**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 22 (1967)
**Heft:** 2

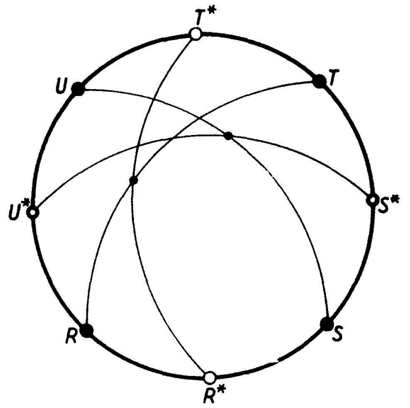
**Artikel:** Eine geometrische Charakterisierung der Differenzierbarkeit für Funktionen zweier Veränderlicher

**Autor:** Kirsch, Arnold

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-25353

Es seien nun $RS$ und $TU$ die grössten weissen Bögen, die auf unserem Kreis die betrachteten weissen Punkte enthalten. Die Punkte $R$, $S$, $T$, $U$ sind schwarz. (Dabei können $S$ und $T$ oder $U$ und $R$ zusammenfallen.) Wir betrachten eine Drehung, die $R$ in einen Punkt $R^*$ des Bogens $RS$ und $T$ in einen Punkt $T^*$ des Bogens $TU$ überführt. Wir behaupten, dass $s$ und die gedrehte Punktmenge $s^*$ einander kreuzen.

Die Punkte $R^*$ und $T^*$ von $s^*$ liegen ausserhalb $s$. Es sei $R^*T^*$ ein beliebiger zu $s^*$ gehöriger Kurvenbogen (Figur 3). Diesem Bogen entspricht in der Drehung $s^* \to s$ ein Kurvenbogen $RT$ in $s$. Da aber die Kurvenbögen $R^*T^*$ und $RT$ einander kreuzen,




Figur 3

ist $s^* - s^*s$ nicht zusammenhängend. In ähnlicher Weise sieht man ein, dass sich die ausserhalb $s^*$ liegenden Punkte $S$ und $U$ innerhalb $s$ nur durch einen über $s^*$ führenden Kurvenbogen verbinden lassen. Deshalb ist $s - ss^*$ auch nicht zusammenhängend.

Damit ist der Beweis beendet. L. FEJES TÓTH, Budapest

*Bemerkungen der Redaktion*: Bezüglich der Frage, was beim Weglassen der Bedingung der Abgeschlossenheit passiert, siehe P. ERDÖS und E. GR. STRAUS: Über eine geometrische Frage von FEJES TÓTH (erscheint in dieser Zeitschrift)

LITERATURVERZEICHNIS


[1] R. P. BAMBAH und C. A. ROGERS, *Covering the Plane by Convex Sets*, J. London Math. Soc. *27*, 304–314 (1952).

[2] L. FEJES TÓTH, *Isoperimetric Problems Concerning Tessellations*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *14*, 343–351 (1963).

[3] L. FEJES TÓTH, *Reguläre Figuren* (Budapest 1965), S. 161.


# Eine geometrische Charakterisierung der Differenzierbarkeit für Funktionen zweier Veränderlicher

M. FRÉCHET hat vor einiger Zeit in einer ausführlichen, didaktisch orientierten Arbeit[1]) verschiedene Definitionen der Differenzierbarkeit bzw. des Differentials von Funktionen zweier Veränderlicher dargestellt und ihre Äquivalenz untereinander ge-

---

[1]) Siehe Literaturverzeichnis [3], S. 34.

zeigt. Er hat weiter in einprägsamer Weise deutlich gemacht, dass bei dem durch diese Definition erfassten Begriff des Differentials eine vollständige Analogie zum Falle einer Veränderlichen besteht.

