Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 23 (1968)
Heft: 6

Rubrik: Aufgaben

Einfacher Beweis des Wilsonschen Satzes

Die Wilsonsche Kongruenz $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, wobei p Primzahl ist, gestattet einen Beweis, der nur die einfachsten Tatsachen über Kongruenzen benutzt und ohne weitere Hilfssätze, wie etwa den Fermatschen Satz, auskommt.

Es sei p eine Primzahl und $a_i = (p-1)!/i$, $1 \leqq i \leqq p-1$. Die a_i sind nicht durch p teilbar und paarweise inkongruent mod p, da aus $a_x \equiv a_y \pmod{p}$ durch Division $x \equiv y \pmod{p}$ folgen würde. Aber auch die $p-1$ Zahlen a_1, $a_1 - a_2$, $a_1 - a_3, \ldots$ $a_1 - a_{p-1}$ sind nicht durch p teilbar, denn aus $a_1 - a_x \equiv 0 \pmod{p}$ würde sich $a_1 \equiv a_x \pmod{p}$ ergeben. Auch diese Zahlen sind paarweise inkongruent mod p, denn aus $a_1 \equiv a_1 - a_x \pmod{p}$ würde $a_x \equiv 0 \pmod{p}$ und aus $a_1 - a_x \equiv a_1 - a_y \pmod{p}$ würde $a_x \equiv a_y \pmod{p}$ folgen.

Das Produkt von $p-1$ paarweise inkongruenten Zahlen, die nicht durch p teilbar sind, ist $\equiv (p-1)! \pmod{p}$. Somit folgt aus

$$a_1 (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_{p-1}) = a_1 a_2 (2-1) a_3 (3-1) \ldots a_{p-1} (p-1-1)$$
$$= (a_1 a_2 a_3 \ldots a_{p-1}) a_{p-1}$$

sofort
$$(p-1)! \equiv (p-1)!\, a_{p-1} \pmod{p}$$

oder
$$(p-2)! = a_{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$
$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}\,.$$

F. Stöwener, Weinheim DBR

Aufgaben

Aufgabe 560. Von den vier Schnittpunkten zweier Kegelschnitte k_1, k_2 in einer Ebene seien zwei reell (U, V). Durch einen beliebigen Punkt P der Ebene geht ein Kegelschnitt k des Büschels $\lambda k_1 + \mu k_2$ hindurch. Die Geraden $UP = a$ und $VP = b$ schneiden k_1 in A_1, B_1 und k_2 in A_2, B_2.

Man beweise: Der Schnittpunkt T der Geraden A_1B_1 und A_2B_2 ist ein Punkt der Tangente t im Punkt P an den Kegelschnitt k. T liegt auf einem zerfallenden Kegelschnitt des Büschels $\lambda k_1 + \mu k_2$. H. Günther, Dresden

1st Solution: Since two of the points of intersection of k_1 and k_2 are conjugate complex points, we may take these as absolute points of a Euclidean plane, and then k_1, k_2 and k are circles. It is now easy to show by using the usual angle properties of a circle that A_1B_1, A_2B_2 and the tangent to k at P are parallel. This is equivalent, in the Euclidean plane, to the two projective results required.

