

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 23 (1968)
Heft: 1

Artikel: Der Aufbau der Kongruenzgruppe im Raum durch Spiegelungen
Autor: Jeger, M.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-26024>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 23

Heft 1

Seiten 1–24

10. Januar 1968

Der Aufbau der Kongruenzgruppe im Raum durch Spiegelungen¹⁾

Ein ungenügendes Raumvorstellungsvermögen ist für das Erlernen ingenieurtechnischer Disziplinen ein erhebliches Hindernis, ganz abgesehen davon, dass ein gewisser Grad an Raumvorstellungsvermögen einen wesentlichen Teil der elementaren mathematischen Kultur ausmacht, die der Schüler beim Verlassen der allgemeinbildenden Schule mitbekommen haben sollte.

P. S. ALEXANDROW

Diesem Zitat wäre noch beizufügen, dass sich zum Beispiel auch die Naturwissenschaften und die Medizin intensiv mit dem 3dimensionalen Raum befassen.

Die Vermittlung einer gewissen Raumerfahrung gehört zu den obligatorischen Aufgaben des mathematischen Unterrichtes. Einige extreme Reformprogramme, die gegenwärtig diskutiert werden, fördern zwar eher das Gegenteil, nämlich die totale Raumbblindheit der Schüler. Der vorliegende Beitrag möchte auf ein Gebiet der Stereometrie aufmerksam machen, das auf der Schule in ganz besonderem Masse geeignet ist, ein Raumerlebnis zu vermitteln. Die darin aufgeworfenen Grundgedanken der *Spiegelungsgeometrie* wurden um die Jahrhundertwende von den beiden Geometern J. HJELMSLEV und H. WIENER [6] entwickelt. In den letzten Jahrzehnten hat sie F. BACHMANN wieder aufgenommen und mit seinen Schülern zu einem kraftvollen Instrument der geometrischen Grundlagenforschung ausgebaut [1]. Diese Arbeiten sind auf das zunehmende Interesse der Schulmathematiker gestossen, wobei die schulische Verwertung zwar bis jetzt auf die Planimetrie beschränkt blieb. Mit den Ideen der Spiegelungsgeometrie kann aber auch der Stereometrieunterricht aus der gegenwärtigen Erstarrung herausgeführt werden.

Der traditionelle Geometrieunterricht an den höheren Schulen erschöpft sich im wesentlichen in einer ausgedehnten Planimetrie und in Körperberechnungen. Wo zusätzlich eigentliche Raumgeometrie betrieben wird, muss diese meist für axiomatische Betrachtungen herhalten und das Resultat ist für die Mehrzahl der Schüler ein Leerlauf im Trivialen. Zwar kann die darstellende Geometrie in reichem Masse Raum-

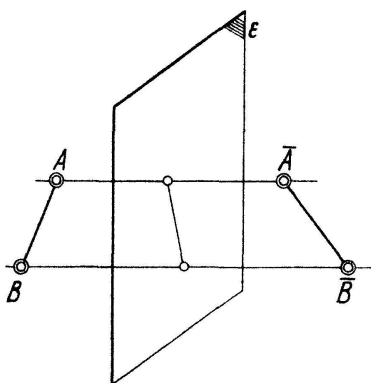
¹⁾ Für den Druck bearbeitete Fassung eines Vortrages, gehalten in der Mathematischen Vereinigung Bern am 11. 12. 1964 und an der Tagung zur Didaktik des mathematischen Gymnasialunterrichtes in Oberwolfach, Herbst 1965.

gefühl und Raumerfahrung vermitteln, wenn sie auch wirklich zu dieser Aufgabe herangezogen wird und nicht in ein intellektuelles technisches Zeichnen ausartet. Es wäre deshalb zu wünschen, dass die darstellende Geometrie dort wo sie im Lehrplan figuriert, wieder vermehrt in den Dienst der Mathematik gestellt wird.

Die gruppentheoretische Ausrichtung der Schulgeometrie liegt ganz im Rahmen jener Reformprogramme, welche die Strukturen stärker hervorkehren wollen. Selbstverständlich kann der mathematische Schulunterricht nur auf ein paar einfache Grundstrukturen eingehen. Zu diesen gehört offensichtlich die Gruppenstruktur, die wohl am natürlichsten in der Geometrie eingeführt und motiviert werden kann.

1. Ebenenspiegelung und allgemeine Kongruenzabbildung im Raum

Abbildungen werden im folgenden mit grossen griechischen Buchstaben bezeichnet. Für die Zusammensetzung zweier Abbildungen Φ und Ψ in der Reihenfolge *zuerst* Φ *und dann* Ψ wird die Schreibweise $\Phi \circ \Psi$ verwendet.



