

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 23 (1968)
Heft: 3

Artikel: Über Dreiecke
Autor: Kopfermann, K.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-26029>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 23

Heft 3

Seiten 49–72

10. Mai 1968

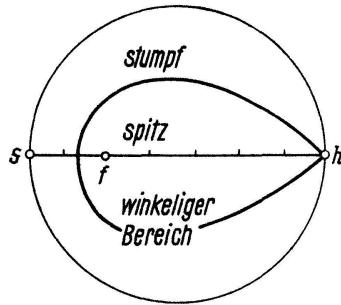
Über Dreiecke

Einleitung

Die Flächeninhaltsformel für Fusspunkt Dreiecke und eine Formel für die Abstandssummen beliebiger Punkte von den Dreiecksseiten sind nebst meistens bekannten Konsequenzen in den ersten drei Paragraphen aufgeführt.

Im vierten Paragraphen gelingt es, die in der Dreiecksgeometrie wichtigen Quotienten $p = r/R$ (r Inkreis-, R Umkreisradius) und $q = F_h/F$ (F_h Flächeninhalt des Höhenfusspunkt Dreiecks, F Flächeninhalt des Dreiecks selbst) zu charakterisieren. Es zeigt sich, dass man alle gegenüber Kongruenz und Ähnlichkeit invarianten Dreiecksgrößen mit Hilfe von p und q darstellen kann.

Im fünften Paragraphen werden diese Ergebnisse benutzt, um den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w in bezug auf die Schnittpunkte der Schwerelinien und der Höhen s bzw. h zu lokalisieren. *Für Dreiecke, die nicht gleichseitig sind, liegt w stets in dem punktierten Kreis mit $|s - h|$ als Durchmesser, der durch s und h läuft, wobei der Mittelpunkt des FEUERBACHkreises f ausgelassen ist.* Diese Bedingung ist auch hinreichend, d.h. jeder Punkt in diesem Kreis ist in einem geeigneten Dreieck Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Das Dreieck ist durch diese Bedingung eindeutig bestimmt.



Im sechsten Paragraphen wird gezeigt, dass man im allgemeinen ein Dreieck nicht aus den drei Schnittpunkten s , h und w (mit Zirkel und Lineal) konstruieren kann. Bei festgehaltenen s und h liegen die Schnittpunkte w sowohl der konstruierbaren als auch der nicht konstruierbaren Dreiecke in dem Kreis über s h dicht.

Die ersten drei Paragraphen und die bekannte Tatsache, dass man ein Dreieck nicht generell aus s , h und w konstruieren kann, sind lediglich dargestellt, um zu zeigen, wie man mit den Mitteln der elementaren Vektorrechnung die Ergebnisse

zügig bekommt. Die Vorteile der Vektorrechnung, die heutzutage immer mehr Eingang in die Schulmathematik findet, liegen auf der Hand. Lästige Fallunterscheidungen werden überflüssig und Konstruierbarkeitsfragen werden direkt zugänglich.

Von den mannigfachen Anwendungen sind nur ein paar aufgeführt. Z. B. bekommt man scharfe Abschätzungen der gegenüber Kongruenz und Ähnlichkeit invarianten Dreiecksgrößen aus den Abschätzungen (**) des vierten Paragraphen.

1. Elementares¹⁾

Ein Dreieck ist ein geordnetes Paar (\mathbf{a}, \mathbf{b}) zweier linear unabhängiger Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} . Der relative Flächeninhalt des durch die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Parallelogramms ist $F = \mathbf{a}_\perp \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{b}_\perp \cdot \mathbf{a}$. Dabei sind \mathbf{a}_\perp und \mathbf{b}_\perp die auf \mathbf{a} bzw. \mathbf{b} senkrecht stehenden Vektoren, die dieselben Längen a bzw. b wie \mathbf{a} und \mathbf{b} haben und mit \mathbf{a} bzw. \mathbf{b} positiv orientiert sind. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit (evtl. nach Umorientierung von (\mathbf{a}, \mathbf{b})) $F > 0$ voraussetzen.

Die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten, der Schwerelinien, der Höhen und der Winkelhalbierenden ergeben sich der Reihe nach zu

$$\mathbf{m} = \frac{b^2 \mathbf{a}_\perp - a^2 \mathbf{b}_\perp}{2F}, \quad \mathbf{s} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3}, \quad \mathbf{h} = -\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{F} \mathbf{c}_\perp, \quad \mathbf{w} = \frac{\mathbf{a} \mathbf{b} + \mathbf{b} \mathbf{a}}{U}. \quad (1)$$

Dabei ist $\mathbf{c} := \mathbf{b} - \mathbf{a}$ und $U := a + b + c$ gesetzt.

Für den Umkreisradius $R := |\mathbf{m}|$ und den Inkreisradius $r := \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_\perp / a$ bekommt man sofort

$$R = \frac{abc}{2F}, \quad r = \frac{F}{U}. \quad (2)$$

Die Punkte \mathbf{m} , \mathbf{s} , \mathbf{h} und der Mittelpunkt \mathbf{f} des FEUERBACHkreises liegen auf der EULERSchen Geraden, und es gilt

$$\mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{m}, \quad 2\mathbf{f} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{m}, \quad (3)$$

woraus sich sofort

$$3(\mathbf{s} - \mathbf{m}) = \mathbf{h} - \mathbf{m}, \quad 2(\mathbf{f} - \mathbf{m}) = \mathbf{h} - \mathbf{m} \quad (3')$$

ergibt. Die Punkte \mathbf{h} , \mathbf{f} , \mathbf{s} , \mathbf{m} stimmen genau dann überein, wenn schon zwei von ihnen übereinstimmen, und genau dann ist das Dreieck gleichseitig.

