Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 23 (1968)

Heft: 4

Rubrik: Aufgaben

Aufgaben

Aufgabe 552. In einem Simplex des R_n werden zwei Punkte beliebig so gewählt, dass keiner von ihnen auf einem $(n-1)$-dimensionalen Grenzraum liegt. Man zeige, dass die Fusspunkte der «Ecktransversalen» durch die beiden Punkte auf den Simplexkanten auf einer n-dimensionalen Quadrik liegen.

Bemerkung. Unter dem Fusspunkt P_{ij} der «Ecktransversalen» durch den beliebigen Punkt P auf der Kante $A_i A_j$ versteht man den Schnittpunkt der Geraden $A_i A_j$ mit dem $(n-1)$-dimensionalen Unterraum, gebildet durch die Punkte

$$A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_{n+1}, P .$$

J. Schopp, Budapest

Lösung des Aufgabenstellers: Es ist bekannt und lässt sich leicht einsehen, dass im n-dimensionalen Raum $A = n(n+3)/2 = 2n + \binom{n}{2}$ Punkte eindeutig eine n-dimensionale Quadrik bestimmen, falls höchstens $k(k+3)/2$ $(k < n)$ Punkte in einem k-dimensionalen Unterraum liegen.

Seien P und Q die gegebenen Punkte, P_{ij} bzw. Q_{ij} ihre Fusspunkte auf der Kante $A_i A_j$, wenn man die Simplexspitze mit $A_i (i = 1, \ldots, n+1)$ bezeichnet. Die Anzahl $B = (n+1)\,n$ der Fusspunkte ist gleich der doppelten Kantenanzahl. Offenbar ist $A < B$, falls $n > 1$ ist.

Betrachten wir jetzt sämtliche Fusspunkte der Ecktransversalen durch P, P_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n+1;\ i \neq j)$, deren Anzahl $a = \binom{n+1}{2}$ ist. Nehmen wir dazu von den Fusspunkten der Ecktransversalen durch Q diejenigen, die auf jenen Kanten liegen, deren Endpunkt A_k ist, also die Fusspunkte Q_{ki} $(i = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n+1)$; ihre Anzahl ist $a' = n$. Aus $a + a' = A$ folgt, dass die ausgewählten Fusspunkte eine n-dimensionale Quadrik bestimmen.

Wir beweisen, dass ein beliebiger Fusspunkt Q_{ij} $(i, j = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n+1;$ $i \neq j)$ – welcher bei der Bestimmung der Quadrik nicht vorkam –, auch zur Quadrik gehört.

Die Ebene $A_i A_j A_k$ schneidet die Quadrik in einem Kegelschnitt. Dieser Kegelschnitt ist durch die Fusspunkte P_{ij}; P_{ik}; P_{jk} Q_{ik} Q_{jk} bestimmt. Laut Aufgabe Nr. 530 (El. Math. *22*, 89 (1967)) ist aber auch Q_{ij} ein Punkt dieses Kegelschnittes und damit auch ein Punkt der Quadrik, q.e.d.

Aufgabe 553. k étant un nombre naturel donné, appelons P_k le problème suivant: Existe-t-il des nombres triangulaires > 0 qui sont sommes de k nombres triangulaires consécutifs > 0?

Examiner pour quels entiers k, tels que $2 \leqq k \leqq 10$, le problème P_k n'a pas de solutions, pour quels k il admet un nombre fini > 0 de solutions, et pour quels k il a une infinité de solutions.

W. Sierpiński, Varsovie

Lösung: P_k bedeutet: Gibt es zu festem natürlichem $k \geqq 2$ Paare (m, n) natürlicher Zahlen derart, dass

$$t_m = t_n + \cdots + t_{n+k-1} \quad \text{mit} \quad t_a = \frac{a(a+1)}{2} \tag{1}$$

für alle natürlichen a gilt? Aus der Forderung (1) wird somit die Diophantische Gleichung

