

<b>Zeitschrift:</b>	Elemente der Mathematik
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	23 (1968)
<b>Heft:</b>	6
<b>Artikel:</b>	Eine Schnittrekursion für die Eulersche Charakteristik euklidischer Polyeder mit Anwendungen innerhalb der kombinatorischen Geometrie
<b>Autor:</b>	Hadwiger, H.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-26035">https://doi.org/10.5169/seals-26035</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MÄTHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

---

El. Math.

Band 23

Heft 6

Seiten 121–144

10. November 1968

---

## Eine Schnittrekursion für die Eulersche Charakteristik euklidischer Polyeder mit Anwendungen innerhalb der kombinatorischen Geometrie

### 1. Additive Polyederfunktionale

Es sei  $R$  der  $k$ -dimensionale euklidische Raum, und  $\mathfrak{R}$  bezeichne die Klasse der kompakten Polyeder  $A \subset R$ , die auch das leere Polyeder  $\emptyset$  enthalten soll. Die Klasse  $\mathfrak{R}$  ist dann bezüglich Vereinigung und Schnitt geschlossen, d. h., es gilt

$$A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \cup B, A \cap B \in \mathfrak{R}. \quad (1.1)$$

Eine über  $\mathfrak{R}$  eindeutig und reellwertig definierte Funktion  $\varphi$  nennen wir additiv, wenn sie der angezeigten Geschlossenheit bezüglich der Verknüpfungen  $\cap$  und  $\cup$ , durch die  $\mathfrak{R}$  zu einem distributiven Verband wird, insofern angepasst ist, als das Additionstheorem

$$\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B) \quad (1.2)$$

uneingeschränkt gilt. Es sei  $\mathfrak{F}$  der lineare Raum aller additiven Funktionale  $\varphi$  über  $\mathfrak{R}$ . Bedeutet  $V(A)$  den elementaren Inhalt von  $A$ , so gilt  $V \in \mathfrak{F}$ , wenn noch  $V(\emptyset) = 0$  festgesetzt wird.

### 2. Existenzsatz für die Charakteristik

Wir formulieren nun eine Aussage, die sich auf die Existenz eines besonders ausgezeichneten Funktionals  $\chi \in \mathfrak{F}$  bezieht; es handelt sich um die Charakteristik von Euler-Poincaré, die üblicherweise in einem wesentlich weiter greifenden Gelungsbereich im Rahmen der Topologie begründet wird. Mit Beschränkung auf den hier in Betracht gezogenen Sonderfall kompakter euklidischer Polyeder kann diese auf unabhängige und elementare Weise sichergestellt werden. Zusammen mit dem Existenznachweis wird auch die additive Eigenschaft der Charakteristik gewonnen. Wir zeigen:

Es existiert genau ein additives Funktional  $\chi \in \mathfrak{F}$ , das die drei Forderungen

$$\chi(\emptyset) = 0; \quad (2.1)$$

$$\chi(P) = 1, \quad P \neq \emptyset, \quad P \text{ konvex}, \quad P \in \mathfrak{R}; \quad (2.2)$$

$$\chi(A \cup B) + \chi(A \cap B) = \chi(A) + \chi(B), \quad A, B \in \mathfrak{R} \quad (2.3)$$

erfüllt.

### 3. Einfache Folgerungen

Bevor wir an die Begründung unserer Behauptung herantreten, sollen einige einfache Folgerungen gezogen werden, die sich direkt aus den drei Postulaten ergeben.

Zunächst erinnern wir daran, dass ein Polyeder innerhalb der direkten Mengengeometrie als Vereinigungsmenge endlich vieler kompakter und konvexer Polyeder (Eipolyeder) definiert werden kann. Ein Eipolyeder lässt sich als abgeschlossene konvexe Hülle endlich vieler Punkte erklären. Nachfolgend soll  $P$  stets ein Eipolyeder bezeichnen. Durch iterierte Anwendung des Additionstheorems (2.3) gelangt man zu der erweiterten additiven Formel

$$\chi(A) = \sum^1 \chi(P_\nu) - \sum^2 \chi(P_\nu \cap P_\mu) + \sum^3 \chi(P_\nu \cap P_\mu \cap P_\lambda) - \dots; \quad (3.1)$$

die sich auf das Polyeder  $A = \bigcup_1^n P_\nu$  bezieht, das die Vereinigungsmenge der Eipolyeder  $P_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) ist. Hierbei bedeutet  $\sum^i$  die Summation über alle Kombinationen der Indizes  $1, \dots, n$  zur  $i$ -ten Klasse. Ein Nachweis durch vollständige Induktion liegt auf der Hand.

Beachten wir, dass die in (3.1) auftretenden Durchschnitte entweder leer oder nichtleere Eipolyeder sind, so ergibt sich im Hinblick auf (2.1) und (2.2) die Folgerung

$$\chi(A) \text{ ganzzahlig.} \quad (3.2)$$

Weiter schliesst man mit (3.1), dass sich der Wert für die Charakteristik  $\chi$  für ein individuell vorgegebenes Polyeder  $A \in \mathfrak{R}$  eindeutig aus den drei Postulaten ergibt, so dass es höchstens eine Lösung geben kann, die alle drei Forderungen erfüllt. Wenn wir durch eine besondere Konstruktion zeigen, dass es andererseits wenigstens eine Lösung gibt, so ist die Begründung der Eulerschen Charakteristik  $\chi$  insofern vollständig, als auch erwiesen ist, dass diese wichtige ganzwertige Funktion über der Polyederklasse  $\mathfrak{R}$  durch die Eigenschaften (2.1) bis (2.3) eindeutig gekennzeichnet ist.

Evidenterweise ist ferner die Bewegungsinvarianz

$$\chi(A) = \chi(B); \quad A \simeq B \quad (3.3)$$

gesichert; hier bezeichnet  $\simeq$  die Kongruenz im Sinne der Elementargeometrie.