Im folgenden wird eine von den genannten Definitionen unabhängige und wohl auch neue Differenzierbarkeitsdefinition für Funktionen zweier Veränderlicher mitgeteilt, die sich auf den Begriff der *Konvexität* stützt und ohne Limes-Operationen auskommt. Auch sie lässt sich völlig analog zu der entsprechenden Definition im Falle einer Veränderlichen, wie sie in [4] [2]) gegeben wurde, formulieren. Ihre Bedeutung liegt weniger in der praktischen Anwendbarkeit als vielmehr darin, dass sie eine suggestive geometrische Illustration des Differenzierbarkeitsbegriffs gibt. Der Beweis für die Äquivalenz der neuen Definition mit den bekannten Definitionen ist naturgemäss etwas mühsamer als im Falle einer Veränderlichen (vgl. [4]) und soll daher im zweiten Teil dieser Mitteilung ausgeführt werden.

1. Eine Funktion $f$ zweier Veränderlicher kann mit ihrem Graphen, das heisst mit der Punktmenge $\{(x, y, z) \mid z = f(x, y)\}$ im dreidimensionalen Raum identifiziert werden. Die *Konvexität* der Funktion $f$ ist dann in geometrischer Ausdrucksweise dadurch definiert, dass erstens ihr Definitionsbereich $D$ (die Projektion des Graphen auf die $xy$-Ebene) konvex ist und zweitens der Graph keinen Punkt enthält, der oberhalb der Verbindungsstrecke von irgendzweien seiner Punkte liegt – bzw. keinen Punkt, der unterhalb einer solchen Verbindungsstrecke liegt. Im ersten Falle, d.h. wenn

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \leqslant \lambda f(x_1, y_1) + \mu f(x_2, y_2)$$

$$\text{für alle } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D \text{ und alle } \lambda, \mu \geqslant 0 \text{ mit } \lambda + \mu = 1$$

gilt, heisst *$f$ von unten konvex;* im zweiten Falle, d.h. wenn hierbei $\geqslant$ statt $\leqslant$ steht, heisst *$f$ von oben konvex* [3]).

Es sei $k$ eine konvexe Funktion und $(x_0, y_0)$ ein innerer Punkt ihres Definitionsbereichs $K$. Eine lineare Funktion $s$ mit $s(x, y) = a\,x + b\,y + c$ heisst *Stützebene* an $k$ in $P_0 = (x_0, y_0, k(x_0, y_0))$ (oder auch in $(x_0, y_0)$), wenn erstens $P_0$ auf $s$ liegt und zweitens einer der beiden durch $s$ bestimmten offenen Halbräume keinen Punkt von $k$ enthält, das heisst also im Falle der Konvexität von unten, wenn

$$s(x_0, y_0) = k(x_0, y_0) \text{ sowie } s(x, y) \leqslant k(x, y) \text{ für alle } (x, y) \in K\,;$$

im Falle der Konvexität von $k$ von oben steht hierin $\geqslant$ statt $\leqslant$. Bekanntlich besitzt $k$ in $P_0$ stets *mindestens eine Stützebene* [4]).

Wir definieren zunächst:

*Def. 1. Die konvexe Funktion $k$ heisse* **glatt in** *$P_0$ (oder auch in $(x_0, y_0)$), wenn $k$ in $P_0$ höchstens eine Stützebene besitzt.*

Somit ist $k$ dann und nur dann glatt in $P_0$, wenn $k$ in $P_0$ *genau* eine Stützebene hat. Die angekündigte Definition der Differenzierbarkeit (hier zunächst anders genannt) lautet:

*Def. 2. Die Funktion $f$ heisse* **glatt einschliessbar in** *$P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (oder auch in $(x_0, y_0)$), wenn es zu $(x_0, y_0)$ eine konvexe Umgebung $K$ (enthalten im*

[2]) Siehe Literaturverzeichnis, S. 34.

[3]) Oft werden nur die von unten konvexen Funktionen «konvex» genannt und die von oben konvexen Funktionen «konkav» (oder umgekehrt).