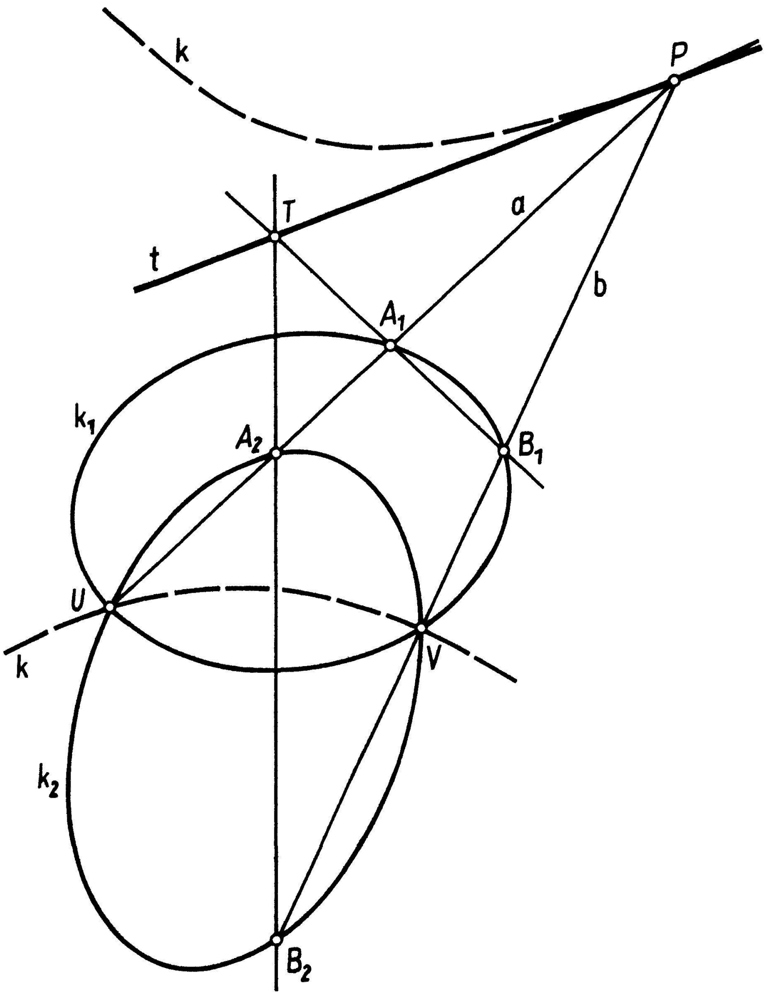
E. J. F. Primrose, University of Leicester, England

2. Lösung: Die Gleichungen der Geraden UV, PU, PV, A_1B_1, A_2B_2 seien (in gleicher Reihenfolge): $s = 0$, $u = 0$, $v = 0$, $g_1 = 0$, $g_2 = 0$. Die Gleichungen von k_1 und k_2 sind (bei geeigneter Normierung von g_1 und g_2) $s\,g_1 + u\,v = 0$ und $s\,g_2 + u\,v = 0$. Dann ist $u\,v\,(1+\lambda) + s\,(g_1 + \lambda\, g_2) = 0$ bei unbestimmtem λ die Büschelgleichung. Für $\lambda = \lambda_0$ stelle sie k dar. Dann ist $g_1 + \lambda_0 g_2 = 0$ die Gleichung von t. Der Schnittpunkt von A_1B_1 und A_2B_2 (d.h. $g_1 = 0$, $g_2 = 0$) liegt also auch auf t, sowie auf dem zerfallenden Kegelschnitt $s\,(g_1 - g_2) = 0$ des Büschels. C. Bindschedler, Küsnacht

3. Lösung (des Aufgabenstellers): Durch die Kegelschnitte des Büschels $\lambda k_1 + \mu k_2$ werden die Punkte der Geraden a den Punkten der Geraden b perspektiv zugeordnet (z.B. $A_1 \to B_1$, $A_2 \to B_2 \ldots$, der Kegelschnitt k des Büschels, welcher durch P hindurchgeht, ordnet diesem Punkt denselben Punkt P zu). Das Zentrum der Perspektivität ist der Schnittpunkt T der Geraden A_1B_1 und A_2B_2. Das Punktepaar, in welchem die Gerade TP den Kegelschnitt k schneidet, ist im Punkt P zusammengerückt, d.h. TP ist Tangente an k. Jener zerfallende Kegelschnitt des Büschels $\lambda k_1 + \mu k_2$, welcher die Gerade UV als

Teil enthält, schneidet a und b auch in zugeordneten Punkten A_l, B_l, deren Verbindungsgerade also durch T hindurchgeht und zusammen mit UV einen zerfallenden Kegelschnitt des Büschels bildet.

Weitere Lösungen sandten J. Fehér (Pecs, Ungarn), G. Geise (Dresden), K. Grün (Linz), L. Kieffer (Luxemburg).