Figur 1

Der spiegelsymmetrische Aufbau der räumlichen Kongruenzgruppe geht von der *Ebenenspiegelung* als Grundabbildung aus. Die Spiegelung an der Ebene ε ist eine eindeutige Abbildung des Raumes auf sich; zugeordnete Punkte A und \bar{A} liegen auf einem Lot zu ε und zwar so, dass ε die Verbindungsstrecke von A und \bar{A} halbiert. Wir bezeichnen diese Abbildung mit Σ_ε .

Offensichtlich ist Σ_ε eine *involutorische Abbildung*, d.h. eine von der Identität I verschiedene Abbildung, für die

$$\Sigma_\varepsilon \circ \Sigma_\varepsilon = I \iff \Sigma_\varepsilon^{-1} = \Sigma_\varepsilon$$

gilt. Bei Σ_ε sind alle Punkte von ε Fixpunkte. In jeder Normalebene zu ε erzeugt Σ_ε eine ebene Geradenspiegelung²⁾; man schliesst hieraus, dass Σ_ε die Länge einer Strecke invariant lässt.

Definition: Jedes endliche Produkt aus Ebenenspiegelungen

$$\Omega = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \dots \circ \Sigma_\omega$$

heisst eine Kongruenzabbildung des Raumes.

²⁾ Geradenspiegelung der ebenen Geometrie. Dies ist die Grundabbildung beim spiegelsymmetrischen Aufbau der ebenen Kongruenzgruppe. Vgl. [3].

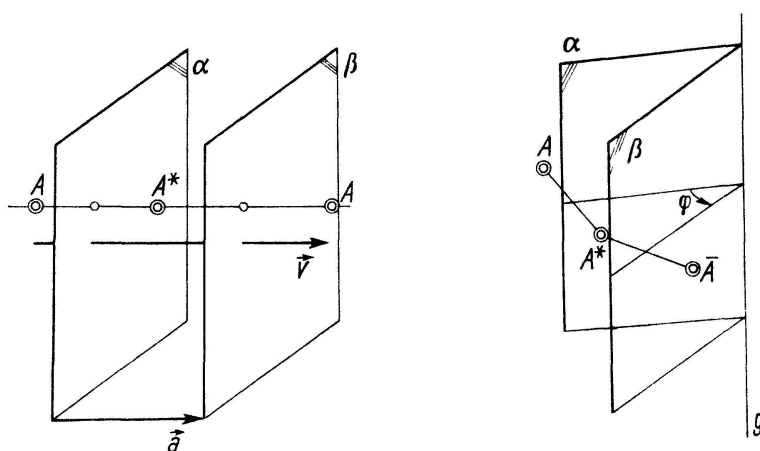
Auf Grund dieser Definition ist die Zusammensetzung zweier Kongruenzabbildungen stets wieder eine Kongruenzabbildung. Aus $\Sigma_\varepsilon \circ \Sigma_\varepsilon = I$ entnehmen wir, dass die Menge aller Kongruenzabbildungen auch die Identität umfasst. Ferner beachten wir, dass

$$\Omega = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \dots \circ \Sigma_\omega \Leftrightarrow \Omega^{-1} = \Sigma_\omega \circ \dots \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha$$

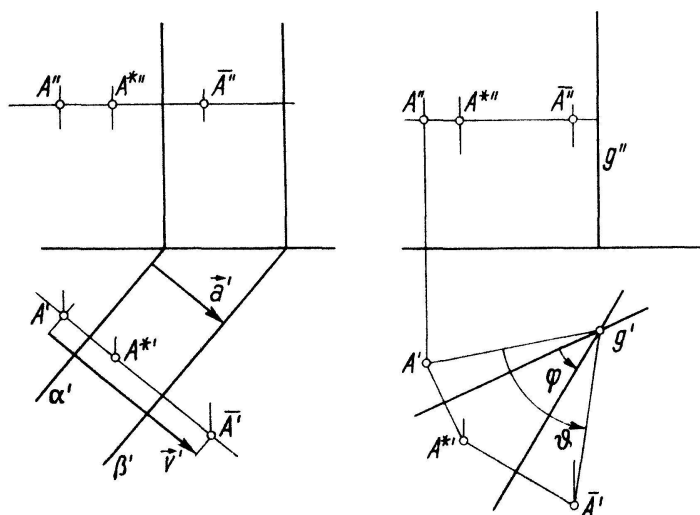
Diese Bemerkungen lassen erkennen, dass die Menge K aller Kongruenzabbildungen mit der geometrischen Zusammensetzung als innerer Operation auf eine Gruppe führt.

Satz 1: Die Kongruenzabbildungen des Raumes bilden eine Gruppe \mathfrak{R}^3 .