[4]) Siehe hierfür etwa Literaturverzeichnis [1], § 16.

*Definitionsbereich $D$ von $f$) und zwei in $K$ definierte konvexe, in $(x_0, y_0)$ glatte Funktionen $k_1$, $k_2$ gibt, derart dass gilt:*

$$k_1(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) = k_2(x_0, y_0) ;$$

$$k_1(x, y) \leqslant f(x, y) \leqslant k_2(x, y) \text{ für alle } (x, y) \in K .$$

Es macht hier offenbar nichts aus, wenn $k_1$ als von oben, $k_2$ als von unten konvex angenommen wird. Denn sind zum Beispiel $k_1$ und $k_2$ beide von unten konvex, so kann die Funktion $k_1$ durch ihre Stützebene in $P_0$ ersetzt werden; lineare Funktionen (und nur diese) sind aber zugleich von unten und von oben konvex. Weiter sieht man sofort, dass jede in $P_0$ glatte konvexe Funktion $k$ auch glatt einschliessbar in $P_0$ ist; man setze hierzu $k_1 = k = k_2$. Ist umgekehrt die in $P_0$ glatt einschliessbare Funktion $f$ konvex, z.B. von unten konvex, so ist auch $k_2$ von unten konvex, und aus der Annahme, $f$ wäre nicht glatt in $P_0$, d.h. es gäbe in $P_0$ zwei Stützebenen $s_1$, $s_2$ an $f$, folgt wegen $f(x, y) \leqslant k_2(x, y)$, dass $s_1$ und $s_2$ auch Stützebenen der konvexen Funktion $k_2$ in $P_0$ sind, im Widerspruch zur Glattheit von $k_2$. *Für konvexe Funktionen stimmen also die Begriffe «glatt» und «glatt einschliessbar» überein.*

Im folgenden beweisen wir, dass *der Begriff «glatt einschliessbar» gleichbedeutend ist mit dem bekannten Begriff der Differenzierbarkeit* – der kurz als «lineare Approximierbarkeit» charakterisiert werden kann, wobei die betreffende lineare Näherungsfunktion im wesentlichen das Differential in dem betrachteten Punkt $(x_0, y_0)$ und ihr Graph die Tangentialebene in $P_0$ ist. Dabei wird sich zugleich die Tatsache ergeben, dass bei einer in $P_0$ glatt einschliessbaren Funktion $f$ die Stützebenen der beiden konvexen Funktionen $k_1$, $k_2$ in $P_0$ übereinstimmen und dass durch diese gemeinsame Stützebene die Tangentialebene in $P_0$ an $f$ gegeben ist.

*2.* Die vorstehenden Behauptungen sind in den folgenden Sätzen 1 und 2 enthalten. Bei ihrem Beweis machen wir von der Tatsache Gebrauch, dass die auftretenden Begriffe invariant gegenüber solchen affinen Transformationen sind, durch die eine Funktion $f$ in die Funktion $f^*$ mit

$$f^*(x, y) = f(a_1 x - a_2 y + b_1, a_2 x + a_1 y + b_2) + c_1 x + c_2 y + c_3 ,$$

wobei $a_1^2 + a_2^2 > 0$ sei, übergeführt wird (allgemeinere Transformationen werden nicht benötigt).

**Satz 1.** *Für jede konvexe Funktion $k$ gilt (wenn $(x_0, y_0)$ ein innerer Punkt ihres Definitionsbereichs $K$ ist und $P_0 = (x_0, y_0, k(x_0, y_0))$ gesetzt wird):*

a) *Ist $k$ differenzierbar in $(x_0, y_0)$, so ist $k$ glatt in $P_0$, und die Tangentialebene an $k$ in $P_0$ ist zugleich Stützebene.*