### 4. Beweis des Existenzsatzes

Wir geben nun einen nach der Dimension  $k$  des Raumes  $R$  fortschreitenden Induktionsbeweis für die Existenz einer Lösung  $\chi \in \mathfrak{F}$ , welche die Forderungen (2.1) bis (2.3) erfüllt.

Es sei zunächst  $k = 1$ , und  $I \subset R$  bezeichne ein kompaktes Intervall,  $I \neq \emptyset$ . Ein lineares Polyeder  $A \in \mathfrak{R}$  ist hier die Vereinigungsmenge endlich vieler kompakter, nichtleerer und paarweise disjunkter Intervalle. Mit dem Ansatz

$$\chi(A) = n; \quad A = \bigcup_1^n I_\nu, \quad I_\nu \cap I_\mu = \emptyset \quad (\nu \neq \mu) \quad (4.1)$$

wird über  $\mathfrak{R}$  in eindeutiger Weise ein nichtnegatives ganzzahliges Funktional erklärt, wenn noch ergänzend  $\chi(\emptyset) = 0$  hinzugefügt wird. Mit der Bemerkung, dass  $I$  ein lineares Eipolyeder ist, verifiziert man die hier trivialen Zeilen (2.1) und (2.2). Es

ist eine einfache kombinatorische Aufgabe, sich ferner von der Gültigkeit des Additionstheorems (2.3) zu überzeugen [es handelt sich um ein einfaches Korollar zu dem in Studie Nr. 1 des Anhangs nachgewiesenen Lemma].

Es sei nun  $k > 1$ , und wir treffen die induktive Annahme, dass die Existenz von  $\chi$  und demnach auch die oben angeführten Folgerungen für alle Dimensionen kleiner als  $k$  sichergestellt sei. Nachfolgend bedeute  $E \subset R$  eine  $(k-1)$ -dimensionale Ebene und  $G \subset R$  eine  $(k-2)$ -dimensionale Gerade (die unterschiedliche Bezeichnung für diese linearen Unterräume soll lediglich die anschaulichkeit etwas heben).

Nun bezeichne  $\{E[\alpha]; 0 \leq \alpha < \pi\}$  ein Ebenenbüschel mit der Achse  $G$ ;  $\alpha$  sei der Winkelparameter des Büschels. Es sei nun  $A \in \mathfrak{A}$  und nach der Induktionsannahme existieren

$$g(A) = \chi(A \cap G) \quad (4.2)$$

$$h(A, \alpha) = \chi(A \cap E[\alpha]), \quad 0 \leq \alpha < \pi. \quad (4.3)$$

Die Hilfsfunktion  $h$  ist bezüglich  $\alpha$  stückweise konstant und weist nur endlich viele Sprungstellen auf (Stufenfunktion). Dies ergibt sich wie folgt: Ist  $A = \mathbf{U}_1^n P_\nu$ , so folgt aus (3.1), dass  $h(A, \alpha) = h(A, \beta)$  sein muss, sofern

$$\chi(P_\nu \cap P_\mu \cap \dots \cap P_\lambda \cap E[\alpha]) = \chi(P_\nu \cap P_\mu \cap \dots \cap E[\beta])$$

für alle  $2^n$  Kombinationen  $\nu, \mu, \dots, \lambda$  der Indizes  $1, 2, \dots, n$  aller Klassen gilt. Änderungen (Sprünge) von  $h$  können nur bei Winkeln auftreten, die zu Stützebenen nichtleerer Durchschnittspolyeder gehören, die sich bei den erwähnten  $2^n$  Indizeskombinationen ergeben.

Mit der nämlichen Bemerkung folgt, dass der rechtsseitige Grenzwert

$$h(A, \alpha + 0) = \lim h(A, \beta), \quad 0 \leq \alpha < \beta < \pi, \quad \alpha = \lim \beta \quad (4.4)$$

existiert und dass weiter die Differenz  $h(A, \alpha) - h(A, \alpha + 0)$  lediglich für endlich viele Winkel des Intervalls  $0 \leq \alpha < \pi$  von Null verschieden ausfallen kann. Mit dem Ansatz

$$\chi(A) = g(A) + \sum_{\alpha} [h(A, \alpha) - h(A, \alpha + 0)] \quad (4.5)$$

wird über der Polyederklasse  $\mathfrak{A}$  eindeutig ein ganzzahliges Funktional definiert; die Summation erstreckt sich über alle Winkel des Intervalls  $0 \leq \alpha < \pi$ , wobei die Summanden aber nur für endlich viele Winkel nicht verschwinden, so dass es sich rechts um eine endliche Summe handelt.

Es ist nun nachzuweisen, dass das mit (4.5) dargestellte Funktional die Forderungen (2.1) bis (2.3) erfüllt. In der Tat ist zunächst (2.1) trivial richtig. Wir wenden uns der zweiten Forderung zu. 1. Fall: Es sei  $P \cap G = \emptyset$  und demnach  $g(P) = 0$ . Durch passende Wahl des Nullpunktes für den Winkelparameter  $\alpha$  des Ebenenbüschels lässt sich erreichen, dass  $E[\varrho]$  und  $E[\sigma]$  die beiden Stützebenen des Büschels an das Eipolyeder  $P$  sind, wobei  $0 \leq \varrho < \sigma < \pi$  gilt. Es ist dann  $h(P, \alpha) = 1$  für  $\alpha \in [\varrho, \sigma]$  und  $h(P, \alpha) = 0$  für  $\alpha \notin [\varrho, \sigma]$ , und es resultiert  $h(P, \alpha) - h(P, \alpha + 0) = 1$  bzw. 0 für  $\alpha = \sigma$  bzw.  $\alpha \neq \sigma$ , so dass  $\chi(P) = 1$  wird. 2. Fall: Es sei  $P \cap G \neq \emptyset$  und demnach  $g(P) = 1$ . Hier ist nun  $h(P, \alpha) = 1$  identisch für alle Winkel, so dass erneut  $\chi(P) = 1$  folgt. In beiden Fällen hat sich also (2.2) bestätigt. Um die dritte Forde-

rung zu verifizieren, gehen wir von der Bemerkung aus, dass im Hinblick auf die induktive Voraussetzung sowohl  $g(A)$  als auch  $h(A, \alpha)$  und somit auch  $h(A, \alpha + 0)$  additive Funktionale über  $\aleph$  sind, also das Additionstheorem (1.2) erfüllen. Dies muss offenbar auch für das durch Addition derartiger Funktionale gemäss Ansatz (4.5) erzeugte Funktional  $\chi$  gelten, womit auch (2.3) bestätigt ist. Der Existenznachweis ist damit beendet.