Zur Rechentechnik seien noch die folgenden Formeln notiert: sofort einzusehen ist $F \mathbf{p}_\perp = \mathbf{a} \cdot \mathbf{p} \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{p} \mathbf{a}$ für beliebige Punkte \mathbf{p} . Für insbesondere $\mathbf{p} = \mathbf{a}$ erhält man $F \mathbf{a}_\perp = a^2 \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{a}$, Multiplikation mit \mathbf{b} liefert $F^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$, Multiplikation mit \mathbf{c} liefert $F^2 = a^2 \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, analog bekommt man $F^2 = -b^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, durch Addition ergibt sich $2F^2 = a^2 \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - b^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + c^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

2. Fusspunkt Dreiecke²⁾

Ist \mathbf{p} ein beliebiger Vektor, so bilden die Projektionen der Endpunkte von \mathbf{p} auf die Seiten des Dreiecks (\mathbf{a}, \mathbf{b}) ein Dreieck mit den Ecken

$$\mathbf{n}^a := \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}}{a^2} \mathbf{a}, \quad \mathbf{n}^b := \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}}{b^2} \mathbf{b}, \quad \mathbf{n}^c := \mathbf{a} + \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}}{c^2} \mathbf{c}.$$

¹⁾ Siehe auch den ersten Teil meiner Arbeit «Duale Basis und dualer Vektorraum», Math. Phys. Sem. Ber. XIV, 1 (1967) 89-98.

²⁾ Siehe auch die Darstellung von KOOISTRA [2].

Der relative Flächeninhalt $F_p = n_\perp^c \cdot n^b + n_\perp^b \cdot n^a + n_\perp^a \cdot n^c$ des Dreiecks ($n^c - n^a$, $n^b - n^a$) berechnet sich wegen $a^2 b^2 c^2 / F^2 F_p = -F^2 p^2 + 2 F^2 m \cdot p$ zu

$$F_p = \frac{p \cdot (2m - p)}{4R^2} F. \quad (4)$$

Wegen $p \cdot (2m - p) = m^2 - (p - m)^2$ hat man

$$4R^2 \frac{F_p}{F} = R^2 - (p - m)^2.$$

Also ist das Fußpunkt Dreieck dem Dreieck (a, b) gleichorientiert, wenn $|p - m| < R$, entgegengesetzt orientiert, wenn $|p - m| > R$ ist. Im Falle $|p - m| = R$ hat man degenerierte Fußpunkt Dreiecke. Man sieht ferner, dass für Fußpunkt Dreiecke stets $4F_p/F \leq 1$ ist, insbesondere gilt $4F_p/F = 1$ genau dann, wenn $p = m$ ist.

Für $p = h$ gilt $F^2 h \cdot (2m - h) = -2a \cdot b b \cdot c c \cdot a$, also

$$F_h = -2F \frac{a \cdot b b \cdot c c \cdot a}{a^2 b^2 c^2}. \quad (4')$$

Zusammen mit dem Vorhergehenden ist also $|h - m| < R$ genau dann, wenn das Dreieck (a, b) spitzwinkelig, $|h - m| = R$, genau dann, wenn es rechtwinkelig, $|h - m| > R$ genau dann, wenn es stumpfwinkelig ist. Außerdem hat man nach (4') stets $-2 < F_h/F$; detaillierter ergibt sich mit $q := F_h/F$ sofort: $q = 1/4$ für gleichseitige, $0 < q \leq 1/4$ für spitzwinkelige, $q = 0$ für rechtwinkelige und $-2 < q < 0$ für stumpfwinkelige Dreiecke.

Die Länge der Seite $n^b - n^a$ ergibt sich wegen

$$a^2 b^2 \left(\frac{b \cdot p}{b^2} b - \frac{a \cdot p}{a^2} a \right)^2 = F^2 p^2 \text{ zu } \frac{F}{a b} |p|.$$

Analog bekommt man für die anderen Seitenlängen des Fußpunkt Dreiecks (F/ac) $|p - a|$ und (F/bc) $|p - b|$. Also ergibt sich für den Umfang des Fußpunkt Dreiecks

$$U_p = F \left(\frac{|p|}{ab} + \frac{|p - a|}{ac} + \frac{|p - b|}{bc} \right). \quad (5)$$

Für insbesondere $p = h$ erhält man

$$U_h = \frac{|\alpha \cdot b| c}{ab} + \frac{|\alpha \cdot c| b}{ac} + \frac{|\beta \cdot c| a}{bc}.$$

Für spitzwinkelige Dreiecke ist dann $abc U_h = 2F^2$ und für stumpfwinkelige ($\gamma > \pi/2$)³⁾ $abc U_h = -2a \cdot c b \cdot c$, also mit (2)

$$U_h = \begin{cases} \frac{F}{R} \left(\text{falls } \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2} \right) \\ -\frac{a \cdot c b \cdot c}{F R} \left(\text{falls } \gamma > \frac{\pi}{2} \right) \end{cases} \quad (5')$$

Den Inkreisradius $\varrho := |F_h|/U_h$ bekommt man aus (4') und (5') mit $q = F_h/F$ zu

$$\varrho = \begin{cases} q R \left(\text{falls } \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2} \right) \\ \frac{|\alpha \cdot b|}{2R} \left(\text{falls } \gamma > \frac{\pi}{2} \right) \end{cases} \quad (6)$$

³⁾ Die Winkel α, β, γ seien der Reihe nach durch die Produkte $b \cdot c, -c \cdot a, a \cdot b$ definiert.

Man sieht hier einen grundsätzlichen Unterschied zwischen spitz- und stumpfwinkeligen Dreiecken.

Wir werden später sehen, dass der Quotient $q = F_h/F$, nicht der Inkreisradius des Höhenfusspunkttdreiecks, entscheidend ist. In der Tat wird sich herausstellen, dass man alle gegenüber Ähnlichkeit und Kongruenz invarianten «Dreiecksgrößen» durch die Quotienten $q = F_h/F$ und $\rho := r/R$ darstellen kann.

