

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 22 (1967)  
**Heft:** 1

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*Nachtrag:* Nach der Durchsicht der Fahne stellt Verf. fest, dass das Ergebnis von Satz 1 in anderer Weise durch J. RIORDAN, *An Introduction to combinatorial analysis* (Wiley, New York 1958) S. 71 erzielt wurde.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] L. BAUMGARTNER, *Gruppentheorie*, de Gruyter, Berlin 1958 (3. Aufl.).  
 [2] CH. JORDAN, *Calculus of Finite Differences*, Chelsea, New York 1947 (2nd edition).  
 [3] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra I*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955 (4. Aufl.).

## Kleine Mitteilungen

## Zu einer Frage von E. Szekeres

Herrn Prof. Dr. W. SAXER zum 70. Geburtstag gewidmet

## 1. Einleitung und Antwort

In ihrem Beitrag «Eine Bemerkung zum Artikel: Wissenswertes um das Dreieck», *El. Math.* 21, 35–37 (1966), stellt ESTHER SZEKERES mit Recht fest, dass die Frage, welche Faktoren im allgemeinen Dreieck die Größenbeziehung von  $\Sigma F$  und  $\Sigma I$  bestimmen würden, noch offen sei. In der vorliegenden Note versuche ich, die Angelegenheit zu klären, wobei wie bei E. SZEKERES  $O, I, F, H$  in dieser Reihenfolge Um- und Inkreismittelpunkt, Mittelpunkt des Feuerbachkreises und Höhenschnittpunkt des Dreiecks sei. Doch bedeute  $\Sigma P$  die Summe der in üblicher Weise orientierten Abstände des Punktes  $P$  von den Dreiecksseiten. Damit gelten die folgenden Resultate nicht nur für das spitzwinklige Dreieck.  $R$  und  $r$  bezeichnen Um- und Inkreisradius des Dreiecks.

Eine Normale zu  $OI$  ist nach PRIMROSE Ort der Punkte mit gleicher Seitenabstandssumme (Beweise in [1] und [2]). Es sei  $O \cong I$ . Die Dreiecksebene wird von der durch  $I$  laufenden Geraden  $g \perp OI$  in zwei Halbebenen zerlegt, und wir brauchen einzig abzuklären, ob  $F$  und  $O$  in ein und derselben Halbebene liegen. Ist dies der Fall, so gilt  $\Sigma F > \Sigma I$ , da  $\Sigma O = R + r > 3r = \Sigma I$ . Ebenso ergibt sich  $\Sigma F \leq \Sigma I$ , je nachdem  $F$  in der  $O$  nicht enthaltenden Halbebene oder auf  $g$  liegt. Das bedeutet vorerst:

$$\nexists OIF \cong 90^\circ \text{ ist charakteristisch für } \Sigma F \cong \Sigma I$$

oder

$$OI^2 + IF^2 \cong OF^2 \Leftrightarrow \Sigma F \cong \Sigma I.$$

Aus  $OI = (R^2 - 2Rr)^{1/2}$ ,  $IF = (R - 2r)/2$  und  $OF = OH/2$  folgt damit

$$(R - 2r)(5R - 2r) \cong OH^2 \Leftrightarrow \Sigma F \cong \Sigma I, \quad (1)$$

wobei  $O \equiv I$  ersichtlich miteinbezogen werden kann.

Ist  $\varrho$  der (mit Vorzeichen versehene) Inkreisradius des Höhenfusspunktdreiecks, so lässt sich die Äquivalenzrelation wegen  $OH^2 = R^2 - 4R\varrho$  auf eine Form bringen, die auf der linken Seite nur noch Radien enthält:

$$R^2 - 3Rr + r^2 + R\varrho \cong 0 \Leftrightarrow \Sigma F \cong \Sigma I. \quad (2)$$

Soll die linke Seite neben  $R$  und  $r$  etwa den halben Dreiecksumfang  $s$  enthalten, so gewinnen wir aus (1) und der Identität  $OH^2 = 9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2s^2$ , deren Nachweis sich der Leser zurechtlegen mag, das merkwürdige Resultat

$$\frac{s^2}{Rr} + \frac{r}{R} - \frac{2R}{r} \cong 10 \Leftrightarrow \Sigma F \cong \Sigma I. \quad (3)$$

## 2. Zwei Spezialfälle

a) Das Bezugsdreieck ist rechtwinklig

Es gilt  $\varrho = 0$  und (2) schreibt sich

$$R^2 - 3Rr + r^2 \cong 0 \Leftrightarrow \Sigma F \cong \Sigma I,$$

Daraus gewinnen wir

$$r \geq \frac{R}{2} (3 - \sqrt{5}) \Leftrightarrow \Sigma F \geq \Sigma I \quad (4)$$

oder für den Fall der Gleichheit den

*Satz:* Im rechtwinkligen Dreieck hat der Mittelpunkt des Neunpunktekreises genau dann die gleiche Seitenabstandssumme wie der Inkreismittelpunkt, wenn der Inkreisradius gleich dem kleineren Abschnitt des stetig geteilten Umkreisradius ist.