## 5. Schnittrekursion

Die für den von uns erbrachten Existenznachweis der Eulerschen Charakteristik  $\chi$  wesentlich gewesene Darstellung (4.5) kann nach Konsultation der vorgängig getroffenen Festsetzungen (4.2) bis (4.4) als eine Rekursionsformel interpretiert werden, die nach steigender Dimension fortschreitet. Sie kann durch

$$\chi(A) = \chi(A \cap G) + \sum_{\alpha} [\chi(A \cap E[\alpha]) - \chi(A \cap E[\alpha + 0])] \quad (5.1)$$

wiedergegeben werden, wobei  $G$  eine beliebige  $(k - 2)$ -dimensionale Gerade und  $E[\alpha]$  die durch den Winkelparameter  $\alpha$  gekennzeichnete Ebene des Büschels der durch  $G$  hindurchgehenden  $(k - 1)$ -dimensionalen Ebenen bezeichnen; hierbei ist  $k \geq 2$  vorausgesetzt.

Unsere Schnittrekursion ist für mannigfaltige Anwendungen dienlich, wie dies in den nachfolgenden Abschnitten an einigen Beispielen erläutert wird.

Die bereits früher vom Verfasser gewonnene analoge Formel<sup>1)</sup>

$$\chi(A) = \sum_{\alpha} [\chi(A \cap E[\alpha]) - \chi(A \cap E[\alpha + 0])], \quad (5.2)$$

die sich auf eine Schar paralleler Ebenen  $E[\alpha]$  mit dem Translationsparameter  $\alpha$  bezieht, kann als Grenzfall von (5.1) betrachtet werden, wo  $G$  im Unendlichen liegt.

## 6. Eine Additionsformel

Als erste Anwendung der Schnittrekursion geben wir die Begründung einer additiven Beziehung bei Polyedervereinigung.

Es sei  $A = \bigcup_1^n A_{\nu}$  die Vereinigung von  $n$  beliebigen Polyedern  $A_{\nu} \subset R$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ), und es bezeichne  $A^i \subset A$  ( $i = 1, \dots, n$ ) dasjenige Teilstück, dessen Punkte wenigstens  $i$  verschiedenen Überdeckungspolyedern  $A_{\nu}$  angehören. Es gilt dann die Additionsformel

$$\sum_1^n \chi(A_{\nu}) = \sum_1^n \chi(A^i), \quad (6.1)$$

die gelegentlich Verwendung findet. Für  $k = 1$  muss die Richtigkeit der entsprechenden einfachen geometrisch kombinatorischen Aussage über Intervallmengen direkt verifiziert werden [vgl. Studie Nr. 1 des Anhangs].

Der Beweis für (6.1) kann nun mit Hilfe der Schnittrekursion (5.1) durch das Verfahren der vollständigen Induktion nach wachsender Dimension auf sehr naheliegende Weise geführt werden. Die vorausgesetzte Richtigkeit der Additionsformel

<sup>1)</sup> Diese in [1] gegebene Begründung der Charakteristik bezieht sich auf Körper des Konvexitätsrings, der die Polyederklasse umfasst. Eine elementare Einführung für dreidimensionale Polyeder nach diesem Verfahren wurde von H. LENZ [2] gegeben.

für die in der Rekursionsformel auftretenden  $(k-1)$ -dimensionalen Schnitte zieht unmittelbar ihre Richtigkeit im  $k$ -dimensionalen Fall nach sich; die Annahme  $A \cap G = \emptyset$  ergibt eine kleine Vereinfachung.

## 7. Charakteristik polyedrischer Sphären

Unter einer (konvexen) polyedrischen Sphäre  $S^{k-1}$  wollen wir hier die geschlossene  $(k-1)$ -dimensionale Randfläche eines  $k$ -dimensionalen eigentlichen Eipolyeders  $P \subset R$  verstehen.

Mit Hilfe unserer Schnittrekursion lässt sich die Eulersche Charakteristik der genannten flächenhaften Polyeder mühelos ermitteln. Es ergibt sich

$$\chi(S^{k-1}) = 1 - (-1)^k, \quad (7.1)$$

also die bekannte klassische Formel.

In der Tat: Im Falle  $k = 1$  besteht  $S^0$  aus zwei Punkten, so dass nach (2.1) bis (2.3)

$$\chi(S^0) = 2 \quad (7.2)$$

resultiert. Wenn  $k = 2$  ist, kann man mit (3.1) auf das für eine konvexe Polygonlinie  $S^1$  gültige Resultat

$$\chi(S^1) = 0 \quad (7.3)$$

schliessen. Mit (7.2) und (7.3) bestätigt sich unsere Behauptung (7.1) für die beiden ersten Dimensionen. Für  $k \geq 3$  ergibt sich ihre Richtigkeit nach der Schnittrekursion (5.1) rekursiv. In der Tat wird der Rückgriff  $\chi(S^{k-1}) = \chi(S^{k-3})$  direkt ablesbar, wenn man davon ausgeht, dass  $G$  durch einen inneren Punkt des von  $S^{k-1}$  berührten Eipolyeders  $P$  gelegt werden kann und vermerkt, dass  $S^{k-1} \cap G$  eine Sphäre  $S^{k-3}$  ist.