3. Summen der Seitenabstände⁴⁾

Die (orientierten) Abstände eines Vektors p von den Seiten eines Dreiecks (a, b) sind

$$p \cdot \frac{a_\perp}{a}, \quad -p \cdot \frac{b_\perp}{b}, \quad (p - a) \cdot \frac{c_\perp}{c}.$$

Ihre Summe $s(p)$ ergibt

$$s(p) = p \cdot \left(\frac{a_\perp}{a} - \frac{b_\perp}{b} + \frac{c_\perp}{c} \right) + \frac{F}{c}.$$

Die Vektoren mit konstanter Summe $s(p)$ bilden also Geraden, die zu $a/a - b/b + c/c$ parallel sind. Wegen $w - m = -R(a_\perp/a - b_\perp/b + c_\perp/c)$ und $s(m) = R + r$ erhält man für beliebige Dreiecke

$$s(p) = -\frac{1}{R} (p - m) \cdot (w - m) + R + r. \quad (7)$$

Zusammen mit (3') ergibt sich daraus

$$3(s(s) - s(m)) = s(h) - s(m), \quad 2(s(f) - s(m)) = s(h) - s(m). \quad (7')$$

Die Gleichung (7) hat einige Konsequenzen. Wegen $s(w) = 3r$ bekommt man sofort $(w - m)^2 = R^2 - 2Rr$. Aus $|w - f| = (1/2)R - r$ und $(h - m)^2 = R^2 - 4qR^2$ (das ist Gleichung (4)) erhält man mit $q = F_h/F$

$$(h - m) \cdot (w - m) = R^2 - r^2 - Rr - qR^2 \quad (8)$$

und $(w - h)^2 = 2r^2 - 2qR^2$. Zusammen haben wir also (8) und

$$(w - m)^2 = R^2 - 2Rr, \quad (h - m)^2 = R^2 - 4qR^2, \quad (w - h)^2 = 2r^2 - 2qR^2. \quad (9)$$

Nun gibt es sicher einen Punkt $m + k(h - m)$ auf der EULERSchen Geraden, so dass $s(w) = s(m + k(h - m))$ ist. Wäre das nicht der Fall, so müsste nämlich nach (7) $(h - m) \cdot (w - m) = 0$ und $s(w) \neq R + r$ sein. Wegen $r \leq (1/2)R$ und $q \leq 1/4$ ist das Produkt $(h - m) \cdot (w - m)$ nie negativ, und es verschwindet nur für $r = (1/2)R$ und $q = 1/4$ (gleichseitiges Dreieck), und dann ist $s(w) = 3r = R + r$. Das ist ein Widerspruch.

Nach (7) und (8) bekommt man

$$\frac{1}{k} = \frac{R^2 - r^2 - Rr - qR^2}{R^2 - 2Rr} \quad \left(r \neq \frac{1}{2}R \right). \quad (10)$$

Das ergibt für die Punkte auf der EULERSchen Geraden

$$s(m + \lambda(h - m)) = R + r - \frac{\lambda}{k}(R - 2r) \quad \left(r \neq \frac{1}{2}R \right).$$

⁴⁾ Siehe auch BERNSTEIN und STEINIG, *Wissenswertes um das Dreieck*, El. Math. 19, 8 (1964) STEINIG, *Comparison of Two Inequalities for the Triangle*, Acta Math. Sc. Hung. 16, 19-22 (1965)

Da für Dreiecke, die nicht gleichseitig sind, stets $k > 0$ ist, fällt $s(p)$ auf der EULER-schen Geraden von m nach h hin monoton.

Zusammen mit (10) hat man auf der EULERSchen Geraden explizit

$$s(\mathfrak{m} + \lambda(\mathfrak{h} - \mathfrak{m})) = \lambda \frac{r^2}{R} + (1 + \lambda)r + (1 - \lambda)R + \lambda qR,$$

woraus man für $\lambda = 0, 1/3, 1/2, 1$ der Reihe nach die Summen für \mathfrak{m} , \mathfrak{s} , \mathfrak{f} und \mathfrak{h} erhält.

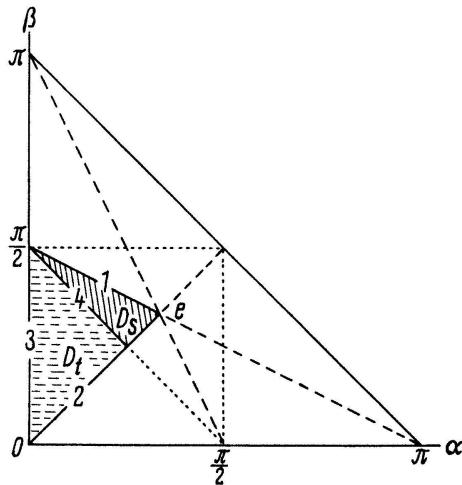
4. Die Quotienten r/R und $F_{\mathfrak{h}}/F$

Für beliebige Dreiecke mit den Winkeln α , β und γ gilt

$$p := \frac{r}{R} = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \quad q := \frac{F \mathfrak{h}}{F} = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma. \quad (11)$$

Also sind p und q gegenüber Permutationen der Winkel invariant.

Wir wollen ohne Einschränkung der Allgemeinheit $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma$, also $0 < \alpha \leq \beta$ und $\alpha + 2\beta \leq \pi$ voraussetzen. Seien $D := \{(\alpha, \beta) : 0 < \alpha < \beta, \alpha + 2\beta < \pi\}$, $D_s := \{(\alpha, \beta) : 0 < \alpha < \beta, \alpha + 2\beta < \pi, \alpha + \beta > \pi/2\}$, $D_t := \{(\alpha, \beta) : 0 < \alpha < \beta, \alpha + \beta < \pi/2\}$ Gebiete mit den (offenen) Rändern $\mathfrak{d}_1 := \{(\alpha, \beta) : 0 < \alpha < \beta, \alpha + 2\beta = \pi\}$, $\mathfrak{d}_2 := \{(\alpha, \beta) : 0 < \alpha = \beta < \pi/3\}$, $\mathfrak{d}_3 := \{(\alpha, \beta) : \alpha = 0, 0 < \beta < \pi/2\}$, $\mathfrak{d}_4 := \{(\alpha, \beta) : 0 < \alpha < \beta, \alpha + \beta = \pi/2\}$.



Das Gebiet D besteht aus den Winkelpaaren der Dreiecke mit $0 < \alpha < \beta < \gamma$. Darunter sind D_s die Winkelpaare der spitzwinkeligen, D_t die der stumpfwinkeligen und D_4 die der rechtwinkeligen Dreiecke. Auf den Rändern d_1 und d_2 liegen die Winkelpaare der gleichschenkeligen, nicht gleichseitigen Dreiecke, und $e := \{\alpha = \beta = \pi/3\}$ entspricht dem gleichseitigen Dreieck.