$$(2m+1)^2 - k(2n+k)^2 = \frac{1}{3}(k-1)(k^2+k-3) = r(k) \tag{2}$$

oder in etwas anderer Bezeichnung

$$u^2 - k v^2 = r(k) . \tag{2'}$$

Ist $k = 2, 3, 5, 7, 8, 10$, so hat P_k jeweils unendlich viele Lösungen. Denn für $k = 2$ reduziert sich (2') auf die Pellsche Gleichung $u^2 - 2v^2 = 1$. Für $k = 3, 5, 7, 8, 10$ entnehmen wir untenstehender Tabelle je eine Lösung (u, v) von (2'), aus der man mit Hilfe der unendlich vielen Lösungen der zugehörigen Pellschen Gleichung $x^2 - k y^2 = 1$ je unendlich viele Lösungen gewinnen kann. Für $k = 6$ wird aus (2'): $u^2 - 6v^2 = 65$, woraus $u \not\equiv 3 \pmod 6$ folgt. Da u aber ungerade sein muss, folgt $u \equiv \pm 1 \pmod 6$ und also $u^2 - 6v^2 \equiv 1 \pmod 6$, während $65 \equiv -1 \pmod 6$, so dass (2') für $k = 6$ keine Lösung besitzt. Bleiben die beiden Quadratzahlen $k = 4, 9$. Für $k = 4$ wird aus (2'): $(u + 2v)(u - 2v) = 17$, was nur geht, wenn $u + 2v = 17$, $u - 2v = 1$, woraus folgt $v = 2n + 4$, d.h. $n = 0$, so dass wir für $k = 4$ wieder keine Lösung bekommen. Für $k = 9$ wird aus (2'): $(u + 3v)(u - 3v) = 232$. Da beide Faktoren links gerade sein müssen, kommen nur $u + 3v = 116$, $u - 3v = 2$ bzw. $u + 3v = 58$, $u - 3v = 4$ in Frage, wo der zweite Fall wie vorher auf $n = 0$ führt und somit ausfällt; der erste führt auf $u = 59$, $v = 19$, d.h. $m = 29$, $n = 5$, was tatsächlich die einzige existierende Lösung von P_9 liefert.

k	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(k)$	6	17	36	65	106	161	232	321
u	3	–	9	–	13	13	59	19
v	1	–	3	–	3	1	19	2

P. Bundschuh, Freiburg-Littenweiler

Eine weitere Lösung sandte G. Wulczyn, Bucknell University, USA.

Aufgabe 554. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres naturels k pour lesquels le problème P_k (voir nº 553) n'a pas de solutions, et une infinité de nombres k pour lesquels P_k a une infinité de solutions. W. Sierpiński, Varsovie

Lösung (nach A. Schinzel, Warschau): Wir verwenden die Bezeichnungen und Formeln der Lösung zu Aufgabe 553.

a) P_k hat für $k = 9t + 6$ ($t = 0, 1, 2, \ldots$) keine Lösung. In der Tat ist für diese k $r_k \equiv 2 \pmod 3$ und aus (2) ergibt sich nun die unmögliche Kongruenz $(2m + 1)^2 \equiv 2 \pmod 3$.

b) P_k hat für $k = 3t^2 - 1$ stets eine Lösung, da (2) die Lösung

$$n_0 = \frac{t - 3t^2 + 2}{2}, \qquad m_0 = \frac{t(3t^2 - 1)}{2}$$

besitzt. Andererseits ist $k \equiv 2$ oder $3 \pmod 4$, also nie ein Quadrat, so dass $x^2 - ky^2 = 1$ unendlich viele Lösungen hat. Die Zahlen $x + k^2 y - 1$ und $kx + y - k$ sind gerade. Setzt man

$$n = x n_0 + y m_0 + \frac{kx + y - k}{2}, \qquad m = k y n_0 + x m_0 + \frac{x + k^2 y - 1}{2},$$

so ergeben sich unendlich viele ganzzahlige Lösungen von (2) für jedes $k = 3t^2 - 1$.

Weitere Lösungen sandten E. Teuffel (Korntal/Stuttgart) und G. Wulczyn (Bucknell University, USA).

Aufgabe 555. Aus neun Punkten $A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ eines Kegelschnitts werden die Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ und das Dreieck gebildet, das aus den Geraden A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 als Seiten besteht. Ist Dreieck ABC zu zweien der anderen Dreiecke perspektiv, so auch zu dem dritten. W. Schöbe, München

1. Lösung (analytisch): Über das Koordinatendreieck sei so verfügt, dass $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$ die Gleichung des Kegelschnitts K ist und die ersten drei Punkte durch $A(1 \mid 0 \mid 0)$, $B(0 \mid 1 \mid 0)$, $C(0 \mid 0 \mid 1)$ gegeben sind. Die Dreiecke Δ_1 und Δ_2 seien perspektiv zum Koordinatendreieck Δ mit den Zentren $Z_1(u_1 \mid u_2 \mid u_3)$ und $Z_2(v_1 \mid v_2 \mid v_3)$. Eine einfache Rechnung ergibt die Koordinaten der sechs auf K liegenden Ecken von Δ_1 und Δ_2. Die Verbindungsgeraden A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 (Seiten von Δ_3) schneiden die homologen Seiten von Δ in den Punkten $P(0 \mid u_2v_2 \mid -u_3v_3)$, $Q(-u_1v_1 \mid 0 \mid u_3v_3)$, $R(u_1v_1 \mid -u_2v_2 \mid 0)$. Diese drei Punkte liegen auf der Geraden

$$\frac{x_1}{u_1v_1} + \frac{x_2}{u_2v_2} + \frac{x_3}{u_3v_3} = 0. \tag{1}$$

Δ und Δ_3 sind also perspektiv (Umkehrung von «Desargues»).