## 8. Eulers Formel für konvexe Polyeder; Dehn-Sommervillesche Relationen

Es sei  $k \geq 2$ , und  $P$  bezeichne ein eigentliches  $k$ -dimensionales Eipolyeder. Die Randfläche von  $P$  ist dann eine  $(k-1)$ -dimensionale konvexe polyedrische Sphäre, wie sie im vorstehenden Abschnitt betrachtet wurde. Es soll nun  $h_i$  ( $i = 0, \dots, k$ ) die Anzahl der  $i$ -dimensionalen Kanten von  $P$  bezeichnen, wo aus formal zweckdienlichen Gründen noch  $h_k = 1$  angefügt sei.  $P$  selbst tritt dann als seine  $k$ -dimensionale Kante in Erscheinung.

Weiter soll  $K_i$  ( $i = 0, \dots, k$ ) das  $i$ -te Kantengerüst von  $P$ , d. h. die Vereinigungsmenge aller  $i$ -dimensionalen Kanten bedeuten. Insbesondere ist dann  $K_{k-1}$  die Randfläche von  $P$  und  $K_k$  das Eipolyeder  $P$  selbst.

Als eine Anwendung unserer Schnittrekursion skizzieren wir einen Beweis des folgenden bekannten Relationensystems

$$\sum_0^i (-1)^i h_j = \chi_i \quad (i = 0, \dots, k), \quad (8.1)$$

wonach die  $i$ -te Charakteristik, d. h. die Eulersche Charakteristik  $\chi_i = \chi(K_i)$  des  $i$ -ten Kantengerüstes von  $P$  als alternierende Summe von Kantenzahlen dargestellt wird. Unser System (8.1) enthält in den Sonderfällen  $i = k-1$  und  $i = k$ , die gleich-

wertig ausfallen, die klassische Eulersche Formel, die im Hinblick auf unser Resultat (7.1) als

$$\sum_0^{k-1} (-1)^j h_j = 1 - (-1)^k \quad (8.2)$$

oder formal gerundeter als

$$\sum_0^k (-1)^j h_j = 1 \quad (8.3)$$

geschrieben werden kann.

*Beweis:* Für  $k = 2$  ist unsere Behauptung (8.1) trivial richtig. In der Tat ergibt sich die erforderliche Verifikation mit den Bemerkungen, dass  $h_0 = h_1, h_2 = 1$  und  $\chi_0 = h_0, \chi_1 = 0, \chi_2 = 1$  ist. Es sei nun  $k > 2$ , und die Richtigkeit von (8.1) sei bereits für alle Dimensionen, die kleiner als  $k$  sind, sichergestellt. Wir wählen nun eine  $(k-2)$ -dimensionale Gerade  $G$ , die  $P$  nicht trifft, so dass  $G \cap P = \emptyset$  ist, derart, dass keine Büscheloberfläche des durch  $G$  als Achse bestimmten Ebenenbüschels  $E[\alpha]$  ( $0 \leq \alpha < \pi$ ) mehr als einen Eckpunkt von  $P$  enthält. Die  $h_0 = n$  Eckpunkte  $p_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) von  $P$  lassen sich nun so numerieren, dass für die Winkelparameter  $\alpha_\nu$ , der durch sie hindurchgehenden Büscheloberflächen  $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < \pi$  gilt; durch passende Festsetzung des Nullpunktes für die Winkelmessung ist dies jedenfalls zu erreichen.

Nun sei  $K'_{i-1}[\alpha] = K_i \cap E[\alpha]$  ( $i = 1, \dots, k$ ) gesetzt. Wenn wir bedenken, dass für  $i > 0$  keine  $i$ -dimensionale Kante von  $K_i$  in einer Büscheloberfläche liegen kann, können wir  $K'_{i-1}[\alpha]$  als das  $(i-1)$ -te Kantengerüst des  $(k-1)$ -dimensionalen Schnitteipolyeders  $P'[\alpha] = P \cap E[\alpha]$  erkennen, das für  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_n$  in seiner Trägeroberfläche wieder eigentlich ist. Weiter bezeichne  $h'_j[\alpha]$  ( $j = 0, \dots, k-1$ ) die Anzahl der  $j$ -dimensionalen Kanten von  $P'[\alpha]$ . Nach Schnittrekursion (5.1) gilt zunächst

$$\chi(K_i) = \sum_{\alpha} \{\chi(K'_{i-1}[\alpha]) - \chi(K'_{i-1}[\alpha + 0])\} \quad (i = 1, \dots, k).$$

Nach Einsatz der Induktionsannahme lässt sich

$$\chi(K_i) = \sum_0^{i-1} (-1)^j H_j$$

anschreiben, wenn zur Abkürzung die Hilfszahlen

$$H_j = \sum_{\alpha} \{h'_j[\alpha] - h'_j[\alpha + 0]\} \quad (j = 0, \dots, k-1)$$

zur Verfügung gestellt werden. Nun hat man sich zu überlegen, dass

$$\begin{aligned} h'_j[\alpha] - h'_j[\alpha + 0] &= 0 \quad (\alpha \neq \alpha_\nu, \nu = 1, \dots, n) \quad \text{bzw.} \\ &= -N_{\nu j} \quad (\alpha = \alpha_\nu; j \neq 0) \quad \text{bzw.} \quad = -N_{\nu 0} + 1 \quad (\alpha = \alpha_\nu; j = 0) \end{aligned}$$

ist, wobei  $N_{\nu j}$  die Anzahl der  $(j+1)$ -dimensionalen Kanten von  $P$  bezeichnet, die im Eckpunkt  $p_\nu$  zusammenstossen, und die ganz auf der positiven Seite der Büscheloberfläche  $E[\alpha_\nu]$  liegen, derart also, dass diese Kanten für alle hinreichend kleinen  $\varepsilon > 0$  von den Ebenen  $E[\alpha_\nu - \varepsilon]$  nicht getroffen werden. Offensichtlich gilt die Zählungsformel

$$\sum_1^n N_j = h_{j+1} \quad (j = 0, \dots, k-1),$$

da ja jede  $(j+1)$ -dimensionale Kante von  $P$  genau einmal einen Eckpunkt in der zugehörigen Büscheloberfläche aufweist und zudem auf ihrer positiven Seite liegt, wenn das gesamte Winkelintervall  $0 \leq \alpha < \pi$  durchspielt wird. So ergibt sich denn

$$H_j = -h_{j+1} \quad (1 \leq j \leq k-1) \quad \text{bzw.} \quad = -h_1 + h_0 \quad (j = 0).$$

