Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 23 (1968)

Heft: 6

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Studie Nr. 2

Gegeben sei die quadratische Matrix

$$A = \left[(-1)^i \binom{k-i}{k-j}\right]; \quad i, j = 0, 1, \ldots, k.$$

Es ist zu zeigen, dass der Rang r der Matrix $A - E$, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet, gleich $r = [(k+1)/2]$ ist. In der Tat: Bilden wir die Hilfspolynome $p_i(x)$ $(i = 0, \ldots, k)$, deren Koeffizienten durch die Elemente der i-ten Spalte von $A - E$ geliefert werden (j sei der Zeilen- und i der Spaltenindex von A), so ergibt eine einfache Rechnung

$$p_i(x) = (-x)^i (1+x)^{k-i} - x^i \quad (i = 0, \ldots, k).$$

Der gesuchte Rang ist gleich der Dimension des von den Polynomen $p_i(x)$ aufgespannten linearen Polynomraums. Durch die nichtsinguläre lineare Transformation

$$q_n(x) = \Sigma_0^n \binom{n}{i} p_i(x) \quad (n = 0, \ldots, k)$$

bleibt diese Dimension unverändert. Nun ist aber

$$q_n(x) = (1+x)^{k-n} - (1+x)^n,$$

und die Dimension des durch die $q_n(x)$ aufgespannten linearen Polynomraums ist, wie ersichtlich, $[(k+1)/2]$, was zu beweisen war. H. Hadwiger, Bern

LITERATURNACHWEIS

[1] H. Hadwiger, *Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie*, J. reine angew. Math. *194*, 101–110 (1955).
[2] H. Lenz, *Grundlagen der Elementargeometrie*, Hochschulbücher für Mathematik, Bd. *52*, Kap. 22. (6) (Berlin 1961).
[3] D. M. Y. Sommerville, *The Relations Connecting the Angle-sums and Volume of a Polytope in Space of n-dimensions*, Proc. R. Soc. London [A] *115*, 103–119 (1927).
[4] V. Klee, *A Combinatorial Analogue of Poincaré's Duality Theorem*, Canadian. J. Math. *16*, 517–531 (1964).
[5] B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, (John Wiley + Sons, London–New York–Sydney, 1967).
[6] K. Voss, *Schnitte von Punktmengen mit linearen Räumen* (*Charakterisierung der konvexen Mengen*); Vortrag im Math. Forschungsinstitut Oberwolfach im September 1966.

Kleine Mitteilungen

Eine Bemerkung zur Untersuchung unbestimmter Ausdrücke

Bei der Untersuchung sogenannter unbestimmter Ausdrücke benützt man üblicherweise die Regeln von Bernoulli-L'Hospital. Im folgenden beweisen wir einen Satz, der uns eine andere Methode zur Untersuchung solcher Ausdrücke liefert. Diese Methode hat gegenüber den genannten Regeln verschiedene Vorteile. Erstens: die Voraussetzungen des Satzes sind recht einfach; zweitens: die Untersuchung kann oft wesentlich abgekürzt werden, und zwar vor allem dann, wenn zusammengesetzte Funktionen vorkommen; drittens: das rein schematische Vorgehen fällt weg, das heisst, es ist in jedem einzelnen Fall durchsichtig, warum sich der betreffende Ausdruck so oder so verhält, anders ausgedrückt, man «sieht», was «passiert».

Wir beweisen zuerst den folgenden

Hilfssatz.

Voraussetzung: *Die Funktion h ist differenzierbar in einer Umgebung U des Punktes x_0, und es gilt*

1) $h(x_0) = 0$,

2) $h'(x) = (x - x_0)^n r(x)$ *in U, wobei n eine natürliche Zahl ist und die Funktion r stetig in x_0 mit* $r(x_0) = 0$.

Behauptung: *Es gilt in U*

$$h(x) = (x - x_0)^{n+1} s(x) ,$$

wobei die Funktion s stetig ist in x_0 mit $s(x_0) = 0$.

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es zu jedem $x \in U$ ein ξ, das im allgemeinen von x abhängt, mit $|x_0 - \xi| < |x_0 - x|$ derart, dass

$$h(x) - h(x_0) = (x - x_0)\, h'(\xi) .$$

Nach 1) und 2) der Voraussetzung bedeutet dies

$$h(x) = (x - x_0)\,(\xi - x_0)^n\, r(\xi) .$$

Wird deshalb

$$s(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\xi - x_0}{x - x_0}\right)^n r(\xi) & \text{für } x \neq x_0 \\ 0 & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

definiert, so gilt zunächst sicher die behauptete Darstellung. Es ist aber auch wegen $| x_0 - \xi | < | x_0 - x |$ und der Voraussetzung über r tatsächlich

$$\lim_{x \to x_0} s(x) = s(x_0) .$$

Der eingangs erwähnte Satz lautet nun folgendermassen.