b) *Ist $k$ glatt in $P_0$, so ist $k$ differenzierbar in $(x_0, y_0)$.*

Dieser Satz ist zweifellos nicht neu. Jedenfalls ist die Aussage a) wohlbekannt: Ist $k$ differenzierbar in $(x_0, y_0)$, so kann $k$ in $P_0$ offenbar keine Stützebene haben, die von der Tangentialebene verschieden ist. Folglich gibt es höchstens eine, also genau eine Stützebene in $P_0$, und diese ist mit der Tangentialebene identisch. Die Aussage b) ist – anders als die analoge Aussage im Falle einer Veränderlichen – nicht so einfach einzusehen. Da ein Beweis in der bekannteren Literatur anscheinend nicht leicht zu finden ist, soll er hier kurz ausgeführt werden.

*Beweis von* b). I. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $k$ von unten konvex und dass $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $k(0, 0) = 0$ sowie $k(x, y) \geqslant 0$ für alle $(x, y) \in K$ sei (so dass die $xy$-Ebene die Stützebene an $k$ in $(0, 0, 0)$ ist). Dann existiert für alle $x, y$ der Limes

$$\lim_{\substack{\varrho \to 0 \\ \varrho > 0}} \frac{k(\varrho x, \varrho y)}{\varrho} = h(x, y) \, ,$$

und die hierdurch für alle $x, y$ definierte Funktion $h$[5]) hat die Eigenschaften:

$$0 \leqslant h(x, y) \, ; \tag{1}$$

$$h(\lambda x, \lambda y) = \lambda \, h(x, y) \quad \text{für} \quad \lambda \geqslant 0 \, ; \tag{2}$$

$$h(x, y) \leqslant k(x, y) \quad \text{für alle} \quad (x, y) \in K \, ; \tag{3}$$

$$h \text{ ist von unten konvex (und daher stetig)} \, . \tag{4}$$

Aus (2) und (4) folgt:

$$h(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \leqslant \lambda \, h(x_1, y_1) + \mu \, h(x_2, y_2), \text{ für alle } \lambda, \mu \geqslant 0 \, . \tag{5}$$

II. Bezeichnet $E$ den Einheitskreis in der $xy$-Ebene[6]), so ist für jedes $\alpha \in E$ durch

$$m(\alpha) = h(\cos\alpha, \sin\alpha)$$

die Steigung der Halbtangente an $k$ im Punkte $(0, 0, 0)$ in Richtung $\alpha$ gegeben, und wegen (2) ist der Graph der Funktion $h$ gerade die von allen diesen Halbtangenten gebildete Fläche. Die Funktion $m$ mit dem Definitionsbereich $E$ ist, wie $h$, stetig und nichtnegativ. Wir werden zeigen, dass

$$m(\alpha) = 0 \text{ für alle } \alpha \in E \, . \tag{6}$$

Diese Aussage, für $\alpha = 0$ ($\alpha = 0$ bezeichne die Richtung der positiven $x$-Achse) sowie für $\alpha = \pi/2, \pi, (3\pi)/2$ genommen, liefert die Existenz der beiden partiellen Ableitungen von $k$, und daraus kann wegen der Konvexität von $k$ leicht auf die behauptete Differenzierbarkeit geschlossen werden.

III. Zum Beweis von (6) nehmen wir das Gegenteil an: es gebe ein $\alpha_0 \in E$ mit

$$m(\alpha_0) > 0 \, ;$$

wir werden daraus folgern, dass $k$ in $(0, 0, 0)$ eine zweite Stützebene besitzt, im Widerspruch zu der vorausgesetzten Glattheit von $k$.

