Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 22 (1967)
Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

Aufgaben

Aufgabe 517. n, k, a, d seien natürliche Zahlen und es sei $(a, d) = 1$. Wieviele der n Zahlen $a + k\,d$, $0 \leqq k \leqq n - 1$ sind zu n teilerfremd? W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

Lösung; Es sei P das Produkt aller in n enthaltenen grössten Primzahlpotenzen p^e, für die $p \mid d$. Dann ist die fragliche Anzahl gleich $P\,\varphi(n/P) = P\,\varphi(n)/\varphi(P)$.

Beweis; Sei $n = P\,N$ und $a_k = a + k\,d$, dann ist $(d, N) = 1$, also gilt

$$k \equiv l \pmod N \iff (k - l)\,d \equiv 0 \pmod N \iff a_k \equiv a_l \pmod N\,.$$

Folglich bilden je N aufeinanderfolgende Zahlen aus der Folge $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ein vollständiges Restsystem mod N. Jedes von ihnen enthält $\varphi(N)$ zu N teilerfremde Zahlen, so dass die Folge also $P\,\varphi(N)$ zu N teilerfremde Zahlen enthält. Wir weisen nun nach, dass das gerade diejenigen Zahlen der Folge sind, die auch zu n teilerfremd sind.

1. $(a_k, n) = 1 \Rightarrow (a_k, N) = 1$. 2. Sei $(a_k, N) = 1$. Gäbe es dann eine Primzahl p mit $p \mid (a_k, n)$, so wäre $p \mid (a_k, P\,N) \Rightarrow p \mid (a_k, P) \Rightarrow p \mid d$, also $p \mid a$, was wegen $(a, d) = 1$ unmöglich ist. Somit ist $(a_k, n) = 1$, und der Beweis ist erbracht.

E. TEUFFEL, Korntal/Stuttgart

Das Resultat kann auch in der Form $\varphi(n\,d)/\varphi(d)$ geschrieben werden.

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), L. CARLITZ (Duke Univ., USA), H. HARBORTH (Braunschweig), J. SPILKER (Freiburg/Br.).

Aufgabe 518. Prove that the expression

$$\frac{2\,(2\,x)\,!}{x\,!\,(x + 3)\,!}$$

is an integer if $x = 6\,k + 2$ (k a positive integer) and $k \not\equiv 0 \pmod 5$.

C. KARANICOLOFF, Sofia

$$\frac{2\,(2\,x)\,!}{x\,!\,(x + 3)\,!} = 2\prod_{r=1}^{s} p_r^{i_r} \quad \text{mit} \quad i_r = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\left[\frac{2\,x}{p_r^j}\right] - \left[\frac{x}{p_r^j}\right] - \left[\frac{x+3}{p_r^j}\right]\right) = \sum_{j=1}^{\infty} n_j$$

ist sicher ganz, wenn alle $n_j \geqslant 0$. Mit

$$d_1 = \frac{2\,x}{p^j} - \left[\frac{2\,x}{p^j}\right],\ d_2 = \frac{x}{p^j} - \left[\frac{x}{p^j}\right],\ d_3 = \frac{x+3}{p^j} - \left[\frac{x+3}{p^j}\right]$$

wird

$$n_j = d_2 + d_3 - d_1 - 3/p^j\,,\quad 0 \leqslant d_m \leqslant 1 - 1/p^j\,,\quad m = 1, 2, 3\,.$$

Für $p^j \geqslant 7$ ist entweder $d_2 \leqslant 3/p^j$ und $d_3 \geqslant 3/p^j$ oder $d_2 \geqslant 3/p^j$ und $d_3 \geqslant 0$; in beiden Fällen gilt $n_j > -1$ und, da n_j ganz sein muss, also $n_j \geqslant 0$. Betrachtet man noch für $p^j = 2, 3, 4, 5$ die Restklassen mod p^j, die für $x = 6\,k + 2$, $k \not\equiv 0 \pmod 5$, möglich sind (und beachtet dabei den Faktor 2), so folgt auch hier $n_j \geqslant 0$ und damit die Behauptung.