Satz.

Voraussetzung: *Die Funktion f ist in x_0 n-mal differenzierbar*

Behauptung: *In einer Umgebung von x_0 gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + (x - x_0)^n r(x) ,$$

wobei die Funktion r stetig ist in x_0 mit $r(x_0) = 0$.

Beweis: Dieser Satz ist enthalten in der Taylorschen Formel mit Restglied, doch wird dort vorausgesetzt, dass f in einer ganzen Umgebung von x_0 $(n + 1)$-mal stetig differenzierbar ist.

Wir führen den Beweis durch Induktion nach n. Für $n = 1$ lautet die Behauptung

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\, r(x) ,$$

wobei r stetig ist in x_0 mit $r(x_0) = 0$. Dies bedeutet nichts anderes als die Differenzierbarkeit von f in x_0 und ist deshalb richtig. Der Satz sei jetzt für n bewiesen (das heisst: für *alle* in x_0 n-mal differenzierbaren Funktionen), und f sei $(n + 1)$-mal differenzierbar in x_0. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k .$$

Es ist $g(x_0) = 0$ und zudem

$$g'(x) = f'(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} (x - x_0)^{k-1} . \qquad (1)$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist aber

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + (x - x_0)^n r_1(x),$$

wobei r_1 stetig ist in x_0 mit $r_1(x_0) = 0$. Dies in (1) eingesetzt liefert

$$g'(x) = (x - x_0)^n r_1(x),$$

also mit $g(x_0) = 0$ zusammen gerade die Voraussetzungen unseres Hilfssatzes. Es gilt deshalb

$$g(x) = (x - x_0)^{n+1} r(x),$$

wobei r stetig ist in x_0 mit $r(x_0) = 0$. Nach Definition von g ergibt sich daraus unmittelbar die Behauptung. q. e. d.

Ein paar typische Beispiele mögen jetzt die eingangs gemachten Bemerkungen illustrieren.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(xe^x) - 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha x} = ? \qquad (\alpha \neq 0).$

Nach unserem Satz ist $\cos y - 1 = -y^2 (^1/_2 + r(y))$, wobei $\lim\limits_{y\to 0} r(y) = 0$. Daraus folgt $\cos(xe^x) - 1 = -(xe^x)^2 (^1/_2 + s(x))$, wobei $\lim\limits_{x\to 0} s(x) = \lim\limits_{x\to 0} r(xe^x) = 0$.

Analog ergibt sich aus $\operatorname{tg} y = y(1 + t(y))$ die Relation $\operatorname{tg} \alpha x = \alpha x (1 + u(x))$, wobei $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$.

Setzen wir die beiden gewonnenen Darstellungen im zu untersuchenden Ausdruck ein, so erhalten wir nacheinander

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(xe^x) - 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 e^{2x} (^1/_2 + s(x))}{\alpha^2 x^2 (1 + u(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^{2x} (^1/_2 + s(x))}{\alpha^2 (1 + u(x))} = -\frac{1}{2\alpha^2}.$$

2) $\lim\limits_{x\downarrow 0} \dfrac{\sin(x \log x)}{+\sqrt{e^x - 1}} = ?$

Aus unserem Satz folgt einerseits $\sin y = y(1 + r(y))$, $\sin(x \log x) = x \log x (1 + s(x))$, wobei $\lim\limits_{x\downarrow 0} s(x) = \lim\limits_{x\downarrow 0} r(x \log x) = 0$ wegen $\lim\limits_{x\downarrow 0} x^\lambda \log x = 0$ für $\lambda > 0$, und andrerseits $e^x - 1 = x(1 + t(x))$, wobei $\lim\limits_{x\to 0} t(x) = 0$. Deshalb ist

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin(x \log x)}{+\sqrt{e^x - 1}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{x \log x (1 + s(x))}{x^{1/2} (1 + t(x))^{1/2}} = \lim_{x\downarrow 0} x^{1/2} \log x \frac{1 + s(x)}{(1 + t(x))^{1/2}} = 0.$$

3) $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg}^n x} = ? \qquad (n\text{: ganze Zahl}).$

Aus $\log \sin x = -^1/_2 (x - (\pi/2))^2 (1 + r(x))$, wobei $\lim\limits_{x\to\pi/2} r(x) = 0$ und $\operatorname{ctg} x = -(x - (\pi/2))(1 + s(x))$, wobei $\lim\limits_{x\to\pi/2} s(x) = 0$ folgt