Sind $\alpha_1$, $\alpha_2$ zwei einander nicht gegenüberliegende Punkte auf $E$ mit $m(\alpha_i) = h(\cos\alpha_i, \sin\alpha_i) = 0$ $(i = 1, 2)$, so folgt aus (1) und (5), dass $m(\alpha) = 0$ für alle Punkte $\alpha$ des kürzesten Bogens von $\alpha_1$ nach $\alpha_2$; denn für jedes solche $\alpha$ gilt mit geeigneten $\lambda, \mu \geqslant 0$:

$$(\cos\alpha, \sin\alpha) = \lambda(\cos\alpha_1, \sin\alpha_1) + \mu(\cos\alpha_2, \sin\alpha_2) \, .$$

---

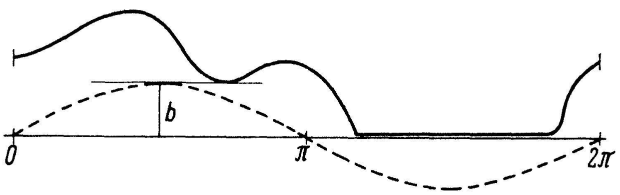
5) Es handelt sich hierbei um die sogenannte Richtungsderivierte von $k$ an der Stelle $(0, 0)$; siehe hierfür etwa Literaturverzeichnis [2], Nr. 13. Dort sind auch die einfachen Beweise der Eigenschaften (2) bis (4) ausgeführt.

6) $E$ wird in üblicher Weise mit der Zahlenmenge $\{\alpha \mid 0 \leqslant \alpha < 2\pi\}$ identifiziert, die aber mit der von der $xy$-Ebene induzierten Topologie versehen wird.

Hieraus ergibt sich ohne Mühe, wenn die Stetigkeit von $m$ und die Annahme $m(\alpha_0) > 0$ berücksichtigt werden, dass die Menge $A = \{\alpha \in E \mid m(\alpha) = 0\}$ abgeschlossen und in einem (abgeschlossenen) Halbkreisbogen enthalten ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann also $A = \{\alpha \in E \mid \pi + \delta \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \delta\}$ mit $\delta \geqslant 0$ geschrieben werden. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

*Fall 1.* Es gibt $b > 0$, so dass $b \sin\alpha \leqslant m(\alpha)$ für alle $\alpha \in E$ (Fig. 1). Dann ist $b\, r \sin\alpha \leqslant r\, h(\cos\alpha, \sin\alpha) = h(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ für alle $r \geqslant 0$, das heisst $b\, y \leqslant h(x, y)$ für alle $x, y$. Wegen (3) folgt

$$b\, y \leqslant k(x, y) \quad \text{für alle} \quad (x, y) \in K\,.$$




Figur 1

Somit ist die Ebene $s$ mit $s(x, y) = b\, y$ (wobei $b > 0$) eine zweite Stützebene von $k$, wie verlangt. Der Fall 1 liegt wegen der Stetigkeit von $m$ stets vor, wenn $\delta > 0$ ist; man kann dann $b = \underset{0 \leqslant \alpha \leqslant \pi}{\mathrm{Min}}\; m(\alpha)$ wählen. Ist $\delta = 0$, also $m(0) = m(\pi) = 0$, so kommt es auf die Grenzwerte

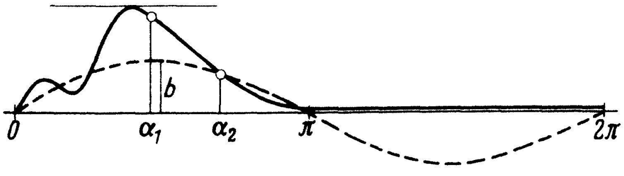
$$g_1 = \liminf_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} \frac{m(\varepsilon)}{\varepsilon}\,, \qquad g_2 = \liminf_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} \frac{m(\pi - \varepsilon)}{\varepsilon}$$

an; sind beide strikt positiv (eventuell auch unendlich), so liegt ebenfalls der Fall 1 vor, wie man leicht bestätigt. Andernfalls, das heisst wenn $g_1 = 0$ oder $g_2 = 0$ ist, liegt der Fall 2 vor.