H. HARBORTH, Braunschweig

J. SPILKER (Freiburg/Br.) beweist die Ganzzahligkeit des Ausdrucks der Aufgabe für $x \equiv 2 \pmod 3$, $x \not\equiv 2 \pmod 5$, $x + 3 \neq 2^e$.

Weitere Lösungen sandten P. HOHLER (Olten), W. JÄNICHEN (Berlin).

Aufgabe 519. Man beweise: Ist E eine projektive Ebene (wir verlangen nur, dass durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade geht, zwei verschiedene Geraden stets einen Schnittpunkt haben und dass es vier Punkte in allgemeiner Lage gibt), sind P, Q zwei verschiedene Punkte und g, h zwei verschiedene Geraden von E mit $P \in h$, $P \notin g$ und $Q \in g$, $Q \notin h$, ist schliesslich β eine involutorische Streckung mit dem Zentrum P und der Achse g und γ eine involutorische Streckung mit dem Zentrum Q und der Achse h, so ist β die einzige involutorische Streckung mit dem Zentrum P und der Achse g.

H. LÜNEBURG, Mainz

Lösung; Sei O der Schnittpunkt $g \cap h$ der Geraden g, h und R ein nicht auf g, h oder $P\,Q$ liegender Punkt sowie R^β, R^γ seine Bildpunkte bei β, γ. Dann ist

$$R^{\beta\gamma} = R^\gamma P \cap R^\beta Q = R^{\gamma\beta} \neq R\,,$$

und für $f = R^{\beta\gamma} R$ folgt daraus $f^\beta = R^\beta R^\gamma = f^\gamma$. Da R nicht auf PQ liegt, geht f weder durch P noch durch Q, so dass $f \cap f^\beta = f \cap f^\gamma \in g, h$, also $f \cap R^\beta R^\gamma = O$ folgt. Daraus ergibt sich $R^\beta = R^\gamma O \cap P R$, und damit ist β eindeutig bestimmt.

Übrigens wurde bereits 1955 durch OSTROM (Canadian J. of Math. *8*, 563–567, Lemma 6) bewiesen (was sich auch leicht aus dem obigen Beweis ergibt), dass $\beta\,\gamma$ eine involutorische Kollineation mit Zentrum O und Achse PQ ist. Daraus erhält man sofort, dass β und γ auf PQ dieselbe Abbildung hervorrufen und daher einander eindeutig bestimmen.

G. PICKERT, Gießen

Aufgabe 520. Es seien r_i die Anradien, r der Inradius, t_i die Winkelhalbierenden, s der halbe Umfang, F die Fläche eines Dreiecks. Man beweise

$$\sum_{i=1}^{3} r_i\, t_i \leqslant F \left[1 - \frac{38}{27}\left(\frac{s}{r}\right)^2 + \left(\frac{8}{27}\right)^2 \left(\frac{s}{r}\right)^4\right]^{1/2}.$$

Gleichheit gilt nur für das gleichseitige Dreieck. (s/r ist minimal für das gleichseitige Dreieck.)

H. GUGGENHEIMER, University of Minnesota, USA

Solution; Let a_i ($i = 1, 2, 3$) denote the sides of the triangle. From the formulae

$$r_i = \sqrt{\frac{s\,(s - a_{i-1})\,(s - a_{i+1})}{s - a_i}}$$

and

$$t_i = \frac{2\sqrt{a_{i-1}\,a_{i+1}}}{a_{i-1} + a_{i+1}}\,\sqrt{s\,(s - a_i)}$$

(where the indices are taken mod 3) we obtain, by applying the inequality between the arithmetic and geometric means twice, the estimate

$$\sum r_i\, t_i \leqq s \sum_{i<j} \sqrt{(s - a_i)\,(s - a_j)} \leqq s^2\,;$$

equality holds if and only if $a_1 = a_2 = a_3$. It remains to prove that

$$s^2 \leqq F \left[1 - \frac{38}{27}\left(\frac{s}{r}\right)^2 + \left(\frac{8}{27}\right)^2 \left(\frac{s}{r}\right)^4\right]^{1/2},$$

or equivalently that $(x - 27)\,(64\,x - 27) \geqq 0$, with $x = (s/r)^2$. This follows immediately from the well-known inequality $(s/r)^2 \geqq 27$, in which equality holds if and only if the triangle is equilateral.