Werden dagegen $\triangle$, $\triangle_1$ und $\triangle$, $\triangle_3$ als perspektiv vorausgesetzt, so kann statt Z_2 die Desarguessche Gerade von $\triangle$, $\triangle_3$ als gegeben betrachtet werden. Es lassen sich dann die Verhältnisse dreier Zahlen $v_1:v_2:v_3$ so bestimmen, dass die letztere die Gleichung (1) hat. Dann ist der Punkt $Z_2(v_1 \mid v_2 \mid v_3)$ Perspektivitätszentrum der Dreiecke $\triangle$ und $\triangle_2$.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

2. Lösung (synthetisch): Man kann sich auf den Fall beschränken, dass die Dreieckspaare $\triangle$, $\triangle_1$ und $\triangle$, $\triangle_2$ als perspektiv vorausgesetzt werden. Der andere Fall ist leicht indirekt auf jenen zurückzuführen.

Wir denken uns das Perspektivitätszentrum Z_2 von $\triangle$ und $\triangle_2$ auf $C\,C_2$ variabel. Dann beschreiben A_2 und B_2 auf dem Kegelschnitt K projektive Punktreihen, während die übrigen 7 Punkte auf K festbleiben. Es sei $P \equiv BC \cap A_1A_2$, $Q \equiv CA \cap B_1B_2$, $R \equiv AB \cap C_1C_2$. Die Gerade $P\,Q$ schneidet $B\,C$ und $C\,A$ in projektiven Punktreihen. Der Schnittpunkt C der Träger entspricht sich selbst. $P\,Q$ dreht sich also um einen Punkt. Um zu zeigen, dass dieser Punkt R ist, braucht man nur zwei Lagen von $P\,Q$ aufzuweisen, die mit R inzident sind. Liegt nun Z_2 auf $A\;B$, also $A_2 \equiv B$, $B_2 \equiv A$, so wird $P \equiv B$, $Q \equiv A$, und P, Q, R sind kollinear. Ist dagegen $Z_2 \equiv C_2$, so wird $P \equiv BC \cap A_1C_2$, $Q \equiv CA \cap B_1C_2$, und die Pascalschen Geraden der Sechsecke $ABCC_1C_2A_1$ und $BACC_1C_2B_1$ gehen durch die Punkte R, P, Z_1 bzw. R, Q, Z_1, sind also identisch und damit P, Q, R kollinear. Die Dreiecke $\triangle$ und $\triangle_3$ sind daher perspektiv (Umkehrung von «Desargues»).

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Neue Aufgaben

Aufgabe 577. K. RADZISZEWSKI (Ann. Univ. Marie Curie-Sklodowska *A* 10, 57–59, 1956) hat bewiesen: Es sei P der Flächeninhalt des Rechtecks, das einem gegebenen Oval umschrieben ist und das eine Seite in der Richtung θ hat. Der Flächeninhalt des Ovals sei S. Dann ist

$$\frac{4}{\pi}\,S \leqslant \bar{P} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P\,d\theta$$

mit Gleichheit nur für den Kreis. Man beweise: Es sei S^* der Flächeninhalt der Fusspunktkurve des Ovals für einen beliebigen inneren Punkt. Dann ist

$$\bar{P} \leqslant \frac{4}{\pi}\,S^*$$

mit Gleichheit nur, wenn das Oval durch eine Rotation von 90° in sich übergeführt werden kann. S^* hat ein einziges Minimum, wenn der Aufpunkt im Inneren variiert. Für glatte Ovale wird das Minimum im Krümmungsschwerpunkt angenommen.