Aufgabe 561. $N_1 = 1 < N_2 < N_3 < \ldots$ seien die der Grösse nach geordneten natürlichen Zahlen N, die durch den Quotienten

$$(x^2 - 6\,x\,y + y^2) : (x^2 - 10\,x\,y + y^2)$$

mit ganzen, nicht gleichzeitig verschwindenden x, y dargestellt werden (vgl. Aufgabe 513, El. Math. *21*, 136–137 (1966)). Man zeige, dass jedes N_i durch die eigentlich primitive quadratische Form

$$(14, 20, 7) = 14\,x^2 + 20\,x\,y + 7\,y^2$$

darstellbar ist, wobei $x^2 = 2\,N_{i-1} - 1$ und $y^2 = 3\,N_{i-1} - 2$.

W. Jänichen, Berlin-Zehlendorf

Solution: The equation

$$x^2 - 6\,x\,y + y^2 = N\,(x^2 - 10\,x\,y + y^2)$$

or

$$(N-1)\,x^2 - 2\,(5\,N - 3)\,x\,y + (N-1)\,y^2 = 0$$

has non-trivial integral solutions if and only if

$$(5\,N - 3)^2 - (N-1)^2 = 4\,(3\,N - 2)\,(2\,N - 1)$$

is a perfect square. Since

$$(3N-2,\ 2N-1) = (3N-2,\ 2N-1,\ N-1) = 1\,,$$

it is necessary that

$$2N-1 = a^2,\ 3N-2 = b^2,\ (a, b) = 1.$$

Hence a, b must satisfy

$$3a^2 - 2b^2 = 1\,. \tag{*}$$

Let (a_i, b_i) denote the (positive) solutions of (*) and put $N_i = (a_i^2+1)/2$, so that $N_i < N_{i+1}$. We shall show that

$$14a_i^2 + 20a_i b_i + 7b_i^2 = N_{i+1} = (a_{i+1}^2 + 1)/2\,. \tag{**}$$

By the theory of the Pell equation as applied to (*) we have

$$3a_{i+1} + b_{i+1}\sqrt{6} = (3a_i + b_i\sqrt{6})\,(5 + 2\sqrt{6})\,,$$

so that

$$a_{i+1} = 5a_i + 4b_i\,. \tag{***}$$

Substituting from (***) in (**) we get $3a_i^2 - 2b_i^2 = 1$.

L. Carlitz, Duke University, USA

Weitere Lösungen sandten G. Bach (Braunschweig), I. Paasche (München), R. Whitehead (Hayle, England), G. Wulczyn (Lewisburg, USA).

Aufgabe 562. Show that

$$\sum_{r,s+0}^{m} (-1)^{r+s} \binom{m}{r}\binom{m}{s}\binom{r+s}{r}^2 = \sum_{j+k\leq m} \left(\frac{m!}{j!\,k!\,(m-j-k)!}\right)^2.$$

L. Carlitz, Duke University, Durham, N.C., USA

Solution by the Proposer: We show first that

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^{m-r} \binom{m}{r}\binom{r}{j}\binom{r}{k} = \frac{m!}{(m-j)!\,(m-k)!\,(j+k-m)!}\,. \tag{1}$$

Put

$$A(m;j,k) = \sum_{r=0}^{m} (-1)^{m-r} \binom{m}{r}\binom{r}{j}\binom{r}{k}.$$

Then

$$\sum_{j,k=0}^{m} A(m;j,k)\,x^j y^k = \sum_{r=0}^{m} (-1)^{m-r}\binom{m}{r} \sum_{j,k=0}^{r} \binom{r}{j}\binom{r}{k} x^j y^k$$

$$= \sum_{r=0}^{m} (-1)^{m-r}\binom{m}{r} (1+x)^r (1+y)^r = [(1+x)(1+y)-1]^m = (x+y+xy)^m$$

$$= \sum_{r+s\leq m} \frac{m!}{r!\,s!\,(m-r-s)!}\, x^r y^s (xy)^{m-r-s}$$

$$= \sum_{r+s\leq m} \frac{m!}{r!\,s!\,(m-r-s)!}\, x^{m-s} y^{m-r}$$

$$= \sum_{j+k\geq m} \frac{m!}{(m-j)!\,(m-k)!\,(j+k-m)!}\, x^j y^k$$

and (1) follows at once.