J. STEINIG, Zürich

Diese Lösung gibt eine Verschärfung der Ungleichung der Aufgabe, die auch O. REUTTER (Ochsenhausen) angegeben hat.

Weitere Lösungen sandten W. BUNDSCHUH (Freiburg/Br.), W. JÄNICHEN (Berlin), F. LEUENBERGER (Feldmeilen).

Neue Aufgaben

Aufgabe 541. Let I, O, H denote respectively the incenter, the circumcenter and the orthocenter of a triangle with sides a, b, c and the inradius r. Prove that the area K of the triangle IOH is given by

$$K = |\,(a - b)\,(b - c)\,(c - a)\,|/8\,r\,.$$

W. J. BLUNDON, Memorial Univ. of Newfoundland

Aufgabe 542. a) Trouver un exemple de trois nombres triangulaires distincts > 0, tels que la somme de deux quelconques d'eux est un nombre triangulaire.

b) Démontrer qu'il existe une infinité de tels triples de nombres triangulaires.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Aufgabe 543. Welche natürlichen Zahlen sind zugleich Fibonaccizahlen 1 2 3 5 8 13... und Lucaszahlen 2 1 3 4 7 11...? I. PAASCHE, München

Aufgabe 544. The formulas

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3}$$

are well known. Show that

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^n \binom{2n}{k}^r = (-1)^n \frac{(rn)!}{(n!)^r} \qquad (*)$$

is impossible for $r > 3$. L. CARLITZ, Duke Univ., USA

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur

1. Die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten lautet

$$\varrho = a\,(\sin 2\varphi + \cos 2\varphi)\,.$$

Berechne die eingeschlossene Fläche.

▶ $f = \pi a^2$. Mittels einer Drehung des Nullstrahls findet man leicht, dass es sich um eine vierblättrige Rosenkurve handelt.

2. In welchem Verhältnis wird die Fläche der Ellipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

durch die Parabel $y = 0{,}8\sqrt{3x}$ geteilt?

▶ $\lambda = 1{,}8894$.

3. Ein gerades Rohrstück der Höhe h soll einen kreisförmigen Querschnitt vom Radius r in einen gleich grossen quadratischen überführen. Der Mantel soll abwickelbar sein, das heisst, er besteht aus vier gleichschenkligen Dreiecken, die an die Quadratseiten anschliessen, und aus vier kongruenten Teilen eines Kegelmantels, deren Spitzen in den Quadratecken liegen. Berechne das Volumen des Rohrstücks.

▶ $$V = \frac{2}{3} r^2 h\,(\pi + \sqrt{\pi})\,.$$

Die Fläche des Querschnittes erweist sich als quadratische Funktion des Abstandes von einer Grundfläche, für die Volumenberechnung kann die Simpsonsche Formel verwendet werden.

4. Für die angenäherte Berechnung des Umfangs einer Ellipse mit den Halbachsen a und b gibt es eine Formel von BOUSSINESQ:

$$L \approx \pi \left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\right].$$

Sie verwendet das arithmetische und das geometrische Mittel von a und b und ist für kleine Werte von $b : a$ ($\leq 0{,}2$) unbrauchbar.