Ein solches Dreieck kann also ohne weiteres konstruiert werden. Seine Fläche misst

$$R^2 (13 - 5\sqrt{5})/2 \approx 0,91 R^2.$$

b) *Dreiecke, bei welchen  $F$  auf der Inkreisperipherie liegt*

Unter dieser Voraussetzung erhalten wir auf unsere Frage eine bemerkenswert einfache Antwort. Für solche Dreiecke gilt einmal  $r = R/4$ , was aus  $IF = (R - 2r)/2 = r$  folgt; (1) entnehmen wir sodann

$$\frac{3R}{2} \geq OH \Leftrightarrow \Sigma F \geq \Sigma I. \quad (5)$$

Nun ist  $K(O, 3R/2)$  der Pferchkreis für die Punkte  $F$  aller dem Kreis  $k(O, R)$  eingeschriebenen Dreiecke, so dass (5) folgendes aussagt: Liegt  $F$  auf der Inkreisperipherie, so gilt  $\Sigma F \geq \Sigma I$ , je nachdem  $H$  äusserer, innerer oder Peripheriepunkt des *Pferchkreises*  $K$  von  $F$  ist.

F. LEUENBERGER, Feldmeilen

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] E. J. F. PRIMROSE, *A Triangle Property*, Math. Gaz. 45, note 2967, 231–232 (1961).  
 [2] J. STEINIG, *A Comparison of two Inequalities for the Triangle*, Acta Math. Scient. Hung. 16, 19–22 (1965).

### Einfache Beweise zweier Dreieckssätze

Die folgenden zwei Sätze betreffen Inhalt und Umfang eines einem gegebenen Dreieck einbeschriebenen Dreiecks. Das gegebene Dreieck,  $ABC$ , sei durch drei auf den Seiten liegende Punkte  $X, Y, Z$  in vier kleinere Dreiecke geteilt. Dann ist der Inhalt bzw. der Umfang des Dreiecks  $XYZ$  nicht kleiner als der kleinste Inhalt bzw. der kleinste Umfang der drei angrenzenden Dreiecke.

Beide Sätze wurden von P. ERDÖS und E. TROST entdeckt. Ein Beweis des Inhaltsatzes von A. BAGER erschien zuerst in *El. Math.* 12, 43 (1957) (Lösung der Aufgabe 260, (H. DEBRUNNER)). Der Satz wurde 1960 als Problem 4908 in *Amer. Math. Monthly* gestellt (RAINWATER) und 1961 ebendort S. 386 bewiesen. Der Umfangssatz erschien als Problem 4964 in *Amer. Math. Monthly*, 1961 (E. TROST und A. BAGER) und wurde 1962 ebendort S. 672 bewiesen. Eine weitere Lösung gab 1965 H. T. CROFT in *Mathematical Gazette*, Vol. 49, Nr. 367, S. 45.

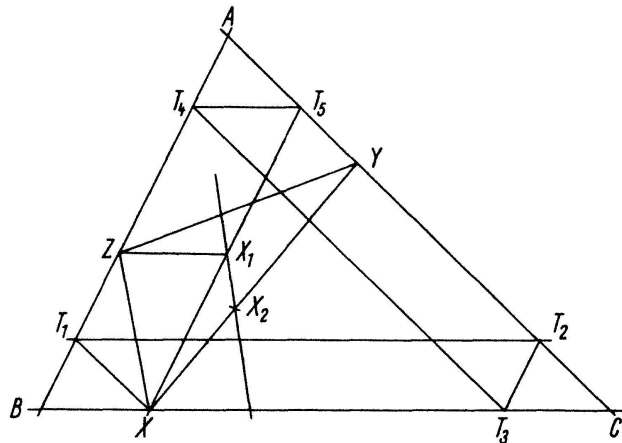
Diese Beweise sind entweder trigonometrisch oder sie beruhen auf einer stufenweisen Veränderung der Figur, wobei  $X, Y, Z$ , in die Mittelpunkte der betreffenden Seiten geschoben werden. Die folgenden einfachen Beweise beider Sätze liefern in jedem Falle ein angrenzendes Dreieck mit der gewünschten Minimaleigenschaft. «Kleiner» ist dabei im Sinne «kleiner oder gleich» benutzt.

a) Es seien  $X, Y, Z$ , beliebige Punkte auf den Seiten  $BC, AC, AB$ , des Dreiecks  $ABC$ . Wir betrachten die sechs Streckenverhältnisse  $BX:BC, XC:BC, CY:AC$ , usw. Wir können annehmen, dass alle sechs Verhältnisse grösser oder gleich  $BX:BC$  sind.