Die durch (11) beschriebene Abbildung $A: (\alpha, \beta) \rightarrow (p, q)$ (dabei sei stets $\gamma := \pi - (\alpha + \beta)$ gesetzt) ist in D regulär (die Funktionaldeterminante der Abbildung verschwindet nirgends) und im abgeschlossenen Gebiet \bar{D} stetig. Das Bild $D' := A(D)$ wird also vom Bild des Randes berandet.

Zunächst hat man auf dem Rand $\mathfrak{d}_1 \cup e \cup \mathfrak{d}_2$

$$p = 4 \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin \frac{\pi - 2\beta}{2} = 2(1 - \cos \beta) \cos \beta \quad (0 < \beta < \frac{\pi}{2})$$

$$q = 2 \cos^2 \beta \cos(\pi - 2\beta) = 2(1 - 2\cos^2 \beta) \cos^2 \beta$$

Eliminiert man $\cos\beta$, so erhält man

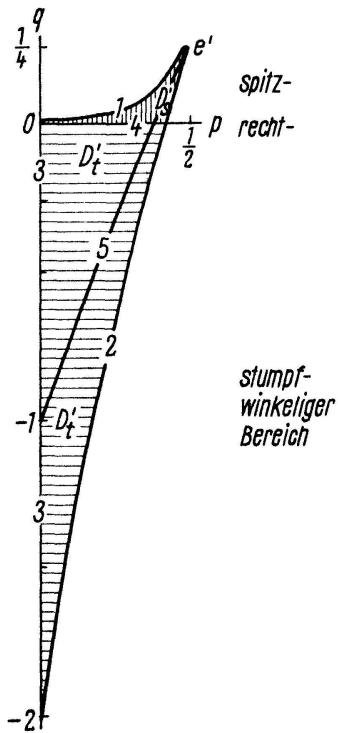
$$q = 3p - p^2 - 1 \pm \sqrt{1 - 2p^3} \quad \left(0 < p \leq \frac{1}{2}\right). \quad (12)$$

Auf dem Rand \mathfrak{d}_3 hat man $q = 0, -2 < p < 0$.

Das Bild $D' = A(D)$ besteht also genau aus den Punkten (p, q) mit

$$3p - p^2 - 1 - \sqrt{1 - 2p^3} < q < 3p - p^2 - 1 + \sqrt{1 - 2p^3} \quad \left(0 < p < \frac{1}{2}\right). \quad (12')$$

Das Bild $\mathfrak{d}'_4 := A(\mathfrak{d}_4)$ besteht aus den Punkten $0 < p < \sqrt{2} - 1, q = 0$. Damit hat man auch im Bildbereich die Trennung für spitz- und stumpfwinkelige Dreiecke. Insbesondere ergibt sich für rechtwinkelige Dreiecke stets $r \leq R(\sqrt{2} - 1)$, und zwar $r = R(\sqrt{2} - 1)$ genau für das gleichschenklig-rechtwinkelige Dreieck. Für stumpfwinkelige Dreiecke gilt $r < R(\sqrt{2} - 1)$ generell.



Die Kurve $\mathfrak{d}'_5 := \{(p, q) : q = 3p - p^2 - 1\}$ entspricht genau den Dreiecken, für die $s(w) = s(f)$ ist. Nach (10) hat man nämlich auf \mathfrak{d}'_5 $1/k = 2$, also $k = 1/2$. Oberhalb von \mathfrak{d}'_5 ist $s(w) < s(f)$, unterhalb $s(w) > s(f)$.

Die Abbildung $A: D \rightarrow D'$ ist lokal eineindeutig, da sie regulär ist. Sie ist auch global eineindeutig. Das bekommt man sofort aus allgemeinen Kriterien. Man kann es sich auch, etwas umständlicher, direkt ausrechnen. Die Bildkurven der Strecken $(\beta = \text{const.}) \cap D$ sind nämlich durch

$$q = p^2 \frac{\cos\beta}{1 - \cos\beta} + 2p \cos\beta - 2 \cos^2\beta \quad \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right) \quad (*)$$

parametrisiert. Für verschiedene β sind diese Kurven disjunkt. – Die Eineindeutigkeit der Abbildung bleibt auf dem Rande von D erhalten.

Die Äquivalenzklassen paarweise zueinander ähnlicher oder kongruenter Dreiecke sind also eineindeutig durch die Quotienten $p = r/R$ und $q = F_b/F$ charakterisiert.

Die Klassen kongruenter Dreiecke sind eineindeutig durch r , R und q gegeben, dagegen nicht durch r und R allein.

Alle Dreiecke erfüllen nach (12') die Bedingung

$$3p - p^2 - 1 - \sqrt{1 - 2p}^3 \leq q \leq 3p - p^2 - 1 + \sqrt{1 - 2p}^3, \left(0 < p \leq \frac{1}{2}\right) \quad (**)$$

und zu jedem q , das diese Bedingung mit einem p mit $0 < p \leq 1/2$ erfüllt, gibt es ein bis auf Ähnlichkeit und Kongruenz eindeutig bestimmtes Dreieck, für das $p = r/R$ und $q = Fh/F$ wird. Daraus bekommt man notwendige und hinreichende Bedingungen für beliebige Dreiecksgrößen, die gegenüber Ähnlichkeit und Kongruenz wie etwa F/R^2 , U/R invariant, d.h. durch p und q darstellbar sind. Die explizite Darstellung kann jedoch kompliziert sein. Für U/R bekommt man die einfache Darstellung $U^2/(4R^2) = 2q + (2 + p)^2$. Damit bekommt man sofort aus (**) die Ungleichung

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \leq \frac{U^2}{4}$$

$$\leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr},$$

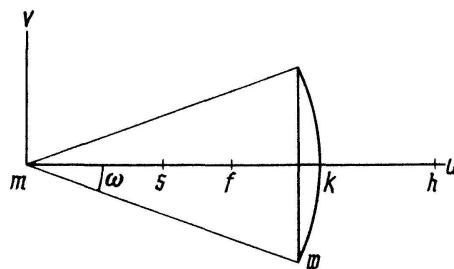
und diese Ungleichung lässt sich nicht mehr verschärfen. Das ist, wie Herr STEINIG freundlicherweise nach den Korrekturen mitteilte, genau ein Ergebnis, das BLUNDON⁵⁾ mit anderen Mitteln bewies.