Die einfachsten Kongruenzabbildungen sind beim vorliegenden Aufbau natürlich die Ebenenspiegelungen $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta, \dots, \Sigma_\rho$. Auf der nächsthöheren Stufe stehen die 2spiegeligen Produkte, über die wir uns gleich einen Überblick verschaffen wollen.



Figur 2



Figur 3

Für zwei Ebenen α und β gibt es im euklidischen Raum zwei verschiedene Möglichkeiten der gegenseitigen Lage; entweder sind sie parallel oder sie schneiden sich in einer Geraden g . Diese beiden Situationen führen uns auf die folgenden spiegelungsgeometrischen Sätze:

³⁾ K bezeichnet eine Menge, \mathfrak{R} eine strukturierte Menge.

Satz 2: Sind die Ebenen α und β parallel, so stellt $\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta = T$ eine Translation dar. Der Translationsvektor \mathbf{v} ist doppelt so lang und gleichgerichtet, wie der Abstandsvektor \mathbf{a} zwischen α und β (\mathbf{a} zeigt von α nach β); es gilt als $\mathbf{v} = 2\mathbf{a}$.

Satz 3: Schneiden sich die Ebenen α und β in der Geraden g , dann ist $\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta = \Delta_g$ die Drehung mit der Achse g und dem Drehwinkel ϑ , der doppelt so gross ist wie der orientierte Winkel φ zwischen den Ebenen α und β (φ weist von α nach β); es ist also $\vartheta = 2\varphi$.

Die Fig. 2 zeigt die beiden Situationen im Schrägbild. In der Fig. 3 sind die entsprechenden Konstruktionen in Grund- und Aufriss dargestellt, wobei α und β als projizierende Ebenen gewählt wurden⁴⁾.

Für die weiteren Untersuchungen benötigen wir noch zwei Umkehrsätze, die ebenfalls sofort aus den Fig. 2 und 3 entnommen werden können:

Satz 2': Eine vorgegebene Translation T mit dem Vektor \mathbf{v} kann auf unendlichviele Arten als Produkt von zwei Ebenenspiegelungen geschrieben werden; die beiden Spiegelebenen α und β sind parallel und es ist $\mathbf{a} = (1/2)\mathbf{v}$.

Satz 3': Eine vorgegebene Drehung Δ_g mit der Achse g kann auf unendlichviele Arten als Produkt von zwei Ebenenspiegelungen geschrieben werden; die beiden Spiegelebenen sind mit g inzident und der orientierte Winkel φ zwischen α und β unterliegt der Beziehung $\varphi = (1/2)\vartheta$.

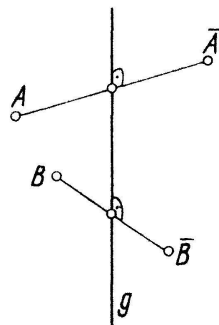
Im allgemeinen sind zwei beliebige Ebenenspiegelungen $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta$ nicht vertauschbar; die beiden Produkte $\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta$ und $\Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha$ stellen verschiedene Kongruenzabbildungen dar. Liegt aber ein kommutatives Paar vor, dann gilt

$$\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta = \Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha \Leftrightarrow \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta = I \text{ bzw. } (\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta)^2 = I.$$

Σ_α und Σ_β sind also genau dann vertauschbar, wenn die Abbildung $\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta$ die Periode 2 aufweist. Suchen wir zunächst unter den Translationen nach solchen Abbildungen, so zeigt sich, dass nur die Identität I ($\mathbf{v} = 0$) diese Eigenschaft hat; es ist dann $\alpha = \beta$. Unter den Drehungen führt der Drehwinkel $\vartheta = \pi$ auf die Periode 2; hiezu gehören zwei Ebenen α und β , die senkrecht aufeinander stehen.

Aus zwei zueinander senkrechten Ebenen geht somit eine neue involutorische Kongruenzabbildung hervor, nämlich die Drehung um die Schnittgerade g mit dem Drehwinkel $\vartheta = \pi$. Man nennt sie die *Spiegelung an der Geraden g* und bezeichnet sie mit Σ_g . In diesem Falle ist

$$\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta = \Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha = \Sigma_g$$