*Fall 2.* Es gibt kein $b > 0$ mit $b \sin\alpha \leqslant m(\alpha)$ für alle $\alpha \in E$ (Fig. 2). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werde $g_2 = 0$ angenommen. Dann gibt es, wenn $b = \frac{1}{2} \underset{0 \leqslant \alpha \leqslant \pi}{\mathrm{Max}}\; m(\alpha)$ gesetzt wird, wegen der Stetigkeit von $m$ jedenfalls zwei Punkte $\alpha_1$, $\alpha_2$ mit

$$m(\alpha_1) > b \sin\alpha_1 \tag{7}$$

$$m(\alpha_2) = b \sin\alpha_2 \tag{7'}$$




Figur 2

und $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \pi$. Offenbar gibt es jetzt zwei Zahlen $\lambda, \mu \geqslant 0$, so dass

$$(\cos\alpha_1, \sin\alpha_1) = \lambda(1, 0) + \mu(\cos\alpha_2, \sin\alpha_2)\;;$$

nach (5) folgt hieraus

$$h(\cos\alpha_1, \sin\alpha_1) \leq \lambda\, h(1, 0) + \mu\, h(\cos\alpha_2, \sin\alpha_2)\,,$$

also nach der Definition von $m$ und wegen $m(0) = 0$, (7′) und $\sin\alpha_1 = \mu \sin\alpha_2$ schliesslich

$$m(\alpha_1) \leqslant \mu\, m(\alpha_2) = \mu\, b \sin\alpha_2 = b \sin\alpha_1\,.$$

Das Ergebnis $m(\alpha_1) \leqslant b \sin\alpha_1$ steht im Widerspruch zu (7); der Fall 2 kann also nicht eintreten. – Damit ist der Beweis von Satz 1 abgeschlossen.

**Satz 2.** *Für jede Funktion $f$ gilt (wenn $(x_0, y_0)$ ein innerer Punkt ihres Definitionsbereichs $D$ ist und $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ gesetzt wird):*
a) *Ist $f$ differenzierbar in $(x_0, y_0)$, so ist $f$ glatt einschliessbar in $P_0$.*
b) *Ist $f$ glatt einschliessbar in $P_0$, so ist $f$ differenzierbar in $(x_0, y_0)$, und die Tangentialebene von $f$ in $P_0$ ist Stützebene an $k_1$ und an $k_2$.*

Bei diesem Satz ist die Aussage b) leicht einzusehen: Auf Grund von Satz 1 b) sind die Funktionen $k_1$ und $k_2$, zwischen denen $f$ eingeschlossen ist, beide in $(x_0, y_0)$ differenzierbar. Hieraus und aus $k_1(x_0, y_0) = k_2(x_0, y_0)$, $k_1(x, y) \leqslant k_2(x, y)$ folgt leicht, dass in $P_0$ ihre Tangentialebenen, das heisst ihre Stützebenen übereinstimmen. Die Funktion $f$ ist nun gemäss Def. 2 zwischen zwei differenzierbaren Funktionen eingeschlossen, die in $P_0$ dieselbe Tangentialebene $s$ (d.h. dieselbe lineare Näherungsfunktion) besitzen; daraus folgt ohne Mühe, dass auch $f$ in $(x_0, y_0)$ differenzierbar ist und dass $s$ die Tangentialebene von $f$ in $P_0$ ist. – Der Beweis von a) ist mühsamer; er lässt sich jedoch weitgehend analog zu dem in [4] dargestellten Beweis für die entsprechende Aussage im Falle einer Veränderlichen führen.