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\log \sin x}{\operatorname{ctg}^n x} = \begin{cases} 0, & n \leqq 1 \\ -^1/_2, & n = 2 \\ -\infty, & n \geqq 3 \quad \text{und gerade} \\ +\infty, & n \geqq 3, \quad \text{ungerade und } x \downarrow \pi/2 \\ -\infty, & n \geqq 3, \quad \text{ungerade und } x \uparrow \pi/2 \end{cases}$$

und daraus wegen $(\sin x)^{\operatorname{tg}^n x} = e^{(\log \sin x)/\operatorname{ctg}^n x}$

$$\lim_{x \to \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg}^n x} = \begin{cases} 1\,, & n \leqslant 1 \\ e^{-1/2}\,, & n = 2 \\ 0\,, & n \geqslant 3 \quad \text{und gerade} \\ +\infty\,, & n \geqslant 3\,, \quad \text{ungerade und } x \downarrow \pi/2 \\ 0\,, & n \geqslant 3\,, \quad \text{ungerade und } x \uparrow \pi/2 \end{cases}$$

François Fricker, Basel

Sur le Problème de Zarankiewicz

Le problème de Zarankiewicz, exposé dans [1] par W. Sierpiński, consiste en la résolution en entiers positifs x, y, z de l'équation:

$$t_x^2 + t_y^2 = t_z^2 \tag{1}$$

dans laquelle t_u désigne le nombre triangulaire $(1/2)\,u\,(u+1)$. Comme $x \neq y$, on peut supposer $x < y < z$. Rappelons qu'on ne connait que la solution $x = 132$, $y = 143$, $z = 164$ et qu'on ignore si le nombre de solutions est fini.

Dans cette note, nous montrons que (1) est impossible si deux au moins des trois nombres x, y, z sont consécutifs.

A) Si $y = x + 1$, compte tenu de la relation $t_{y-1}^2 + t_y^2 = t_{y^2}$, (1) devient:

$$t_{y^2} = t_z^2\,. \tag{2}$$

Or W. Ljunggren [2] puis J. W. S. Cassels [3] ont montré que $t_0 = 0\ (= t_0^2)$, $t_1 = 1\ (= t_1^2)$ et $t_8 = 36\ (= t_3^2)$ sont les seuls nombres triangulaires qui sont les carrés de nombres triangulaires. Comme $y^2 \geqslant 4$, (2) implique $y^2 = 8$, ce qui est faux.

Remarquons que le cas $2|y$ possède une solution élémentaire: avec $y = 2p$ on a

$$\left(\frac{t_z}{p}\right)^2 = 8\,p^2 + 2 \equiv 2 \pmod 4\,,$$

ce qui est faux.

B) Si $z = y + 1$, compte tenu de la relation $t_{y+1}^2 - t_y^2 = (y+1)^3$, (1) s'écrit:

$$t_x^2 = (y+1)^3$$

d'où on tire successivement:

$$t_x = a^3\,, \quad x\,(x+1) = 2\,a^3\,,$$

$$x + \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = u^3\,, \quad x + \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 2\,v^3 \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1\,, \quad u > 0\,, \quad v > 0$$

soit finalement l'équation:

$$(\varepsilon\,u)^3 + 2\,(-\,\varepsilon\,v)^3 = 1\,. \tag{3}$$

Or T. Nagell [4] (voir aussi [5], Vol. II, p. 112) a établi que l'équation $x^3 + dy^3 = 1$ admet au plus une solution en entiers non nuls x, y. Donc (3) n'admet pour $u > 0$, $v > 0$ que la solution $u = v = -\varepsilon = 1$ qui est à écarter car elle conduit à $y = 0$.

Nous remercions A. Makowski de sa remarque concernant la partie A qui, initialement, traitait élémentairement le cas $2|y$ et n'utilisait le résultat de Ljunggren-Cassels que dans le cas $2 \nmid y$.

M. Blanpain, Lille

Références

[1] W. Sierpiński, *Sur les nombres triangulaires carrés*, Bull. Soc. R. Sci. Liège *30*, 189–194 (1961).

[2] W. Ljunggren, *Solution complète de quelques équations du sixième degré à deux indéterminées*, Arch. Math. Naturv. *48*, 177–211 (spécialement 202–205) (1946).

[3] J. W. S. Cassels, *Integral points on certain elliptic curves*, Proc. London Math. Soc. *14A*, 55–57 (1965).

[4] T. Nagell, J. Math. pures et appl. (Paris) *4*, 209–270 (1925).

[5] W. J. Le Veque, *Topics in Number Theory*, 2 Vol. Addison-Wesley Publ. Company (Reading [USA], 1956).

Einfacher Beweis des Wilsonschen Satzes

Die Wilsonsche Kongruenz $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$, wobei p Primzahl ist, gestattet einen Beweis, der nur die einfachsten Tatsachen über Kongruenzen benutzt und ohne weitere Hilfssätze, wie etwa den Fermatschen Satz, auskommt.