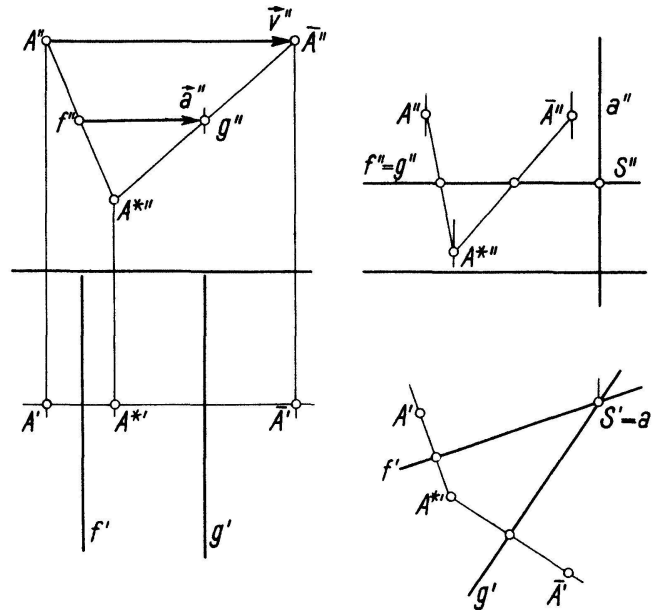
Figur 4

⁴⁾ Die darstellende Geometrie ist eine wichtige konstruktive Hilfe bei der Untersuchung spiegelsymmetrischer Zusammenhänge im Raum. Dieser Beitrag dürfte aber auch zeigen, dass die Problemstellungen der Spiegelungsgeometrie mancherlei Anregungen für die konstruktive Geometrie enthalten.

2. Die Zusammensetzung von Geradenspiegelungen

Die weitere Diskussion der Gruppe \mathfrak{R} wird nun zweckmässigerweise so durchgeführt, dass zuerst die *Produkte aus zwei Geradenspiegelungen* untersucht werden.

Für zwei Geraden f und g gibt es im euklidischen Raum drei Möglichkeiten der gegenseitigen Lage: parallel, inzident mit einem Punkt S oder windschief. Wir wollen nun das Spiegelungsprodukt $\Sigma_f \circ \Sigma_g$ für diese drei Situationen untersuchen. Bei den ersten beiden Situationen stützen wir uns auf eine Darstellung in Grund- und Aufriss; die entsprechenden Konstruktionen sind in der Fig. 5 aufgezeichnet. Wir entnehmen daraus sofort die folgenden Sätze.



Figur 5

Satz 4: Sind f und g parallele Geraden, dann ist $\Sigma_f \circ \Sigma_g = T$ eine Translation. Der Translationsvektor \mathbf{v} ist doppelt so lang und gleichgerichtet wie der Abstandsvektor \mathbf{a} zwischen f und g (\mathbf{a} zeigt von f nach g); es ist also $\mathbf{v} = 2\mathbf{a}$. Umgekehrt lässt sich eine vorgegebene Translation T mit dem Vektor \mathbf{v} auf unendlichviele Arten als Produkt von zwei Geradenspiegelungen schreiben. Die beiden Spiegelungsachsen f und g sind parallel und es ist $\mathbf{a} = (1/2)\mathbf{v}$.

Satz 5: Schneiden sich f und g im Punkt S , dann stellt $\Sigma_f \circ \Sigma_g = \Delta_a$ eine Drehung dar. Die Drehachse a ist das gemeinsame Lot auf f und g durch den Punkt S und der Drehwinkel ϑ ist doppelt so gross wie der orientierte Winkel φ zwischen f und g (φ weist von f nach g); es ist also $\vartheta = 2\varphi$. Umgekehrt lässt sich eine vorgegebene Drehung Δ_a mit der Achse a auf unendlichviele Arten als Produkt aus zwei Geradenspiegelungen schreiben. Die beiden Spiegelachsen f und g sind Lote auf a , die a im gleichen Punkt S treffen und die miteinander den Winkel $\varphi = (1/2)\vartheta$ einschliessen.

Sind f und g zwei senkrechte Geraden durch S , dann gilt speziell

$$\Sigma_f \circ \Sigma_g = \Sigma_g \circ \Sigma_f = \Sigma_a \quad \text{wobei} \quad a \perp f, g$$

Bei der Untersuchung von $\Sigma_f \circ \Sigma_g$ im Falle von zwei windschiefen Geraden gehen wir vom Schrägbild in der Fig. 6 aus. Die Gerade m ist die Minimaltransversale von

f und g . In den Schnittpunkten von m mit f und g sind die beiden Geraden $p \parallel g$ und $q \parallel f$ gezeichnet. Es ist dann

$$\Sigma_f \circ \Sigma_p = \Sigma_q \circ \Sigma_g = \Delta'$$

die Drehung um die Achse m mit dem Drehwinkel $\vartheta = 2\varphi$ und

$$\Sigma_f \circ \Sigma_q = \Sigma_p \circ \Sigma_g = T'$$

die Translation mit dem Vektor $\mathbf{v} = 2\mathbf{a}$. Das gegebene Spiegelungsprodukt kann jetzt folgendermassen umgeformt werden:

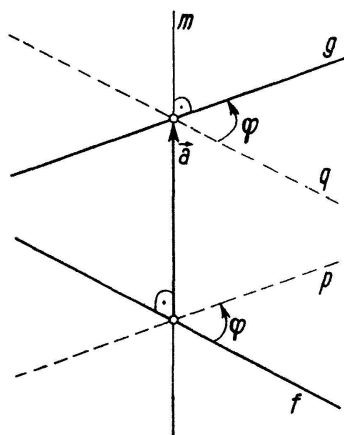
$$\Sigma_f \circ \Sigma_g = \Sigma_f \circ \Sigma_p \circ \Sigma_p \circ \Sigma_g = (\Sigma_f \circ \Sigma_p) \circ (\Sigma_p \circ \Sigma_g) = \Delta' \circ T'$$

oder

$$\Sigma_f \circ \Sigma_g = \Sigma_f \circ \Sigma_q \circ \Sigma_q \circ \Sigma_g = (\Sigma_f \circ \Sigma_q) \circ (\Sigma_q \circ \Sigma_g) = T' \circ \Delta'$$

Unsere Kongruenzabbildung $\Sigma_f \circ \Sigma_g$ kann auch durch Zusammensetzung der Translation T' und der Drehung Δ' gewonnen werden, wobei diese beiden Bestandteile vertauschbar sind. Man beachte, wie T' und Δ' mit den beiden Geraden f und g zusammenhängen:

Der Vektor von T' geht aus dem Abstandsvektor von f und g hervor, die Achse von Δ' ist die Minimaltransversale von f und g und der Drehwinkel ist der zweifache Winkel zwischen diesen beiden Geraden.



Figur 6

Definition: Die Zusammensetzung einer Drehung um die Gerade m mit einer Translation in der Richtung von m heisst eine Schraubung.

Eine Schraubung Ω ist gekennzeichnet durch ihre Achse m , ihren Schraubwinkel ϑ und ihren Schiebvektor \mathbf{v} .

Satz 6: Sind f und g windschiefe Geraden, so stellt $\Sigma_f \circ \Sigma_g$ eine Schraubung dar. Die Schraubachse liegt auf der Minimaltransversalen von f und g , der Schraubwinkel ϑ ist doppelt so gross wie der orientierte Winkel zwischen f und g und der Schiebvektor \mathbf{v} ist der zweifache Abstandsvektor zwischen f und g . Umgekehrt kann eine vorgegebene Schraubung mit der Achse m , dem Winkel ϑ und dem Schiebvektor \mathbf{v} auf unendlichviele Arten als Produkt zweier Geraden Spiegelungen geschrieben werden. Die beiden Spiegelachsen f und g sind Lote auf m , die miteinander den Winkel $\varphi = (1/2)\vartheta$ einschliessen und die den Abstandsvektor $\mathbf{a} = (1/2)\mathbf{v}$ aufweisen.

In der Schraubung sind wir auf eine wichtige Kongruenzabbildung gestossen. Die Translationen und die Drehungen können als spezielle Schraubungen aufgefasst

werden; die Translationen sind Schraubungen mit $\vartheta = 0$, die Drehungen Schraubungen mit $\mathbf{v} = 0$.

Der nächste Schritt bei unserem Aufbau der Gruppe \mathfrak{R} ist jetzt die Zusammensetzung zweier Schraubungen:

$$\Omega_1 \begin{cases} \text{Achse } m_1 \\ \text{Winkel } \vartheta_1 \\ \text{Vektor } \mathbf{v}_1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \Omega_2 \begin{cases} \text{Achse } m_2 \\ \text{Winkel } \vartheta_2 \\ \text{Vektor } \mathbf{v}_2 \end{cases}$$

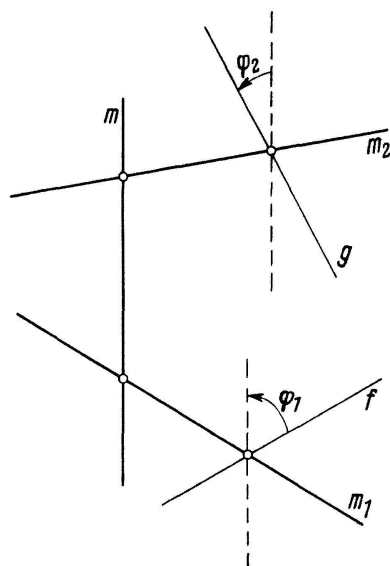
Um die Abbildung $\Omega_1 \circ \Omega_2$ übersehen zu können, gehen wir von der Fig. 7 aus. Es sei m ein gemeinsames Lot auf die beiden Achsen m_1 und m_2 . Im allgemeinen Falle gibt es genau eine solche Gerade, nämlich die Minimaltransversale. Sind jedoch die Achsen m_1 und m_2 parallel, so bestehen unendlichviele Möglichkeiten. Wir stützen uns nun auf den zweiten Teil von Satz 6. Man kann zwei Geraden f und g finden, so dass

$$\Omega_1 = \Sigma_f \circ \Sigma_m \quad \text{und} \quad \Omega_2 = \Sigma_m \circ \Sigma_g$$