*Beweis von* a). I. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $f$ den Definitionsbereich $D = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 1\}$ hat und dass $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und $f(0, 0) = f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 0$ ist ($f_1$ und $f_2$ bezeichnen die beiden partiellen Ableitungen von $f$). Wir konstruieren in einer konvexen Umgebung $K_2 \subseteq D$ von $(0, 0)$ eine nicht negative, von unten konvexe und in $(0, 0)$ glatte Funktion $k_2$ mit den Eigenschaften:

$$k_2(0, 0) = 0\,, \quad f(x, y) \leqslant k_2(x, y) \quad \text{für alle} \quad (x, y) \in K_2\,.$$

Die gleiche Konstruktion, für $-f$ statt $f$ ausgeführt, liefert eine konvexe Funktion $-k_1$ mit dem konvexen Definitionsbereich $K_1 \subseteq D$. Schränkt man die so erhaltenen Funktionen $k_1$ und $k_2$ schliesslich auf $K = K_1 \cap K_2$ ein, so ist hiermit die Bedingung der Definition 2 erfüllt.

II. Wir legen eine Folge $(m_n)_{n=1,2,\ldots}$ mit den Eigenschaften

$$m_n > m_{n+1} > 0 \qquad (\text{für alle } n)\,, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} m_n = 0 \tag{2}$$

zugrunde und setzen

$$r_n = \inf\{r \mid \text{es gibt } (x, y) \in D \text{ mit } \sqrt{x^2 + y^2} = r \text{ und } f(x, y) > m_n r\}\,; \tag{3}$$

ist $f(x, y) \leqslant m_n \sqrt{x^2 + y^2}$ für alle $(x, y) \in D$, so sei $r_n = 1$. Hierdurch ist eine Folge $(r_n)_{n=1,2,\ldots}$ definiert, und es gilt

$$1 \geqslant r_n \geqslant r_{n+1} \text{ und } r_n > 0 \qquad (\text{für alle } n)\,. \tag{4}$$

Die ersten dieser Ungleichungen sind klar; die letzte ergibt sich indirekt: Die Annahme $r_n = 0$ würde ja bedeuten, dass in beliebiger Nähe des Nullpunktes noch Punkte von $f$ oberhalb des Kegels mit der Gleichung $z = m_n \sqrt{x^2 + y^2}$ liegen, im Widerspruch zu der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von $f$. Aus (3) folgt sofort

$$f(x, y) \leqslant m_n \sqrt{x^2 + y^2} \text{ für alle } (x, y) \text{ mit } \sqrt{x^2 + y^2} < r_n . \tag{5}$$

Nach (4) existiert

$$\lim_{n \to \infty} r_n = a \geqslant 0 . \tag{6}$$

Ist $a > 0$, so gilt nach (5) für alle $(x, y)$ mit $\sqrt{x^2 + y^2} < a$:

$$f(x, y) \leqslant m_n \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant m_n a , \text{ für alle } n ,$$

also wegen (2) $f(x, y) \leqslant 0$; für $k_2$ kann man also die $xy$-Ebene mit $K_2 = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < a\}$ nehmen.

III. Es sei nun $a = 0$ vorausgesetzt und ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass $r_2 > r_3$ ($> 0$) ist[7]). Dann lässt sich, wie in [4] ausführlich gezeigt wird, induktiv eine Folge $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$ mit (für alle $n$)

$$a_1 = r_2 , \quad a_n \leqslant r_{n+1} \tag{7}$$

$$a_n > a_{n+1} \text{ und } a_n > 0 , \tag{8}$$

also

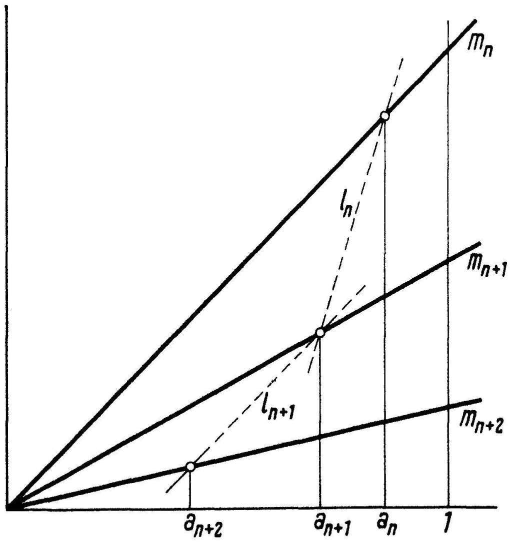
$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \tag{9}$$