GOORMAGHTIGH (Mathesis, 1956) hat eine bessere Formel entwickelt, die noch das quadratische Mittel enthält:

$$L \approx \frac{\pi}{8}\left[9\,(a+b) - 5\sqrt{a\,b} + 3\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right].$$

Es sei $a = 1$. Für $b = 1$ geben beide Ausdrücke den richtigen Umfang. Die auf vier Dezimalen genauen Werte lauten für $b = 0{,}5$: $L = 4{,}8442$, für $b = 0{,}2$: $L = 4{,}2020$. Vergleiche damit die Näherungswerte.

5. Irgend ein Bogen der Kettenlinie

$$y = h\,\mathrm{Cos}\,\frac{x}{h}\,, \qquad a \leqq x \leqq b$$

rotiert um die x-Achse. Für das Volumen V und den Mantel F des erzeugten Rotationskörpers gilt

$$V = \frac{h}{2}\,F\,.$$

Die Eigenschaft ist kennzeichnend für die Kettenlinie. Aus

$$\pi \int\limits_a^x y^2\,dx = k\,2\,\pi \int\limits_a^x y\,\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

folgt neben $y \equiv 0$

$$y = 2\,k\,\mathrm{Cos}\,\frac{x+c}{2\,k}\,.$$

Literaturüberschau

Gesammelte Mathematische Schriften. Von CONSTANTIN CARATHÉODORY. Studienausgabe. Fünf Bände mit zusammen 2288 Seiten, fünf Porträts und zwei Faksimiles. Je Band DM 19.80. C. H. Beck, München 1966.

Wer die wissenschaftliche Bedeutung und die weltweite Geltung des Forschers CARATHÉODORY kennt, der wird das Erscheinen dieser Studienausgabe mit Genugtuung begrüssen.

Die 5 Bände umfassen in erster Linie seine Publikationen über Themen aus seinen drei grossen Interessensphären: der *Variationsrechnung* (nebst umfangreichen Anwendungen auf die geometrische Optik), dazu Historisches, der *Funktionentheorie*, dort vorwiegend Fragen im Zusammenhang mit den konformen Abbildungen und schliesslich der *Theorie der reellen Funktionen* (Mass und Integral). Eine Gruppe für sich bilden die Publikationen über Thermodynamik und Mechanik. Ein weit gespannter Rahmen; dies besonders wenn man in Betracht zieht, dass er sein Interesse diesen Disziplinen nicht nacheinander, sondern durch Jahrzehnte hindurch nebeneinander zugewandt hat. CARATHÉODORY war zu keiner Zeit Spezialist. Der 5. Band verdient eine besondere Bemerkung. Er umfasst Adressen, Besprechungen, Würdigungen, Autobiographisches, darunter etliche Meisterstücke ihrer Art, dies sowohl nach Form als auch nach Inhalt. Von Haus aus griechischer Zunge, im französischen Kulturkreis aufgewachsen und geschult, gewinnt er, bereits 30jährig, rasch eine fast selbstverständliche Sicherheit im Gebrauch der deutschen Sprache deren er sich stets mit der vorbildlichsten Sorgfalt bedient. Sorgfalt ist überhaupt ein charakteristischer Zug seines Wesens. CARATHÉODORY war ein Meister und grosser Liebhaber des analytischen Kalküls. Er gebot über dieses grossartige und machtvolle Instrument mathematischer Forschung in weiten Bereichen mit der grössten Sicherheit und Zweckmässigkeit. Der Kalkül wird stets mit strikter Strenge gehandhabt und nicht selten mit behutsamer Sorgfalt bis ins Detail durchgeführt. Ein nicht minder charakteristischer Zug seiner Geistesart äussert sich in dem häufig dominierenden Streben nach umfassender Allgemeinheit, sowohl hinsichtlich der Resultate als auch der Betrachtungsweise. Die jüngste Mathematikergeneration mag sich besonders von den Untersuchungen über Mass und Integral und einigen weitern Arbeiten aus diesem Zusammenhang angesprochen fühlen. Es handelt sich da um wichtige Etappen auf dem Weg zu der Form, in der diese