5. Die Lage von w

In §3 wurde gezeigt, dass es zu jedem Dreieck ein reelles k gibt, für das $s(m + k(h - m)) = s(w)$ ist. Nach (10) hat man für dieses eindeutig bestimmte k , wenn nur das Dreieck nicht gleichseitig ist

$$\frac{1}{k} = \frac{1 - p^2 - p - q}{1 - 2p} > 0 \quad \left(0 < p < \frac{1}{2}\right).$$

Weiter ist durch $\cos \omega := (h - m) \cdot (w - m) / (|h - m| \cdot |w - m|) (> 0)$ ebenfalls für Dreiecke, die nicht gleichseitig sind, ω mit $|\omega| < \pi/2$ bis auf das Vorzeichen eindeutig festgelegt. Man überlegt sich leicht, dass für Dreiecke mit $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma$ stets $\omega \leq 0$, für solche mit $0 < \beta \leq \alpha \leq \gamma$ stets $\omega \geq 0$ ist.



Mit Hilfe von (8) und (9) bekommt man

$$\cos \omega = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{1 - 2p}{1 - 4q}} \quad \left(0 < p < \frac{1}{2}\right).$$

Mit $K := 4/k - 3$ hat man sogar

$$K = 2p + \frac{1 - 4q}{1 - 2p}, \quad \cos \omega = \frac{1}{k \sqrt{K - 2p}} \quad \left(0 < p < \frac{1}{2}, \quad k = \frac{4}{K + 3}\right). \quad (13)$$

⁵⁾ Siehe auch BLUNDON, *Inequalities Associated with the Triangle*, Canad. Math. Bull. 8, 615-626 (1965).

Hieraus sieht man sofort, dass die durch (13) definierte Abbildung B von (p, q) in (K, ω) in D' eineindeutig ist. Wir wollen jetzt das Bildgebiet von D' in rechtwinkeligen Koordinaten

$$u := k \cos^2 \omega, \quad v^2 := k^2 \cos^2 \omega (1 - \cos^2 \omega)$$

beschreiben.

Zunächst rechnet man leicht nach, dass die Kurven $K = \text{const.}$ das Gebiet D' in einem zusammenhängenden Kurvenbogen mit

$$0 < 2p < 1 = \left(\frac{K-5}{4} \right)^2 \quad (1 < K < 9) \quad (14)$$

schneiden. Nach (13) steigt $\cos \omega$ auf diesem Bogen monoton mit p . Also hat man auf dem Durchschnitt $(K = \text{const.}) \cap D'$

$$\frac{1}{k \sqrt{K}} < \cos \omega < 1 \quad \left(1 < K < 9, \ k = \frac{4}{K+3} \right) \quad (14')$$

Es genügt also wieder zur Beschreibung des Bildes $D'' := B(D')$ der Abbildung $B: (p, q) \rightarrow (u, v)$, die Bilder der Randkurven zu beschreiben.

Zunächst hat man auf der Randkurve $\mathfrak{d}'_1 \cup \mathfrak{d}'_2$ nach dem Vorhergehenden stets $\cos \omega = 1$ für $1 < K < 5$ und $5 < K < 9$ oder $1 > u > 1/2$ und $1/2 > u > 1/3$. Das bedeutet nichts anderes, als dass die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden gleichschenkliger Dreiecke auf der EULERSchen Geraden liegen, und zwar genau zwischen s und h , f ausgelassen, es sei denn das Dreieck ist gleichseitig.

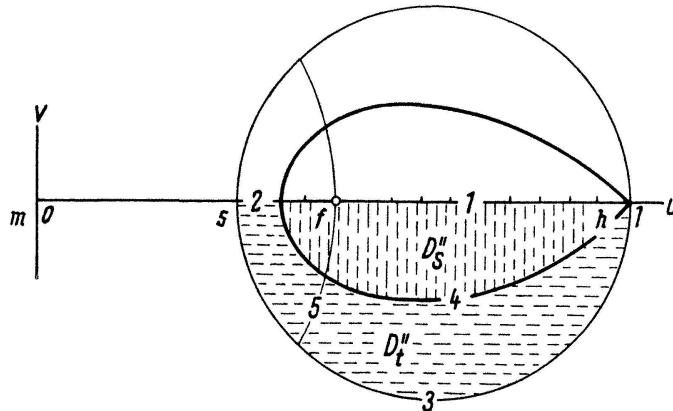
Auf der Randkurve \mathfrak{d}'_3 hat man nach (14) und (14') $\cos \omega = 1/(k \sqrt{K})$ für $1 < K < 9$. Das entspricht der Darstellung

$$u = \frac{1}{k K}, \quad v^2 = \frac{1}{K} - \left(\frac{1}{k K} \right)^2 \quad \left(1 < K < 9, \ k = \frac{4}{K+3} \right)$$

in rechtwinkeligen Koordinaten. Das aber ist nichts anderes als eine Parameterdarstellung des offenen Halbkreisbogens mit der expliziten Darstellung

$$v^2 = \frac{1}{9} - \left(u - \frac{2}{3} \right)^2 \quad \left(\frac{1}{3} < u < 1, \ v < 0 \right). \quad (15)$$

Also ist D'' das Innere des von diesem Bogen und dem Stück $1/3 < u < 1, v = 0$ auf der EULERSchen Geraden begrenzten Gebietes⁶⁾.



Jetzt gelingt es sofort, den spitzwinkeligen Bereich vom stumpfwinkeligen zu trennen. Dazu braucht man nur $\mathfrak{d}''_4 = B(\mathfrak{d}'_4)$ zu berechnen. Auf \mathfrak{d}'_4 hat man $0 < p < \sqrt{2} - 1$,

⁶⁾ Dass w stets in dem genannten Halbkreis liegt, bekommt auch direkt aus (8) und (9).