Damit wird

$$\Omega_1 \circ \Omega_2 = \Sigma_f \circ \Sigma_m \circ \Sigma_m \circ \Sigma_g = \Sigma_f \circ \Sigma_g$$

Das Produkt von zwei Geradenspiegelungen ist eine (ev. spezielle) Schraubung.



Figur 7

Durch Zusammensetzen zweier Schraubungen erhält man stets wieder eine Schraubung. Die Menge der Schraubungen enthält auch die Abbildung I und mit jedem Element Ω auch Ω^{-1} ; die inverse Abbildung zu einer Schraubung ist ja wiederum eine Schraubung. Wir werden damit auf eine Untergruppe von \mathfrak{R} geführt.

Satz 7: Die Schraubungen bilden eine Untergruppe $\mathfrak{R}^+ \subset \mathfrak{R}$.

3. Gleichsinnige und ungleichsinnige Kongruenzen

Wir wollen nun eine grobe Klassifikation der Kongruenzabbildungen vornehmen und beweisen den

Satz 8: Ist $n \equiv 1 \pmod{2}$, dann ist das Produkt

$$\Omega = \Sigma_{\alpha_1} \circ \Sigma_{\alpha_2} \circ \dots \circ \Sigma_{\alpha_n}$$

aus Ebenenspiegelungen stets von der Identität I verschieden.

Ist $n \equiv 1 \pmod{2}$, so können wir $n = 2m + 1$ setzen. Es besteht dann die Äquivalenz

$$\Sigma_{\alpha_1} \circ \Sigma_{\alpha_2} \circ \dots \circ \Sigma_{\alpha_{2m}} \circ \Sigma_{\alpha_{2m+1}} = I \iff \underbrace{\Sigma_{\alpha_1} \circ \Sigma_{\alpha_2} \circ \dots \circ \Sigma_{\alpha_{2m}}}_{\Omega_1} = \Sigma_{\alpha_{2m+1}} = \Sigma_\beta$$

Fasst man auf der rechten Seite im Spiegelungsprodukt zu Zweierprodukten zusammen, so stellt jede Klammer Ω_j nach Satz 2 und 3 eine Translation oder eine Drehung, d.h. eine spezielle Schraubung dar. Die Verknüpfung aus endlich vielen Schraubungen ist nun aber wieder eine Schraubung Ω' , so dass bei unserer Annahme die Relation

$$\Omega_1 \circ \Omega_2 \circ \dots \circ \Omega_m = \Omega' = \Sigma_\beta$$

herauskommt. Wir wollen nun die Fixpunkte von Ω' und Σ_β vergleichen; es wird sich dabei zeigen, dass eine solche Beziehung niemals möglich ist. Ω' wurde als Schraubung erkannt, so dass für diese Abbildung die Fixpunkte wie folgt liegen können:

$$\Omega' \begin{cases} \text{eigentliche Schraubung; hat keine Fixpunkte} \\ \text{eigentliche Drehung; hat eine Gerade aus lauter Fixpunkten} \\ \text{eigentliche Translation; hat keine Fixpunkte} \\ \text{Identität; alle Punkte des Raumes sind Fixpunkte} \end{cases}$$

Σ_β ist eine Ebenenspiegelung; ihre Fixpunkte sind genau die Punkte der Ebene β . Die Annahme, dass unser Spiegelungsprodukt die Identität darstellt, führt also auf einen Widerspruch.

Satz 9: *Besitzt eine Kongruenzabbildung Ω zwei verschiedene Darstellungen als Produkt von Ebenenspiegelungen*

$$\Omega = \Sigma_{\alpha_1} \circ \Sigma_{\alpha_2} \circ \dots \circ \Sigma_{\alpha_n} = \Sigma_{\beta_1} \circ \Sigma_{\beta_2} \circ \dots \circ \Sigma_{\beta_m}$$

dann ist stets $n \equiv m \pmod{2}$.