Replacing j, k by $m-j$, $m-k$, respectively, (1) becomes

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^{m-r}\binom{m}{r}\binom{r}{m-j}\binom{r}{m-k} = \frac{m!}{j!\,k!\,(m-j-k)!}\,. \tag{2}$$

Note that (2) holds for all j, k such that $0 \leqslant j \leqslant m$, $0 \leqslant k \leqslant m$.

It follows from (2) that

$$\sum_{j+k \leq \min(m,n)} \frac{m!}{j!\,k!\,(m-j-k)!}\;\frac{n!}{j!\,k!\,(n-j-k)!}$$
$$= \sum_{r,s=0}^{m} (-1)^{m+n+r+s} \binom{m}{r}\binom{n}{s} \sum_j \binom{r}{m-j}\binom{s}{n-j} \sum_k \binom{r}{m-k}\binom{s}{n-k}.$$

Since

$$\sum_j \binom{r}{m-j}\binom{s}{n-j} = \sum_t \binom{r}{t}\binom{s}{n-m+t} = \binom{r+s}{r+n-m},$$

we get

$$\sum_{j+k \leq \min(m,n)} \frac{m!}{j!\,k!\,(m-j-k)!}\;\frac{n!}{j!\,k!\,(n-j-k)!}$$
$$= \sum_{r,s=0}^{m} (-1)^{m+n+r+s} \binom{m}{r}\binom{n}{s}\binom{r+s}{r+n-m}^2.$$

In particular, when $m = n$,

$$\sum_{j+k \leq m} \left(\frac{m!}{j!\,k!\,(m-j-k)!}\right)^2 = \sum_{r,s=0}^{m} (-1)^{r+s} \binom{m}{r}\binom{m}{s}\binom{r+s}{r}^2.$$

Aufgabe 563. Man zeige, dass für alle ganzen Zahlen $n \geqq 3$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{k/2}{n-1} = 0.$$

G. Bach, Braunschweig

Lösung: Die linke Seite der zu beweisenden Identität ist der Koeffizient von x^{n-1} in der Potenzreihenentwicklung von

$$f(x) = (1 + \sqrt{1+x})^n = \sum \binom{n}{k} (1+x)^{k/2} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{k/2}{r} x^r = \sum a_r x^r$$

mit

$$a_r = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{k/2}{r}.$$

Vergleicht man damit die Entwicklung von

$$\bar{f}(x) = (1 - \sqrt{1+x})^n = \sum \bar{a}_r x^r, \quad \text{wobei } \bar{a}_r = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k/2}{r},$$

so erkennt man (weil die Terme mit geradem k für $r > k/2$ verschwinden), dass $\bar{a}_r = -a_r$ für alle $r > n/2$. Anderseits folgt aus $f(x)\,\bar{f}(x) \equiv (-x)^n$ und $a_0 \neq 0$, dass $\bar{a}_0 = \bar{a}_1 = \ldots = \bar{a}_{n-1} = 0$. Also ist auch $a_r = 0$, falls $n/2 < r < n$. Das ist für $r = n-1$ die Behauptung der Aufgabe.

C. Bindschedler, Küsnacht

Diese Erweiterung der Aufgabe fand auch W. Jänichen (Berlin-Zehlendorf). L. Carlitz gibt die Werte der Koeffizienten a_r auch für $1 \leqq r \leqq n/2$ an (vgl. Aufgabe 586, dieses Heft, S. 140).

Eine weitere Lösung sandte I. Paasche (München).

Aufgabe 552 (El. Math. *23*, 91 (1968)). *Zweite Lösung:* Es gilt folgende allgemeinere Aussage: Es sei $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{n+1}$ ein Simplex im R_n, k_{ij} die Kante $A_i A_j$ und F_{ij} der gegenüberliegende $(n-2)$-dimensionale Raum. Es sei weiter Q eine Quadrik zweiter Klasse. Durch F_{ij} gehen zwei Q berührende $(n-1)$-dimensionale Räume, die k_{ij} in den Punkten B'_{ij} und B''_{ij} schneiden. Dann liegen sämtliche Punkte B auf einer Quadrik Q' zweiter Ordnung.

Zerfällt Q in zwei Punkte, so erhält man die Aussage der Aufgabe.