$q = 0$. Also ist dort $u = 1 - p^2 - p$, $v^2 + u^2 = (1 - 2p)u$. Eliminiert man p , so erhält man

$$v^2 = 2 - u^2 - \sqrt{5 - 4u} \quad (\sqrt{2} - 1 < u < 1). \quad (15')$$

In der Tat hat diese Kurve bei $u = \sqrt{2} - 1$ und $u = 1$ Nullstellen. Ausserhalb dieser Kurve liegen die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden stumpfwinkeliger, innerhalb die der spitzwinkeligen Dreiecke, dabei ist der Punkt $u = 1/2$, $v = 0$ ausgelassen.

Schliesslich ist $\mathfrak{d}_5'' := B(\mathfrak{d}_5')$ sehr einfach durch $s(\mathfrak{w}) = s(\mathfrak{f})$ zu charakterisieren. Dafür bekommt man eine einfache Darstellung.

Die Abbildungen A und B sind auf \bar{D} bzw. $\bar{D}' - e'$ eindeutig. Wir haben also insgesamt:

Zu je drei Punkten \mathfrak{p}_s , \mathfrak{p}_h und \mathfrak{p}_w gibt es genau dann ein Dreieck Δ , für das $\mathfrak{p}_s = s$, $\mathfrak{p}_h = h$ und $\mathfrak{p}_w = w$ ist, wenn entweder

1. *die Punkte \mathfrak{p}_s , \mathfrak{p}_h und \mathfrak{p}_w ein in \mathfrak{p}_w stumpfwinkeliges Dreieck bilden, oder*
2. *\mathfrak{p}_s , \mathfrak{p}_h und \mathfrak{p}_w paarweise verschieden sind, \mathfrak{p}_w auf der Strecke zwischen \mathfrak{p}_s und \mathfrak{p}_h liegt, und $\mathfrak{p}_w \neq \mathfrak{p}_s + (1/4)(\mathfrak{p}_h - \mathfrak{p}_s)$ ist, oder*
3. *$\mathfrak{p}_s = \mathfrak{p}_h = \mathfrak{p}_w$ ist.*

Im ersten Fall ist Δ nicht gleichschenklig, im zweiten Fall nicht gleichseitig, jedoch gleichschenklig, im dritten Fall gleichseitig. In den ersten beiden Fällen ist Δ durch \mathfrak{p}_s , \mathfrak{p}_h und \mathfrak{p}_w bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Das sind reine Existenzaussagen, die nichts über die Konstruierbarkeit der Dreiecke aussagen. In der Tat werden wir sehen, dass sich die Dreiecke Δ nicht stets aus s , h und w konstruieren lassen.

Der hier benutzte Formalismus liefert mehr. Z. B. hat man $u = (1 - p^2 - p - q)/(1 - 4q) \geq 1/2$ genau dann, wenn $2q \geq 2p^2 + 2p - 1$ ist. Mit $U^2/(4R^2) = 2q + (2 + p)^2$ ist das genau dann der Fall, wenn $U^2/(4R^2) \geq 3(p + 1)^2$, also $U \geq 2\sqrt{3}(R + r)$ ist. Das ist ein Ergebnis, das VELDKAMP in [4] hergeleitet hat.

6. Konstruierbarkeitsfragen

Wir wollen uns hier mit der Frage beschäftigen, wann ein Dreieck aus seinen Schnittpunkten der Winkelhalbierenden, der Mittelsenkrechten und der Höhen (mit Zirkel und Lineal) konstruierbar ist.

Wegen (9) sind für nichtgleichseitige Dreiecke $R, p = r/R$ und $q = F_h/F$ stets aus den Punkten m , h und w konstruierbar. Nach §4 ist eine Ähnlichkeitsklasse von Dreiecken eindeutig durch p und q bestimmt ($0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma$). Man kann sie sich durch $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ gegeben denken. Sind also $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ aus p und q konstruierbar, so offenbar sämtliche Dreiecke der Ähnlichkeitsklasse aus den Schnittpunkten m , h und w . Mit diesem Fall werden wir uns zunächst befassen.

Nach S. 54 hat man für $\cos\beta$ die Bedingung

$$q = p^2 \frac{\cos\beta}{1 - \cos\beta} + 2p \cos\beta - 2\cos^2\beta. \quad (*)$$

Man beweist genau so, dass $\cos\alpha$ und $\cos\gamma$ dieselbe Gleichung wie $\cos\beta$ erfüllen. Also sind $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ genau die Nullstellen des kubischen Polynoms

$$P(x) := x^3 + \lambda x^2 + \mu x + \nu \quad (16)$$

mit den aus p und q konstruierbaren Koeffizienten $\lambda := -(p+1)$, $\mu := p^2/2 + p + q/2$, $\nu := -q/2$.

Es ist bekannt, dass das Polynom P genau dann aus p und q konstruierbare Nullstellen besitzt, wenn es über dem Körper $Q(p, q)$ reduzibel ist⁷⁾.

Insbesondere ist für rechtwinkelige Dreiecke $q = 0$, also $\nu = 0$, also $P(x) = (x^2 + \lambda x + \mu) x$ stets reduzibel. Die Nullstelle $x = 0$ entspricht dem rechten Winkel $\gamma = \pi/2$. Weiter sind $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ genau die aus p und q konstruierbaren Nullstellen des quadratischen Polynoms $x^2 + \lambda x + \mu$. Also sind alle rechtwinkeligen Dreiecke stets aus den Schnittpunkten m , h und w konstruierbar.