In Figur 1 ist  $XT_1 \parallel AC, T_1T_2 \parallel BC, T_2T_3 \parallel AB, T_3T_4 \parallel AC, T_4T_5 \parallel BC, T_5X \parallel AB$ . Offenbar liegen dann  $Y$  und  $Z$  auf den Strecken  $T_2T_5$  und  $T_1T_4$ . Es sei  $X_1$  so bestimmt, dass  $ZBXX_1$  ein Parallelogramm ist und  $X_2$  ist ein Punkt auf  $XY$ , so dass  $X_1X_2 \parallel ZX$  ist. Dann gilt:

$$\text{Inhalt } XBZ = \text{Inhalt } ZX_1X = \text{Inhalt } ZX_2X \leq \text{Inhalt } ZYX.$$

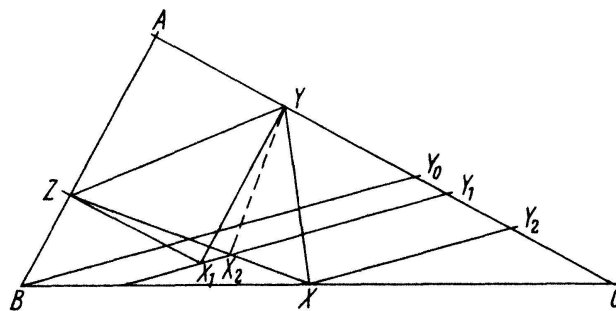
Damit ist das Inhaltsproblem bewiesen.



Figur 1

b) Das gegebene und das einbeschriebene Dreieck sollen wieder mit  $ABC$ , bzw.  $XYZ$  bezeichnet werden. Wir wollen feststellen, unter welchen Umständen der Umfang des Dreiecks  $AZY$  kleiner als der Umfang des Dreiecks  $XZY$  ist. In Figur 2 sei die Seite  $AB$  kleiner als die Seite  $AC$ , ferner  $AY_0 = AB$ ,  $AZX_1Y$  ein Parallelogramm,  $X_1Y_1 \parallel BY_0$ ,  $XY_2 \parallel BY_0$  und  $X_2$  der Schnittpunkt von  $ZX$  und  $X_1Y_1$ . Da die Geraden  $ZX_1$  und  $X_1Y$  gleiche Winkeln mit der Geraden  $X_1Y_1$  einschliessen, ist nach einem wohlbekannten Satze der Weg  $ZX_1Y$  kürzer als der Weg  $ZX_2Y$ , und wir haben in Figur 2:

$$\text{Umfang } AZY = \text{Umfang } ZX_1Y \leq \text{Umfang } ZX_2Y \leq \text{Umfang } ZXY .$$



Figur 2

Die letztgenannte Ungleichung gilt, falls  $CY_2 \leq CY_1$  ist. ( $CY_2, CY_1$ , usw. sollen immer die Längen der betreffenden Strecken bezeichnen.) Wir berechnen diese Längen:

$$CY_2 = (AC - AB) CX / CB \tag{1}$$

$$CY_1 = AC - AY - YY_1 = AC - AY - YX_1 = AC - AY - AZ . \tag{2}$$

Die Bedingung  $CY_2 \leq CY_1$  wird erfüllt, wenn

$$XC (AC - AB) + BC (AY + AZ) \leq AC \cdot BC . \tag{3}$$

Ähnliche hinreichende Bedingungen können wir für die Dreiecke  $CXY$  und  $BZX$  erhalten. Nehmen wir an, dass  $AB \leq AC \leq BC$  ist, dann sind

$$BZ (BC - AC) + AB (CX + CY) \leq BC \cdot AB , \tag{4}$$

$$CY (BC - AB) + AC (BX + BZ) \leq BC \cdot AC \tag{5}$$

die betreffenden Ungleichungen.

Wir wollen zeigen, dass wenigstens eine der drei Ungleichungen immer erfüllt ist. Nehmen wir an, dass (3) und (5) beide nicht gelten. Durch Addition erhalten wir dann  $XC (AC - AB) + BC (AY + AZ) + CY (BC - AB) + AC (BX + BZ) \geq 2 AC \cdot BC$  oder

$$AC (BX + XC) + BC (AY + YC) - AB (XC + CY) + BC \cdot AZ + AC \cdot BZ \geq 2 AC \cdot BC \tag{6}$$

Setzen wir nun  $AZ = AB - BZ$ , dann wird (6) identisch mit (4). Damit ist der Satz bewiesen.

ESTHER SZEKERES, University of Sydney