Es sei p eine Primzahl und $a_i = (p-1)!/i$, $1 \leqq i \leqq p-1$. Die a_i sind nicht durch p teilbar und paarweise inkongruent $\bmod p$, da aus $a_x \equiv a_y \pmod p$ durch Division $x \equiv y \pmod p$ folgen würde. Aber auch die $p-1$ Zahlen a_1, $a_1 - a_2$, $a_1 - a_3, \ldots$ $a_1 - a_{p-1}$ sind nicht durch p teilbar, denn aus $a_1 - a_x \equiv 0 \pmod p$ würde sich $a_1 \equiv a_x \pmod p$ ergeben. Auch diese Zahlen sind paarweise inkongruent $\bmod p$, denn aus $a_1 \equiv a_1 - a_x \pmod p$ würde $a_x \equiv 0 \pmod p$ und aus $a_1 - a_x \equiv a_1 - a_y \pmod p$ würde $a_x \equiv a_y \pmod p$ folgen.

Das Produkt von $p-1$ paarweise inkongruenten Zahlen, die nicht durch p teilbar sind, ist $\equiv (p-1)! \pmod p$. Somit folgt aus

$$a_1 (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_{p-1}) = a_1 a_2 (2-1) a_3 (3-1) \ldots a_{p-1} (p-1-1)$$
$$= (a_1 a_2 a_3 \ldots a_{p-1}) a_{p-1}$$

sofort

$$(p-1)! \equiv (p-1)! \, a_{p-1} \pmod p$$

oder

$$(p-2)! = a_{p-1} \equiv 1 \pmod p$$
$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p .$$

F. Stöwener, Weinheim DBR

Aufgaben

Aufgabe 560. Von den vier Schnittpunkten zweier Kegelschnitte k_1, k_2 in einer Ebene seien zwei reell (U, V). Durch einen beliebigen Punkt P der Ebene geht ein Kegelschnitt k des Büschels $\lambda k_1 + \mu k_2$ hindurch. Die Geraden $UP = a$ und $VP = b$ schneiden k_1 in A_1, B_1 und k_2 in A_2, B_2.

Man beweise: Der Schnittpunkt T der Geraden $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ ist ein Punkt der Tangente t im Punkt P an den Kegelschnitt k. T liegt auf einem zerfallenden Kegelschnitt des Büschels $\lambda k_1 + \mu k_2$.

H. Günther, Dresden

1st Solution: Since two of the points of intersection of k_1 and k_2 are conjugate complex points, we may take these as absolute points of a Euclidean plane, and then k_1, k_2 and k are circles. It is now easy to show by using the usual angle properties of a circle that $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ and the tangent to k at P are parallel. This is equivalent, in the Euclidean plane, to the two projective results required.

E. J. F. Primrose, University of Leicester, England

2. Lösung: Die Gleichungen der Geraden UV, PU, PV, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ seien (in gleicher Reihenfolge): $s = 0$, $u = 0$, $v = 0$, $g_1 = 0$, $g_2 = 0$. Die Gleichungen von k_1 und k_2 sind (bei geeigneter Normierung von g_1 und g_2) $s g_1 + u v = 0$ und $s g_2 + u v = 0$. Dann ist $u v (1 + \lambda) + s (g_1 + \lambda g_2) = 0$ bei unbestimmtem λ die Büschelgleichung. Für $\lambda = \lambda_0$ stelle sie k dar. Dann ist $g_1 + \lambda_0 g_2 = 0$ die Gleichung von t. Der Schnittpunkt von $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ (d.h. $g_1 = 0$, $g_2 = 0$) liegt also auch auf t, sowie auf dem zerfallenden Kegelschnitt $s (g_1 - g_2) = 0$ des Büschels.

C. Bindschedler, Küsnacht

3. Lösung (des Aufgabenstellers): Durch die Kegelschnitte des Büschels $\lambda k_1 + \mu k_2$ werden die Punkte der Geraden a den Punkten der Geraden b perspektiv zugeordnet (z.B. $A_1 \to B_1$, $A_2 \to B_2 \ldots$, der Kegelschnitt k des Büschels, welcher durch P hindurchgeht, ordnet diesem Punkt denselben Punkt P zu). Das Zentrum der Perspektivität ist der Schnittpunkt T der Geraden $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$. Das Punktepaar, in welchem die Gerade TP den Kegelschnitt k schneidet, ist im Punkt P zusammengerückt, d.h. TP ist Tangente an k. Jener zerfallende Kegelschnitt des Büschels $\lambda k_1 + \mu k_2$, welcher die Gerade UV als