Aus den beiden Darstellungen von Ω schliesst man nämlich sofort auf die Beziehung

$$\Sigma_{\alpha_1} \circ \Sigma_{\alpha_2} \circ \dots \circ \Sigma_{\alpha_n} \circ \Sigma_{\beta_m} \circ \dots \circ \Sigma_{\beta_2} \circ \Sigma_{\beta_1} = I$$

Wäre nun $n \not\equiv m \pmod{2}$, so hätte das Produkt auf der linken Seite eine ungerade Anzahl von Faktoren, was nach Satz 8 nicht möglich ist.

Der Satz 9 ermöglicht jetzt eine Klassifikation der Elemente von \mathfrak{R} nach geradzahligem und ungeradzahligem Produkten von Ebenenspiegelungen.

Definition: *Eine Kongruenzabbildung Ω heisst gleichsinnig oder ungleichsinnig, je nachdem zur Erzeugung von Ω eine gerade oder ungerade Anzahl von Ebenenspiegelungen erforderlich ist⁵⁾.*

Bei einer gleichsinnigen Kongruenz Ω' kann man stets die Zerlegung

$$\Omega' = \Sigma_{\alpha_1} \circ \Sigma_{\alpha_2} \circ \dots \circ \Sigma_{\alpha_{2m}} = (\Sigma_{\alpha_1} \circ \Sigma_{\alpha_2}) \circ (\Sigma_{\alpha_3} \circ \Sigma_{\alpha_4}) \circ \dots \circ (\Sigma_{\alpha_{2m-1}} \circ \Sigma_{\alpha_{2m}})$$

vornehmen. Da jede Klammer eine Schraubung bezeichnet, ist Ω' selbst wieder eine Schraubung. Umgekehrt kann sofort gezeigt werden, dass jede Schraubung gleichsinnig ist. Eine Schraubung kann ja immer als Produkt aus zwei Geradenspiegelungen und mithin als Produkt aus 4 Ebenenspiegelungen geschrieben werden:

$$\Omega'' = \Sigma_f \circ \Sigma_g = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\delta$$

⁵⁾ Die Bezeichnung der beiden Klassen geht auf die Tatsache zurück, dass die Ebenenspiegelung die Orientierung eines linear unabhängigen Vektortripels umkehrt.

Damit hat sich jetzt die Menge der gleichsinnigen Abbildungen als identisch mit der Menge der Schraubungen herausgestellt. \mathfrak{R}^+ ist die Gruppe der gleichsinnigen Kongruenzen.

Für die Abbildungen der Gruppe \mathfrak{R}^+ ist bei dieser Gelegenheit eine bemerkenswerte Tatsache zu Tage getreten: *Jedes $\Omega \in \mathfrak{R}^+$ kann als Produkt aus 4 Ebenenspiegelungen geschrieben werden.* Die Drehungen und die Translationen gestatten auf Grund der Sätze 2 und 3 sogar eine Reduktion auf Produkte aus 2 Ebenenspiegelungen. Entsprechend der erforderlichen Mindestzahl an Ebenenspiegelungen bei der Darstellung von Ω zerfällt K^+ in die folgenden beiden Klassen:

2spiegelige Abbildungen: Identität, Translationen, Drehungen;

4spiegelige Abbildungen: eigentliche Schraubungen.

Es sei jetzt Ω eine ungleichsinnige Kongruenzabbildung, d. h.

$$\Omega = \Sigma_{\alpha_1} \circ \Sigma_{\alpha_2} \circ \dots \circ \Sigma_{\alpha_{2m}} \circ \Sigma_{\beta} = \Omega' \circ \Sigma_{\beta}$$

wobei Ω' als Element von \mathfrak{R}^+ als Produkt von 4 oder 2 Ebenenspiegelungen darstellbar ist. Hieraus folgt, dass sämtliche Abbildungen aus \mathfrak{R} als Produkte von höchstens 5 Ebenenspiegelungen geschrieben werden können. Unsere Definition der Kongruenzabbildungen lässt diesen Sachverhalt nicht ohne weiteres erwarten. Jedenfalls wird jetzt offenbar, dass in \mathfrak{R} nur einige wenige Abbildungstypen vorkommen.