Zusammengefasst resultiert jetzt

$$\chi(K_i) = h_0 - \sum_0^{i-1} (-1)^j h_{j+1} = \sum_0^i (-1)^j h_j$$

für  $i = 1, \dots, k$ ; für  $i = 0$  ist dies trivial richtig. Damit ist der Induktionsbeweis beendet.

Im nachfolgenden zweiten Teil gewinnen wir eine Inversion zu (8.1), indem wir umgekehrt die Kantenanzahlen durch die Charakteristiken der Kantengerüste darstellen. Jedoch ist dies nur dann möglich, wenn wir uns auf «allgemeine» eigentliche konvexe Polytope beschränken, d. h., wir setzen über  $P$  voraus, dass jede  $i$ -dimensionale Kante zu genau  $\binom{k-i}{k-j}$  verschiedenen  $j$ -dimensionalen Kanten gehört, wo  $0 \leq i < j \leq k$  sein soll. Es treten also in der  $P$  berandenden polyedrischen Sphäre keine singulären Inzidenzerscheinungen auf.

Wir greifen nun auf die additive Formel (6.1) zurück und identifizieren die dort auftretenden  $A_j$  mit den  $j$ -dimensionalen Kanten von  $P$ . Es ergibt sich unmittelbar

$$h_j = \sum_0^j \left[ \binom{k-i}{k-j} - \binom{k-i-1}{k-j} \right] \chi_i; \quad j = 0, \dots, k. \quad (8.4)$$

Binomialkoeffizienten, die im engeren Sinn nicht existieren, sind hierbei Null zu setzen. Zur Begründung ist lediglich zu bedenken, dass die Menge  $A^m$  der vom System der  $j$ -dimensionalen Kanten  $m$ -fach überdeckten Punkte mit  $K_i$  zusammenfällt, sofern  $m$  dem Intervall

$$\binom{k-i-1}{k-j} < m \leq \binom{k-i}{k-j}$$

angehört.

Der nachfolgende letzte Teil, den wir dem speziellen Thema «zur kombinatorischen Geometrie der polyedrischen Sphären» widmen wollen, soll uns zu einem Relationensystem führen, das die Eulersche Formel umfasst. Neben der bekannten klassischen linearen Beziehung zwischen den Kantenanzahlen treten noch andere solche auf, die insgesamt ein abgerundetes System ergeben. Dieses kann als eine Erweiterung des Eulerschen Gesetzes angesehen werden, wobei allerdings wohl beachtet werden muss, dass lediglich allgemeine konvexe Polyeder zugelassen sind.

Die angekündigten Relationen ergeben sich dadurch, dass wir die beiden oben hergeleiteten Systeme (8.1) und (8.4) konfrontieren und die Ausdrücke für die Charakteristiken des erstgenannten Systems im zweiten substituieren. Nach einfacher Rechnung resultiert

$$h_j = \sum_0^j (-1)^i \binom{k-i}{k-j} h_i; \quad j = 0, \dots, k, \quad (8.5)$$

also ein System von formal  $k+1$  linearen homogenen Beziehungen für die  $k+1$  Kantenanzahlen  $h_i$  ( $i = 0, \dots, k$ ).

Von wesentlicher Bedeutung für die Diskussion des Relationensystems (8.5) ist die dort in Erscheinung tretende Matrix

$$A = \left[ (-1)^i \binom{k-i}{k-j} \right]; \quad i, j = 0, \dots, k. \quad (8.6)$$

Bezeichnet  $E$  die Einheitsmatrix, so zeigt sich, dass der Rang  $r$  von  $A - E$  lediglich  $[(k+1)/2]$  ist [vgl. Studie Nr. 2 des Anhangs].

(8.5) impliziert demnach nur  $r = [(k+1)/2]$  unabhängige lineare Relationen.<sup>2)</sup>

Die unten folgende Tafel zeigt für die ersten Dimensionen  $k = 2, 3, 4, 5$  die  $r = 1, 2, 2, 3$  unabhängigen Relationen, wie sie sich in natürlicher Weise aus (8.5) dadurch ergeben, dass man die jeweils neu auftretenden von den vorangehenden abhängigen ausstreicht.

$k$	Relationen	
2	$h_0 - h_1$	$= 0$
3	$3 h_0 - 2 h_1$ $h_0 - h_1 + h_2 - 2 h_3$	$= 0$ $= 0$
4	$2 h_0 - h_1$ $h_0 - h_1 + h_2 - h_3$	$= 0$ $= 0$
5	$5 h_0 - 2 h_1$ $10 h_0 - 6 h_1 + 3 h_2 - 2 h_3$ $h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + h_4 - 2 h_5 = 0$	$= 0$ $= 0$ $= 0$

## 9. Kennzeichnung der Konvexität durch eine Schnitteigenschaft

Wir beweisen die folgende Aussage:

Es sei  $k \geq 2$ ,  $A \subset R$  ein kompaktes Polyeder und  $m$  eine ganze Zahl. Gilt für jede  $(k-1)$ -dimensionale Ebene  $E \subset R$ , für die  $A \cap E \neq \emptyset$  ausfällt, stets  $\chi(A \cap E) = m$ , so ist  $m = 1$  und  $A$  konvex.

