1 .$$

d) Für jedes Objekt in irgendeiner Generation sei nun die Wahrscheinlichkeit, im Laufe seines ganzen Lebens z Nachkommen zu haben ($z = 0, 1, 2, \ldots \omega$) wieder durch diese p_z gegeben.

Die Y_i bilden dann offenbar eine (einfache, homogene) *Markoffsche Kette:* Die Wahrscheinlichkeit, dass in der $(n+1)$-ten Generation k Objekte vorkommen, hängt nur davon ab, wie gross die Zahl der Objekte in der n-ten Generation ist:

$$P\,(Y_{n+1} = k/Y_n = j) = w_{jk}; \qquad j, k, n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad Y_0 = 1 .$$

---

[1]) Nach dem Botaniker F. GALTON, der sich ebenfalls mit dem Prozess des Aussterbens der Geschlechter befasst hat, und H.W. WATSON, der eine erste mathematische (unvollständige) Lösung dieses Problems gegeben hat (1874). Watson hat die mögliche Existenz einer Wurzel $\xi = q < 1$ übersehen.

(Diese *Übergangswahrscheinlichkeiten* w_{jk} sind als bedingte Wahrscheinlichkeiten nicht definiert für jene j, für die $P(Y_n = j) = 0$ ist.)

Diesen Galton-Watson-Prozess, der also eine spezielle Markoffsche Kette darstellt, haben wir in unseren obigen Betrachtungen daraufhin untersucht, dass er spätestens in der n-ten Generation abbricht, wofür wir die Wahrscheinlichkeit

$$q_n = P(Y_n = 0)$$

durch (1) angegeben haben. Ist aber $Y_n = 0$, so folgt aus der Definition des Prozesses

$$P\,(Y_{n+1} = 0 / Y_n = 0) = w_{00} = 1\,.$$

Das heisst aber, dass mit der n-ten auch alle spätern Generationen 0 Objekte haben: Die Linie erlischt, das Geschlecht stirbt aus. Der Zustand $Y_n = 0$ stellt einen *absorbierenden* Zustand dar; er kann nicht mehr verlassen werden. – Mit $q = \lim_{n\to\infty} q_n$ haben wir weiter die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass die Linie im Laufe der Zeit erlischt.

Soll unser Prozess in anderer Richtung untersucht werden, indem wir z.B. nach der Wahrscheinlichkeit fragen, in einer bestimmten Generation eine gewisse Anzahl von Objekten vorzufinden, so bieten sich als geeignete mathematische Hilfsmittel erzeugende Funktionen an; es sei dafür auf [1], [3] oder [4] verwiesen.

ROBERT INEICHEN, Luzern/Fribourg

LITERATURVERZEICHNIS

[1] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, 2. Aufl. (New York, London 1957).

[2] T. E. HARRIS, *The Theory of Branching Processes*, (Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 119), (1963).

[3] R. INEICHEN, *Vom Aussterben der Geschlechter*, Mitt. naturf. Ges. Luzern, *21* (1967).

[4] A. LOTKA, *Théorie analytique des associations biologiques*, IIe partie (Paris 1939).

[5] A. MOSER, *Familienstatistik und Bevölkerungsvermehrung*, Mitt. des statist. Büros des Kantons Bern, Nr. 45 (1962).

[6] E. SCHRÖDINGER, *Probability Problems in Nuclear Chemistry*, Proc. R. Ir. Acad. *51* (1945–48).

Kleine Mitteilungen

Super Perfect Numbers

A positive integer n is called a super perfect number if $\sigma(\sigma(n)) = 2\,n$, where $\sigma(n)$ is the sum of all the divisors of n. The problem of finding super perfect numbers is similar to that of finding perfect numbers.

In this note we prove the following theorem concerning even super perfect numbers and pose the existence of odd super perfect numbers as a problem:

Theorem. An even integer n is super perfect if and only if n is of the form 2^r, where $2^{r+1} - 1$ is a prime.

Proof. Firstly, let $n = 2^r$, where $2^{r+1} - 1$ is a prime. Then $\sigma(\sigma(n)) = \sigma\,(2^{r+1} - 1) = 2^{r+1} = 2\,n$, so that n is a super perfect number.

Secondly, let n be any even super perfect number. Then we can write $n = 2^r\,q$, where q is odd. Since n is super perfect, we have

$$2^{r+1}\,q = 2\,n = \sigma(\sigma(n)) = \sigma\,((2^{r+1} - 1)\,\sigma(q))\,. \tag{1}$$