Durch die übliche Substitution $y := x + \lambda/3$ wird (16) in das Polynom

$$\bar{P}(y) := y^3 + 3\zeta y + 2\eta \quad (16')$$

mit den aus p und q konstruierbaren Koeffizienten $3\zeta = -\lambda^2/3 + \mu$, $2\eta = (2/27)\lambda^3 - \lambda\mu/3 + \nu$ transformiert. Die Nullstellen des Polynoms (16') berechnen sich für nicht-gleichseitige Dreiecke (3 reelle Nullstellen und $\zeta \neq 0$) bekanntlich mit

$$\cos\varphi := \frac{-\eta}{\sqrt{-\zeta^3}}$$

zu

$$y_1 = 2\sqrt{-\zeta} \cos \frac{\varphi}{3}, \quad y_2 = -2\sqrt{-\zeta} \cos \frac{\varphi - \pi}{3}, \quad y_3 = -2\sqrt{-\zeta} \cos \frac{\varphi + \pi}{3}.$$

Da $\cos\varphi$ und die Koeffizienten $\pm 2\sqrt{-\zeta}$ der Nullstellen y_i ($i = 1, 2, 3$) stets aus p und q konstruierbar sind, so sind die Nullstellen y_i genau dann aus p und q konstruierbar, wenn $\cos\varphi/3$ aus p und q konstruierbar ist.

Die Diskriminante $\delta := \zeta^3 + \eta^2$ ist in D' stets negativ (drei verschiedene Nullstellen des Polynoms (16')), sie verschwindet genau für die gleichschenkeligen Dreiecke (mindestens zwei gleiche reelle Nullstellen). Also hat man für die nichtgleichseitigen, gleichschenkeligen Dreiecke ($\zeta \neq 0$) stets $\cos\varphi = \pm 1$. Da die Winkel $\varphi = 0, \pi$ dreiteilbar sind, sind die Nullstellen y_i stets aus p und q konstruierbar. Also sind die nichtgleichseitigen, gleichschenkeligen Dreiecke stets aus m , h , w konstruierbar.

Allgemein ist $\cos\varphi/3$ für eine im Intervall $(-1, 1)$ dichte Teilmenge der $\cos\varphi$ konstruierbar. Die Punktmenge $\{(\rho, q) \in D' : \cos\varphi = -\eta/\sqrt{-\zeta^3}, \cos\varphi/3 \text{ konstruierbar}\}$ liegt in D' dicht, da die Kurven $\zeta^3 \cos^2\varphi + \eta^2 = 0$ das Gebiet D' stetig parametrisieren, und da auf diesen Kurven mit konstruierbaren $\cos\varphi/3$ nur Punkte $(\rho, q) \in D'$ von aus p und q konstruierbaren Winkeln α und β liegen. Mithin liegen erst recht die Punkte $(\rho, q) \in D'$ aller aus p und q konstruierbaren Winkel α und β in D' dicht.

Wir wollen jetzt zeigen, dass auch die Punkte $(\rho, q) \in D'$ derjenigen Winkelpaare $(\alpha, \beta) \in D$, die sich nicht aus p und q konstruieren lassen, in D' dicht liegen. Offenbar genügt es zu zeigen, dass schon die Punkte $(\rho, q) \in D'$ mit rationalen Komponenten ρ und q derjenigen Winkel α und β , die sich nicht (schlechthin) konstruieren lassen, in D' dicht liegen. Da die Koeffizienten λ , μ und ν des Polynoms (16) genau dann rational sind, wenn die p und q es sind, ist das nach dem anfangs zitierten Kriterium genau dann der Fall, wenn das Polynom (16) (mit rationalen Koeffizienten) über den rationalen Zahlen Q irreduzibel ist.

⁷⁾ S. BIEBERBACH [1], § 13. Q sei der Körper der rationalen Zahlen.

Die Koeffizienten des Polynoms (16) erfüllen die Nebenbedingung $\lambda^2 = 2(\mu + \nu) + 1$. Für rationales λ, μ und ν ist P genau dann über \mathbf{Q} reduzibel, wenn es ein $\xi \in \mathbf{Q}$ gibt, so dass das konstante Glied des Polynoms $P(x + \xi)$ verschwindet, also

$$\xi^3 + \lambda \xi^2 + \mu \xi + \nu = 0$$

ist. Da wir uns nur für die Polynome (16) mit drei reellen Nullstellen, die dem Betrage nach kleiner als 1 sind, interessieren, können wir $|\xi| < 1$ annehmen. Die Ebenen

$$E_\xi := \{(\lambda, \mu, \nu) : \xi^3 + \lambda \xi^2 + \mu \xi + \nu = 0\} \subset \mathbf{Q}^3, \quad |\xi| < 1 \quad (18)$$

bestehen also genau aus den Tripeln der rationalen Koeffizienten der über \mathbf{Q} reduziblen kubischen Polynome, die mindestens eine rationale Nullstelle x_0 mit $|x_0| < 1$ besitzen. Aus (18) und der Nebenbedingung $\lambda^2 = 2(\mu + \nu) + 1$ erhält man durch Elimination von μ

$$\nu = \frac{2 \xi}{\xi - 1} Q_\lambda(\xi), \quad Q_\lambda(\xi) = \xi^2 + \lambda \xi + \frac{\lambda^2 - 1}{2}, \quad |\xi| < 1. \quad (19)$$

Die Nullstellen des quadratischen Polynoms $Q_\lambda(\xi) - s$ mit rationalem s sind $\xi = (-\lambda \pm \varkappa)/2$ mit $\varkappa^2 = 2 + 4s - \lambda^2$. Also nimmt Q_λ für rationale ξ genau diejenigen rationalen Zahlen s an, für die die Diskriminante $2 + 4s - \lambda^2$ rationales Quadrat ist. Nach (19) wird dann mit $\xi = (-\lambda \pm \varkappa)/2$

$$2\nu = \frac{\lambda \pm \varkappa}{\lambda \pm \varkappa + 2} (\lambda^2 + \varkappa^2 - 2) \quad |\lambda \pm \varkappa| < 2 \quad (19')$$

für beliebige rationale λ und \varkappa . Damit hat man eine brauchbare Parametrisierung der rationalen Koeffizienten der über \mathbf{Q} reduziblen kubischen Polynome (16), die mindestens eine rationale Nullstelle x_0 mit $|x_0| < 1$ besitzen.