Für  $k = 1$  ist der Satz falsch; besteht  $A$  aus zwei disjunkten kompakten und nichtleeren Intervallen, so ist die Voraussetzung für  $m = 1$  erfüllt, die Aussage jedoch unzutreffend. Beweis der Aussage: Es sei zunächst  $k = 2$  und  $\widehat{A}$  die konvexe Hülle von  $A$  und  $p$  ein Eckpunkt von  $\widehat{A}$ . Durch  $p$  lässt sich eine Stützgerade  $E'$  von  $\widehat{A}$  so legen, dass  $\widehat{A} \cap E' = p$  ist. Nun gehört  $p$  auch zu  $A$ , und ebenso gilt  $A \cap E' = p$ , so dass mit  $\chi(A \cap E') = \chi(p) = 1$  vorerst  $m = 1$  resultiert. So folgt, dass für jede Gerade  $E$ , für die  $A \cap E \neq \emptyset$  ist,  $\chi(A \cap E) = 1$ , also  $A \cap E$  eine Strecke sein muss. Damit ist unsere Behauptung für  $k = 2$  als richtig erkannt. Es sei nun  $k > 2$ , und unser Satz sei bereits für alle Dimensionen bewiesen, die kleiner als  $k$  sind. Ist  $G$  eine  $(k-2)$ -dimensionale Gerade, für die  $A \cap G \neq \emptyset$  gilt, so folgt mit der Schnittrekursion (5.1) zunächst  $\chi(A) = \chi(A \cap G) = m^*$ . Es sei nun  $A' = A \cap E \neq \emptyset$ . Für alle  $G \subset E$ ,  $A' \cap G \neq \emptyset$ , muss  $\chi(A' \cap G) = m^*$  sein. Nach der Induktionsannahme schliesst man, dass  $m^* = 1$  und  $A'$  konvex sein muss. Dies ist nur dann für beliebige

<sup>2)</sup> Es handelt sich um ein Gleichungssystem, das vollständig im  $k$ -dimensionalen Fall erstmals von D. M. Y. SOMMERRVILLE [3] im Jahre 1927 aufgestellt wurde, und zwar in einer gleichwertigen Form, die sich auf die den allgemeinen Polyedern dual entsprechenden simplizialen Polyeder bezieht ( $h_i = h_{k-1-i}^*$ ;  $h_k = h_k^* = 1$ ). Diese bemerkenswerte Ergänzung zur Eulerschen Polyederformel ist später offensichtlich kaum beachtet worden, und sie war auch dem Verfasser bis nach Abschluss des Manuskriptes zu der vorliegenden Note unbekannt. Auch V. KLEE [4] hat 1963 die analogen Relationen mit allgemeinerer sich auf simpliziale Mannigfaltigkeiten erstreckender Gültigkeit erneut entdeckt. Die hier verwertete Information konnte der Verfasser dem soeben erschienenen ausgezeichneten Buch von B. GRÜNBAUM [5] über konvexe Polytope entnehmen.

Ebenen  $E$  möglich, wenn bereits  $A$  konvex ist; offenbar ist dann  $m = 1$ . Damit ist der induktive Beweis beendet.<sup>3)</sup>

## 10. Paritätsaussagen für Treffzahlen bei linearen Polyederschnitten

Als typische Anwendung der Schnittrekursion für die Eulersche Charakteristik begründen wir einige einfache Aussagen über die Parität von Treffzahlen, die sich bei Schnitten der Ebenen (Geraden) eines Bündels mit Polyedern machen lassen. So gilt der folgende Satz:

Sei  $k \geq 1$  und  $\mathfrak{R}$  ein System von  $n$  Eipolyedern  $P_\nu \subset R$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) des  $k$ -dimensionalen Raumes  $R$ , von denen keines den fest gewählten Ursprung  $Z \in R$  enthält. Ist  $n$  ungerade, so gibt es eine durch  $Z$  hindurchgehende  $(k-1)$ -dimensionale Ebene  $E$  derart, dass die Zahl  $N(E)$  der Körper von  $\mathfrak{R}$ , die von  $E$  getroffen werden, gerade ist.

Der nachfolgend noch formulierte Zusatz zeigt, dass unsere Aussage von vier möglichen Varianten die einzige zutreffende ist. Es gilt nämlich:

Von den vier Aussagen

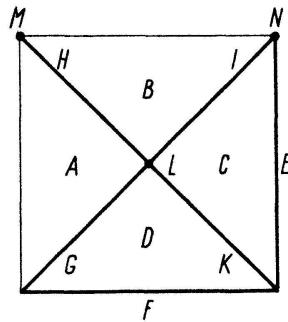
- I)  $n$  ungerade  $\Rightarrow \exists E : N(E)$  gerade
- II)  $n$  ungerade  $\Rightarrow \exists E : N(E)$  ungerade
- III)  $n$  gerade  $\Rightarrow \exists E : N(E)$  gerade
- IV)  $n$  gerade  $\Rightarrow \exists E : N(E)$  ungerade

sind I) richtig, II) bis IV) dagegen falsch!