H. GUGGENHEIMER, Polytechnic Institute of Brooklyn, USA

Aufgabe 578. Show that

$$\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\binom{m}{r}\binom{n}{s}(a)_r\,(b)_s\,(b-a)_{m-r}\,(a-b)_{n-s}\,\frac{(c)_{r+s}}{(c)_r\,(c)_s} = (b)_m\,(a)_n\,\frac{(c)_{m+n}}{(c)_m\,(c)_n}\,,$$

where

$$(a)_n = a\,(a+1)\cdots(a+n-1)\,.$$

L. CARLITZ, Duke University, USA

Aufgabe 579. Trouver tous les nombres naturels x pour lesquels chacun des six nombres x, $x+2$, $x+6$, $x+8$, $x+12$, $x+14$ est premier. W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Aufgabe 580. Sei

$$i, k = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{und} \quad a_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } i < k, \\ (i-k)!\binom{i}{k}^2 & \text{für } i \geqq k. \end{cases}$$

Man zeige

$$\sum_{n=0}^{i} a_{in}\, a_{nk}\, (-1)^{n-k} = 0^{|i-k|}.$$

I. PAASCHE, München

Literaturüberschau

The Mathematical Papers of Isaac Newton. Herausgegeben von D. T. WHITESIDE. Volume I, 1664–1666. 46 + 590 Seiten, 5 Tafeln und viele Figuren. £10.10s. (The Cambridge University Press 1967.) Volume II, 1667–1670. 22 + 520 Seiten, 5 Tafeln und viele Figuren. £10.10s. (The Cambridge University Press 1968).

Von den vorgesehenen acht Bänden der mathematischen Schriften NEWTONS liegen die zwei ersten vor. Es handelt sich fast ausschliesslich um Erstausgaben der Manuskripte, wie sie zum Beispiel J. E. HOFMANN bei der Abfassung seiner *Studien zur Vorgeschichte des Prioritätsstreites zwischen Leibniz und Newton um die Entdeckung der höheren Analysis* (Abh. der Preuss. Akademie der Wissenschaften 1943) nicht oder nur in späteren Auszügen zur Verfügung standen.

Der erste Band bringt vor allem Notizen und Anmerkungen, die sich der 22jährige Student bei der Lektüre zeitgenössischer Mathematiker (Descartes, Oughtred, Schooten, Huygens, Vieta, Wallis u. a.) machte, sowie seine frühesten eigenen Studien zur Fluxionenrechnung, so vor allem das Manuskript, dem der Herausgeber den Titel *The October 1666 Tract on Fluxions* gibt. Es ist erstaunlich, verfolgen zu können, wie die Erfindung der Infinitesimalrechnung damals in der Luft lag, welch reichhaltiges Material an Tatsachen und Methoden dem jungen Forscher schon zur Verfügung stand. So war ihm der *Inhalt* der Formel

$$\int_0^x \frac{dx}{\cos x} = \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

bereits 1665 bekannt. Auf Seite 475 skizziert der Herausgeber eine Geschichte dieses Integrals.

Trotz ungefähr gleichen Umfangs ist der Inhalt des zweiten Bandes kleiner, denn alle lateinischen Schriften werden als Paralleltexte lateinisch und in englischer Übersetzung mit modernisierten Formeln wiedergegeben. Der mathematische Gehalt der Arbeiten ist aber nicht geringer, so findet sich hier die erste Aufzählung der Kurven dritter Ordnung, von NEWTON bis 1704 zurückbehalten, in der er 58 verschiedene Formen unterscheidet (gegenüber 72 im Jahre 1704). Ferner seien erwähnt erste Untersuchungen über die mechanische Erzeugung von Kegelschnitten und höherer algebraischer Kurven sowie die Abhandlung *De Analysi per Aequationes numero terminorum infinitas* (1669), die erst 1711 mit Zustimmung Newtons veröffentlicht wurde. Hier erscheinen zum erstenmal in der abendländischen Literatur die Reihen für $\sin x$ und $\cos x$.

Die Edition ist hervorragend. In jahrelanger Kleinarbeit hat der Herausgeber jede Einzelheit abgeklärt und erläutert. Zu jedem Abschnitt gibt eine Einleitung die biographischen und historischen Zusammenhänge. Die zahlreichen Fussnoten erleichtern die Lektüre ausserordentlich, ja durch sie wird sie dem Ungeübten erst ermöglicht. Figuren sind auf der Seite eingesetzt, wo sie gebraucht werden, auch wenn sie mehrfach wiederholt werden müssen. Die beigegebenen Tafeln zeigen die Schwierigkeiten, die schon bei der Entzifferung der nicht für den Druck bestimmten Manuskripte auftreten. Um Newtons Bemerkungen zu KINCKHUYSENS *Algebra* (1670) ins richtige Licht zu setzen, wird diese in der lateinischen Übersetzung von MERCATOR auf 70 Seiten vollumfänglich wiedergegeben.

Das grossartige Werk ist für den interessierten Mathematiker ein anregendes Lesebuch, für den Historiker der Mathematik ein unentbehrliches Hilfsmittel. Mit dieser Ausgabe setzt England seinem grossen Sohn ein prächtiges Denkmal. W. LÜSSY