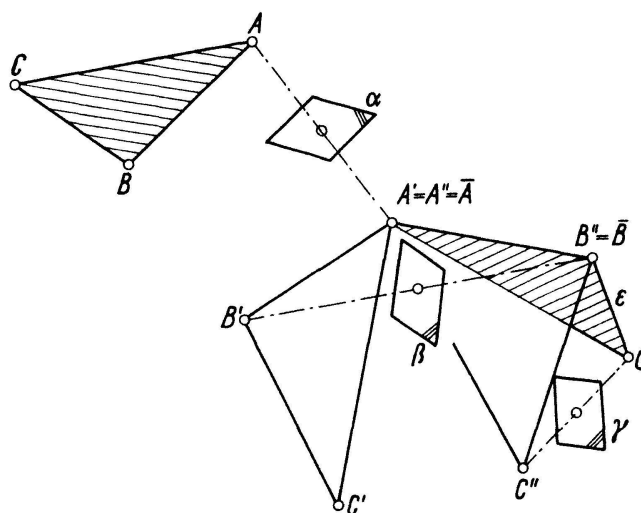
Für die weiteren Untersuchungen benötigen wir noch den

Satz 10: *Eine gleichsinnige Kongruenz mit 3 nichtkollinearen Fixpunkten ist notwendigerweise die Identität.*

Man schliesst dies sofort aus unserer Klassifikation der Schraubungen auf Grund der vorhandenen Fixpunkte.

Der Satz 11 führt uns zu neuen Einsichten in die Gruppe \mathfrak{R} ; insbesondere verschafft er uns den Zutritt zu den ungleichsinnigen Kongruenzen.

Satz 11: *Stimmen die beiden Dreiecke⁶⁾ ABC und $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ in entsprechenden Seiten überein, dann gibt es genau eine gleichsinnige Kongruenz Ω' und genau eine ungleichsinnige Kongruenz Ω'' , die das eine Dreieck in das andere überführen.*



Figur 8

⁶⁾ Dreieck steht hier für drei Punkte, die nicht kollinear sind.

Wir führen den Beweis in zwei Schritten: wir zeigen zuerst die Existenz von zwei Abbildungen Ω' und Ω'' und anschliessend die Eindeutigkeit.

Es sei α die Mittelnormalebene zu A und \bar{A} . Die Spiegelung Σ_α bringt A an die Stelle $A' = \bar{A}$, B geht nach B' und C nach C' . Nun betrachten wir die Mittelnormalebene β von B' und \bar{B} ; sie geht durch den Punkt $A' = \bar{A}$, so dass dieser Punkt bei der Spiegelung Σ_β fest bleibt. B' geht bei Σ_β nach $B'' = \bar{B}$ und C' kommt nach C'' . Die Mittelnormalebene γ von C'' und \bar{C} geht durch die beiden Punkte A'' und B'' , diese beiden Punkte bleiben bei der Spiegelung Σ_γ an Ort. Andererseits wird hiedurch C'' nach \bar{C} befördert. Ist schliesslich ε die Ebene des Dreiecks $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, so sind jetzt offenbar

$$\Omega' = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\varepsilon \quad \text{und} \quad \Omega'' = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma$$

zwei Kongruenzabbildungen mit der geforderten Zuordnung.

Um die Eindeutigkeit nachzuweisen, machen wir etwa die Annahme von zwei gleichsinnigen Kongruenzen Ω'_1 und Ω'_2 , welche das Verlangte leisten. $\Omega'_1 \circ \Omega'^{-1}_2$ ist dann eine gleichsinnige Kongruenz mit den Fixpunkten A , B und C und dies ist nach Satz 10 die Identität.

$$\Omega'_1 \circ \Omega'^{-1}_2 = I \iff \Omega'_1 = \Omega'_2$$

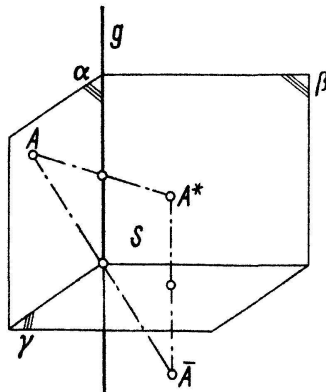
In gleicher Weise folgt auch die Eindeutigkeit von Ω'' . Bei der Annahme von zwei derartigen Abbildungen folgt wiederum, dass $\Omega''_1 \circ \Omega''^{-1}_2$ eine gleichsinnige Kongruenz mit den Fixpunkten A , B und C darstellt:

$$\Omega''_1 \circ \Omega''^{-1}_2 = I \iff \Omega''_1 = \Omega''_2$$

Eine beliebige ungleichsinnige Kongruenz Ω möge das Dreieck ABC an die Stelle $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ verpflanzen. Aus unserem Beweis von Satz 11 kann entnommen werden, dass Ω immer als Produkt von 3 Ebenenspiegelungen darstellbar ist:

$$\Omega = \Omega'' = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma$$

Wir brauchen deshalb bei der Diskussion der ungleichsinnigen Kongruenzen nicht bis zu den 5spiegeligen Abbildungen vorzustossen. *Die ungleichsinnigen Kongruenzabbildungen können stets als Produkte von 3 Ebenenspiegelungen geschrieben werden oder sie lassen sich auf eine reine Ebenenspiegelung reduzieren.*



Figur 9