Sei $\Lambda := \{t/\tau : t, \tau \text{ ganzrational, } \tau \text{ Primzahl, } \tau \equiv 3 \pmod{4}, (\tau, t) = 1\}$. Offenbar liegt Λ in \mathbf{Q} dicht, da es unendlich viele Primzahlen τ mit $\tau \equiv 3 \pmod{4}$ gibt. Mit $\lambda \in \Lambda$ und $\varkappa := m/n$ (m, n ganzrational, $(m, n) = 1$) ergibt sich aus (19')

$$2\nu = \frac{t n \pm \tau m}{t n \pm \tau m + 2 \tau n} \cdot \frac{t^2 n^2 + \tau^2 m^2 - 2 \tau^2 n^2}{\tau^2 n^2}.$$

Diese Bruchdarstellung für 2ν braucht nicht gekürzt zu sein. Ist jedoch $(\tau, n) = 1$, so steckt stets das Quadrat $\tau^2 n^2 > 1$ unkürzbar im Nenner. Ist dagegen $n = \bar{n} \tau$, so steckt stets das Quadrat \bar{n}^2 im Nenner. Ist $\bar{n} > 1$, so hat man wieder ein nichttriviales Quadrat unkürzbar im Nenner. Ist dagegen $\bar{n} = 1$, so wird

$$2\nu = \frac{t \pm m}{t \pm m + 2\tau} \cdot \frac{t^2 + m^2 - 2\tau^2}{\tau^2}.$$

Ist τ Teiler von $t \pm m$, so auch von $t \pm m + 2\tau$. Ist τ^2 Teiler von $t \pm m$, so sicher nicht von $t \pm m + 2\tau$ ($\tau \neq 2$). In diesem Fall hat man $t \pm m = l \tau^2$. Aus $|\lambda \pm \varkappa| = |t/\tau \pm m/\tau| = |l| \tau < 2$ mit ganzrationalem l folgt dann $l = 0$, also $\nu = 0$ ($q = 0$). Dieser Fall macht uns keine Schwierigkeiten. Weiter ist τ Teiler von $t^2 + m^2 - 2\tau^2$ genau dann, wenn τ Teiler von $t^2 + m^2$ ist. Wäre das der Fall, so müsste $-t^2$ quadratischer Rest mod τ , also auch -1 quadratischer Rest mod τ sein. Das geht nicht, da wir τ als $\tau \equiv 3 \pmod{4}$ gewählt haben⁸⁾. Also steckt auch im Falle $n = \tau$ ein nichttriviales Quadrat unkürzbar im Nenner.

⁸⁾ Nach dem ersten Zusatz zum quadratischen Reziprozitätsgesetz.

Insgesamt haben wir also bewiesen, dass für alle $\lambda \in \Lambda$ stets $2\nu (\nu \neq 0)$ im Nenner ein unkürzbares nichttriviales Quadrat enthält. Also gibt es auf jeder Geraden $\lambda = t/\tau = \text{const.}$ eine dichte Punktmenge, für die (16) irreduzibel ist. Da Λ in \mathbf{Q} dicht liegt, haben wir eine dichte Menge rationaler λ, ν und damit auch eine in D' dichte Menge rationaler (p, q) gefunden, für die (16) über den rationalen Zahlen irreduzibel ist. Für diese Koeffizienten hat (16) keine konstruierbaren Nullstellen.

Die Punkte $(p, q) \in D'$ mit rationalen Komponenten, aus denen sich die zugehörigen Winkel α, β nicht konstruieren lassen, liegen also in D' dicht, erst recht sämtliche Punkte $(p, q) \in D'$, aus denen sich die zugehörigen Winkelpaare $(\alpha, \beta) = A^{-1}(p, q)$ nicht konstruieren lassen.

Insgesamt wissen wir also bisher, dass die Punkte $(p, q) \in D'$, aus denen sich die $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ konstruieren, wie nicht konstruieren lassen, in D' dicht liegen. Weiter liegen die Tripel (p, q, R) mit aus p und q konstruierbarem Umkreisradius R in $D' \times \mathbf{R}$ dicht, da die (schlechthin) konstruierbaren Radien R in den reellen Zahlen \mathbf{R} dicht liegen. Diese Voraussetzung ist etwa für alle p, q und R mit festem und konstruierbaren $|\mathbf{h} - \mathbf{m}|$ erfüllt. Also liegen die Tripel (p, q, R) derjenigen Dreiecke, die sich aus p, q, R konstruieren, wie nicht konstruieren lassen, in $D' \times \mathbf{R}$ dicht. Bei festem $|\mathbf{h} - \mathbf{m}|$ gilt das entsprechend für die Schnittpunkte $\mathbf{w} \in D''$, q.e.d.

K. KOPFERMANN, Hannover

LITERATUR

- [1] BIEBERBACH, LUDWIG, *Theorie der geometrischen Konstruktionen*, Basel 1952.
- [2] KOOISTRA, *Dreiecksungleichungen*, El. Math. 15, 79–80 (1960).
- [3] STEINIG, J., *Inequalities concerning the Inradius and Circumradius of a Triangle*, El. Math. 18, 127–131 (1963).
- [4] VELDKAMP, G. R., *Note on a Paper by J. STEINIG*, El. Math. 19, 87–88 (1964).

Kleine Mitteilungen

Area of the Union of Disks

At the Conference on Geometry in Eger in 1953, SZELE set forth a problem, which was written to him by KNESER. The problem, which has become well known since then, is the following. A set of n circular disks is given on the plane. Change the position of the disks in such a way that their distances from each other decrease. (The term 'it decreases' will always be used in the weak sense, i.e. it means that 'it does not increase'.) Is it true that the area covered by the disks decreases? The obvious conjecture is *yes*, but this has not been proved yet, and the answer seems to be rather difficult.

In this note a partial solution of this problem will be presented. Namely it will be proved (theorem 2) that if the disks are congruent and they can be moved *continuously* in such a way that the distance of any two centres decreases continuously, then the area covered by the disks also decreases. The proof is based on a similar statement about the perimeter length of the union of disks.

Let $P_i(t)$ be points on the plane for $i = 1, 2, \dots, n$ and $0 \leq t \leq 1$. Suppose $P_i(t)$ is a continuous function of t and $S(P_i(t), P_j(t))$ is a decreasing function of t for every pair i, j , $1 \leq i < j \leq n$. Denote by $U(t)$ the union of unit disks with centres $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$.

Theorem 1. *If $p(t)$ denotes the perimeter length of $U(t)$, then $p(t)$ is decreasing in $[0, 1]$.*