*Beweise:* Zunächst begründen wir den Satz. Es ist evident, dass es genügt, den Beweis für Systeme  $\mathfrak{R}$  paarweise disjunkter Eipolyeder zu führen. Andernfalls lässt sich ein derartiges System aus dem Vorgegebenen dadurch gewinnen, dass passende Eipolyeder von  $\mathfrak{R}$  von  $Z$  aus dilatiert werden, wobei aber die Treffzahlen  $N(E)$  für alle Ebenen des durch  $Z$  gegebenen Bündels offensichtlich unverändert bleiben. Für  $k = 1$  ist der Satz trivial richtig, da in diesem Fall  $E$  mit  $Z$  zu identifizieren ist. Es sei nun  $k > 1$ , und der Satz sei bereits für alle Dimensionen kleiner als  $k$  bewiesen. Ferner postulieren wir die Gegenannahme, wonach ein System  $\mathfrak{R}$  so existiere, dass sowohl  $n$  als auch alle Treffzahlen  $N(E)$  für Ebenen durch  $Z$  ungerade sind. Es bezeichne  $E'$  eine solche festgewählte Ebene und  $\mathfrak{R}'$  das System der nichtleeren Schnitteipolyeder der Ebene  $E'$  mit den Körpern von  $\mathfrak{R}$ ; ihre Anzahl  $n'$  ist also ungerade. Nach der Induktionsannahme existiert eine in  $E'$  liegende  $(k-2)$ -dimensionale Gerade  $G'$  derart, dass  $N'(G')$  gerade ausfällt. Es soll nun  $G'$  die Achse eines Ebenenbüschels  $E[\alpha]$  sein. Aus der Schnittrekursion (5.1) kann abgelesen werden, dass  $\chi(A) = \chi(A \cap G')$  ( $\text{mod } 2$ ) sein muss, wo  $A$  die Vereinigungsmenge der Eipolyeder von  $\mathfrak{R}$  bezeichnet; man muss sich nur überlegen, dass die Parität der Schnittzahlen  $\chi(A \cap E[\alpha])$  innerhalb des Büschels fest bleibt. Da aber  $\chi(A \cap G') = N'(G')$  gerade ist, muss  $\chi(A) = n$  auch gerade sein! Mit diesem Widerspruch ist der Induktionsbeweis beendet.

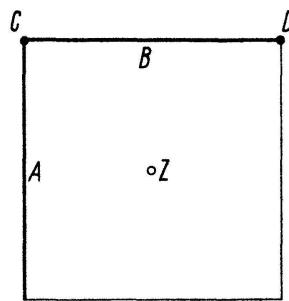
<sup>3)</sup> Die Frage, ob eine Kennzeichnung der Konvexität lediglich auf Grund der Eulerschen Charakteristik wenigstens in dem hier vorliegenden Spezialfall kompakter Polyeder möglich ist, stellte sich in der im Anschluss an einen von K. Voss gehaltenen Vortrag [6] stattgehabten Diskussion. Die dort erwogene Möglichkeit ist mit unserer Aussage bestätigt.

Nun wenden wir uns dem **Zusatz** zu: Aussage I) ist mit dem soeben bewiesenen Satz identisch. Aussage II) ist falsch, was wir durch ein Beispiel belegen. Hierbei ist  $k = 3$  und  $n = 13$ . Die einzelnen Epolyeder des speziellen Systems  $\mathfrak{R}$  sind Elemente der Mantelfläche einer geraden quadratischen Pyramide, wobei die Mitte des Basisquadrates  $Z$  sein soll; vgl. die Grundrißskizze Figur 1. Die 13 Elemente sind



Figur 1

die 4 Dreiecksbereiche  $A, B, C, D$  sowie die 6 Kanten  $E, F, G, H, I, K$  und die 3 Eckpunkte  $L, M, N$ . Man überprüft jetzt, dass die Treffzahlen  $N(E)$  lediglich die Werte 4, 6, 8, 10, 12 annehmen. Ebenso ist Aussage III) falsch. Dies zeigen wir im Falle  $k = 2, n = 4$  mit einem System  $\mathfrak{R}$ , das aus zwei Quadratseiten  $A, B$  und zwei



Figur 2

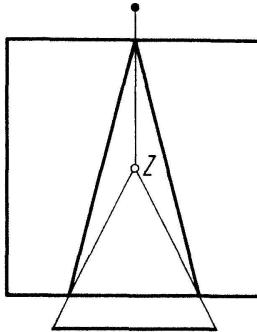
Eckpunkten gemäss Figur 2 besteht. Für jede durch den Quadratmittelpunkt  $Z$  gehende Gerade  $E$  ist  $N(E)$  entweder 1 oder 3. Aussage IV) ist trivialerweise falsch, was mit  $n = 0$ , d. h.  $\mathfrak{R}$  leer, und  $N(E) = 0$  gezeigt ist.

### 11. Eine Aussage für Polyederdurchstiche mit Halbstrahlen

Abschliessend beweisen wir eine einfache Aussage für Fälle, wo die Treffzahlen für alle Halbstrahlen, die von einem festen Punkt ausgehen und ein Polyeder durchstechen, konstant ausfallen. Es gilt:

Sei  $k \geq 1$  und  $A$  ein kompaktes Polyeder des  $k$ -dimensionalen Raumes  $R$ , das den Ursprung  $Z$  nicht enthält. Besteht der Durchschnitt  $A \cap H$  von  $A$  mit jeder von  $Z$  ausgehenden Halbgeraden  $H$  aus  $m$  getrennten Intervallen, so ist  $\chi(A) = 2m$ , falls  $k$  ungerade, jedoch  $\chi(A) = 0$ , falls  $k$  gerade ist.

Dieser Satz gestattet, die Eulersche Charakteristik eines Polyeders in besonderen Fällen direkt abzulesen. Die betreffende günstige Sachlage stellt sich keineswegs nur in dem in gewissem Sinn trivialen Fall ein, wo  $A$  aus  $m$  einander umschliessenden polyedrischen Sphären besteht. Figur 3 zeigt ein Beispiel im Falle  $k = 2$  dieser Art, wobei  $m = 2$  ist.



Figur 3

*Beweis:* Für  $k = 1$  ist die Aussage trivial. Es sei  $k > 1$ , und die Aussage sei bereits für alle Dimensionen kleiner als  $k$  gesichert. Für irgend eine  $(k - 1)$ -dimensionale Ebene  $E$  durch  $Z$  bzw. eine  $(k - 2)$ -dimensionale Gerade  $G$  durch  $Z$  setzen wir  $A' = A \cap E$  bzw.  $A'' = A \cap G$ . Die vorausgesetzte Halbstrahleigenschaft vererbt sich von  $R$  auf  $E$  bzw. auf  $G$ . Nach der Induktionsannahme muss  $\chi(A') = 0$  bzw.  $\chi(A'') = 2m$  sein, falls  $k$  ungerade ist. Mit Konsultation der Schnittrekursion (5.1) folgert man, dass  $\chi(A) = 2m$  sein muss. Analog bestätigt sich die Behauptung, falls  $k$  gerade ist.