Beweis: Wir wählen das Simplex als Koordinatensimplex. $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ sind Punktkoordinaten und $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ die dualen R_{n-1}-Koordinaten. Q habe die Gleichung $\Sigma\, a_{ij}\, u_i\, u_j = 0$. Für jeden R_{n-1} durch z.B. $A_1 A_2$ gilt $u_3 = u_4 = \ldots = u_{n+1} = 0$ und daher für die zwei Berührungs-R_{n-1} an Q auch noch

$$a_{11}\, u_1^2 + 2\, a_{12}\, u_1\, u_2 + a_{22}\, u_2^2 = 0 \, .$$

Der R_{n-1} mit den Koordinaten u_i schneidet die Kante k_{12} im Punkt $(u_2, -u_1, 0, 0, \ldots, 0)$. Für die Koordinaten der Punkte B'_{12} und B''_{12} gilt also

$$a_{11}\, x_2^2 - 2\, a_{12}\, x_2\, x_1 + a_{22}\, x_1^2 = 0$$

oder

$$x_1^2/a_{11} - 2\, a_{12}\, x_1\, x_2/a_{11}\, a_{22} + x_2^2/a_{22} = 0 \, , \quad x_3 = x_4 = \ldots = x_{n+1} = 0 \, ,$$

und allgemein für die Punkte B'_{ij} und B''_{ij}

$$x_i^2/a_{ii} - 2\, a_{ij}\, x_i\, x_j/a_{ii}\, a_{jj} + x_j^2/a_{jj} = 0 \, , \quad x_k = 0 \; (k \neq i, k \neq j) \, .$$

Die Punkte B liegen also auf der Quadrik mit der Gleichung $\Sigma\, a'_{ij}\, x_i\, x_j = 0$, wobei $a'_{ii} = 1/a_{ii}$ und $a'_{ij} = - a_{ij}/a_{ii}\, a_{jj}$ $(i \neq j)$. Wir haben $a_{ii} \neq 0$ vorausgesetzt, d.h. Q berührt keine Seite des Simplexes. Auch im andern Fall kann man den Satz einfach beweisen. Die Zuordnung von Q' zu Q hat ein gewisses Interesse. So fällt Q' mit Q zusammen, wenn das Simplex ein Polarsimplex von Q ist.

O. BOTTEMA, Technische Hogeschool, Delft

Neue Aufgaben

Aufgabe 585. Die Eckpunkte A_i $(i = 1, 2, 3)$ eines gegebenen Dreiecks sind die Mittelpunkte von drei Kreisen, die durch einen Punkt P gehen. B_i sei der zweite Schnittpunkt der Kreise um A_{i+1}, A_{i+2} $(A_4 = A_1, A_5 = A_2)$.

1. Konstruiere die Punkte P, für die das Dreieck $B_1 B_2 B_3$ gleichseitig ist.
2. Für welche Punkte P liegen B_1, B_2, B_3 auf einer Geraden?
3. Beweise, dass die Umkreise der Dreiecke $A_i B_{i+1} B_{i+2}$ $(i = 1, 2, 3)$ sich in einem Punkt schneiden.

J. BREJCHA, Brno, ČSSR

Aufgabe 586. Show that

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k/2}{m} = \frac{n}{m} \binom{n-m-1}{m-1} 2^{n-2m} \quad (m \geqq 1) \, .$$

L. CARLITZ, Duke University, USA

Aufgabe 587. Prove that either of the following properties characterize the exponential function:

Property 1. $f(z)$ non-zero, entire and there exists a simple analytic arc A which divides the plane into two unbounded simply connected domains S_1 and S_2 with

$$f(S_1) \subset \{w\colon |w| < 1\} \text{ and } f(S_2) \subset \{w\colon |w| > 1\} \, .$$

Property 2. $f(z)$ entire and the image of the left and right half planes are contained in $\{w\colon |w| < 1\}$ and $\{w\colon |w| > 1\}$ respectively.

W. J. SCHNEIDER, Syracuse University, USA

Aufgabe 588. Ist n eine natürliche Zahl und p eine Primzahl, so gilt

$$(p\, n - 1)!\, [(n-1)!]^{-p}\, n^{1-p} \not\equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow n = p^k \, .$$

E. TROST, Zürich