definieren, die überdies die Eigenschaft hat, dass die Steigungen $l'_n$ der durch

$$l_n(a_n) = m_n a_n , \quad l_n(a_{n+1}) = m_{n+1} a_{n+1} \tag{10}$$

gegebenen linearen Funktionen $l_n$ (einer Veränderlichen, siehe Fig. 3) monoton abnehmen:

$$l'_n \geqslant l'_{n+1} \qquad (\text{für alle } n) . \tag{11}$$




Figur 3

[7]) Die Numerierung entspricht der in [4] gewählten.

Aus (1), (8), (10) folgt

$$m_{n+1}\, r \leqslant l_n(r) \quad \text{für } r \geqslant a_{n+1}\,,$$

und aus (5), (7) folgt

$$f(x, y) \leqslant m_{n+1} \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \text{wenn } \sqrt{x^2 + y^2} < a_n\,;$$

somit gilt

$$f(x, y) \leqslant l_n\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad \text{wenn } a_{n+1} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} < a_n\,. \tag{12}$$

IV. Nun setzen wir

$$k_2(x, y) = \begin{cases} 0\,, & \text{wenn } x = y = 0\,; \\ l_n\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), & \text{wenn } a_{n+1} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} < a_n \quad (n = 1, 2, \ldots)\,. \end{cases}$$

Wegen (7), (8), (9) ist hierdurch eine Funktion $k_2$ mit dem Definitionsbereich

$$K_2 = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < a_1 = r_2\}$$

gegeben, und $K_2$ ist (nach unserer Annahme über $D$) in $D$ enthalten. Offenbar ist $k_2(x, y) > 0$ für $(x, y) \neq (0, 0)$, und auf Grund von (12) gilt

$$f(x, y) \leqslant k_2(x, y) \text{ für alle } (x, y) \in K_2\,.$$

Weiter ergibt sich mit (10) sofort die Stetigkeit von $k_2$ und hieraus mit (11) die Konvexität von unten. Schliesslich überzeugt man sich mit Hilfe von (2) und (8) leicht davon, dass $k_2$ glatt ist, das heisst dass es keine von der $xy$-Ebene verschiedene Stützebene an $k_2$ in (0, 0, 0) gibt. Damit ist Satz 2 bewiesen.

ARNOLD KIRSCH, Göttingen

LITERATURVERZEICHNIS

[1] W. BLASCHKE, *Kreis und Kugel*, 2. Aufl., Berlin 1956.
[2] T. BONNESEN und W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, Berlin 1934.
[3] M. FRÉCHET, *Sur diverses définitions de la différentiabilité*, L'Ens. math. X, 177–228 (1964).
[4] A. KIRSCH, *Eine geometrische Charakterisierung der «Differenzierbarkeit» einer Funktion*, Math.-Phys. Semesterberichte VII, 96–100 (1960).

# Elementare Bestimmung der gefährlichen Fläche beim räumlichen Rückwärtsschnitt

Als *räumlichen Rückwärtsschnitt* bezeichnet man die Aufgabe, zu einem vorgegebenen Dreieck $\triangle$ mit den Ecken $A$, $B$, $C$ jenen Raumpunkt $P$ zu bestimmen, aus welchem die Dreiecksseiten unter vorgegebenen Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ erscheinen. Der Ort aller Punkte, aus welchen zwei feste Punkte $A$, $B$ unter konstantem Winkel $\gamma$ gesehen werden, besteht in der Ebene nach dem Peripheriewinkelsatz aus zwei Kreisen über der Sehne $AB$. Rotation dieser Kreise um $[AB]$ ergibt einen Torus als entsprechende