## ANHANG

## Studie Nr. 1

Es seien  $n$  und  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) natürliche Zahlen, und  $\mathfrak{R}$  bezeichne eine Menge von  $n$  abgeschlossenen, nicht notwendig disjunkten Strecken einer Geraden  $G$ . Die Menge derjenigen Punkte von  $G$ , die wenigstens  $i$  verschiedenen Strecken von  $\mathfrak{R}$  angehören, zerfällt in endlich viele paarweise disjunkte und abgeschlossene Strecken; ihre Anzahl sei  $k_i$  ( $0 \leq k_i \leq n$ ). Es gilt dann die additive Beziehung

$$n = \sum_1^n k_i.$$

In der Tat:  $G$  sei  $x$ -Achse, und  $x \in G$  bezeichne einen Punkt und zugleich seine Koordinate. Die Streckenmenge  $\mathfrak{R}$  sei  $\{J_j; j = 1, \dots, n\}$  wobei  $J_j$  abgeschlossene Intervalle sind. Wir führen die charakteristischen Funktionen  $f_j(x) = 1(x \in J_j)$  bzw.  $= 0(x \notin J_j)$  und die Stufenfunktion  $F(x) = \sum_1^n f_j(x)$  ein. Ferner sei  $g_i(x) = 1[F(x) \geq i]$  bzw.  $= 0[F(x) < i]$ . Offenbar gilt dann auch  $F(x) = \sum_1^n g_i(x)$ . Endlich sei  $N = \sum_x [F(x) - F(x + 0)]$ , wobei sich die Summation über alle  $x$  von  $G$  erstreckt; hierbei ist zu beachten, dass der Summand nur an endlich vielen Sprungstellen der Stufenfunktion  $F(x)$  nicht verschwindet, so dass es sich de facto um eine endliche Summe ganzer Zahlen handelt [ $F(x + 0)$  ist wie üblich der rechtsseitige Grenzwert  $\lim F(y)$  ( $x < y, x = \lim y$ )]. Nun hat man einerseits  $\sum_x [f_j(x) - f_j(x + 0)] = 1$  und andererseits auch  $\sum_x [g_i(x) - g_i(x + 0)] = k_i$ , so dass  $N = n = \sum_1^n k_i$  resultiert, was zu beweisen war.

**Studie Nr. 2**

Gegeben sei die quadratische Matrix

$$A = \left[ (-1)^i \binom{k-i}{k-j} \right]; \quad i, j = 0, 1, \dots, k.$$

Es ist zu zeigen, dass der Rang  $r$  der Matrix  $A - E$ , wobei  $E$  die Einheitsmatrix bezeichnet, gleich  $r = [(k+1)/2]$  ist. In der Tat: Bilden wir die Hilfspolynome  $p_i(x)$  ( $i = 0, \dots, k$ ), deren Koeffizienten durch die Elemente der  $i$ -ten Spalte von  $A - E$  geliefert werden ( $j$  sei der Zeilen- und  $i$  der Spaltenindex von  $A$ ), so ergibt eine einfache Rechnung

$$p_i(x) = (-x)^i (1+x)^{k-i} - x^i \quad (i = 0, \dots, k).$$

Der gesuchte Rang ist gleich der Dimension des von den Polynomen  $p_i(x)$  aufgespannten linearen Polynomraums. Durch die nichtsinguläre lineare Transformation

$$q_n(x) = \sum_0^n \binom{n}{i} p_i(x) \quad (n = 0, \dots, k)$$

bleibt diese Dimension unverändert. Nun ist aber

$$q_n(x) = (1+x)^{k-n} - (1+x)^n,$$

und die Dimension des durch die  $q_n(x)$  aufgespannten linearen Polynomraums ist, wie ersichtlich,  $[(k+1)/2]$ , was zu beweisen war. H. HADWIGER, Bern

## LITERATURNACHWEIS

- [1] H. HADWIGER, *Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie*, J. reine angew. Math. 194, 101–110 (1955).
- [2] H. LENZ, *Grundlagen der Elementargeometrie*, Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 52, Kap. 22. (6) (Berlin 1961).
- [3] D. M. Y. SOMMERRVILLE, *The Relations Connecting the Angle-sums and Volume of a Polytope in Space of  $n$ -dimensions*, Proc. R. Soc. London [A] 115, 103–119 (1927).
- [4] V. KLEE, *A Combinatorial Analogue of Poincaré's Duality Theorem*, Canadian. J. Math. 16, 517–531 (1964).
- [5] B. GRÜNBAUM, *Convex Polytopes*, (John Wiley + Sons, London–New York–Sydney, 1967).
- [6] K. VOSS, *Schnitte von Punktmengen mit linearen Räumen (Charakterisierung der konvexen Mengen)*; Vortrag im Math. Forschungsinstitut Oberwolfach im September 1966.

## Kleine Mitteilungen

**Eine Bemerkung zur Untersuchung unbestimmter Ausdrücke**

Bei der Untersuchung sogenannter unbestimmter Ausdrücke benutzt man üblicherweise die Regeln von BERNOULLI-L'HOSPITAL. Im folgenden beweisen wir einen Satz, der uns eine andere Methode zur Untersuchung solcher Ausdrücke liefert. Diese Methode hat gegenüber den genannten Regeln verschiedene Vorteile. Erstens: die Voraussetzungen des Satzes sind recht einfach; zweitens: die Untersuchung kann oft wesentlich abgekürzt werden, und zwar vor allem dann, wenn zusammengesetzte Funktionen vor-