Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 22 (1967)
Heft: 6

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 27.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

[2] W. BLASCHKE, Über affine Geometrie III: *Eine Minimumeigenschaft der Ellipse*, Leipziger Berichte *69*, 3–12 (1917).
[3] B. A. DE VALCOURT, *Measures of Axial Symmetry for Ovals*, Israel Journal of Math. *4*, 65–82 (1966).
[4] H. G. EGGLESTON, *Convexity*, Cambridge 1963.
[5] H. G. EGGLESTON, *On Triangles Circumscribing Plane Convex Sets*, J. London Math. Soc. *28*, 36–46 (1953).
[6] H. G. EGGLESTON, *Squares Contained in Plane Convex Sets*, Quart. Jour. Math., Oxford Series (2), *10*, 261–269 (1959).
[7] H. G. EGGLESTON and S. J. TAYLOR, *On the Size of Equilateral Triangles which may be inscribed in Curves of Constant Width*, J. London Math. Soc. *27*, 438–448 (1952).
[8] B. GRÜNBAUM, *Measures of Symmetry for Convex Sets*, Proc. of Symposia in Pure Mathematics, Vol. VII, Convexity; Am. Math. Soc., Providence, R.I. 1963.
[9] H. HADWIGER, H. DEBRUNNER and V. KLEE, *Combinatorial Geometry in the Plane*, Holt, Rinehart and Winston, New York 1964.
[10] J. L. HODGES, *An Extremal Problem of Geometry*, J. Lond. Math. Soc. *26*, 311–312 (1951).
[11] W. NOHL, *Die innere axiale Symmetrie zentrischer Eibereiche der euklidischen Ebene*, El. Math. *17*, 59–63 (1962).
[12] K. RADZISZEWSKI, *Sur un problème extrémal relatif aux figures inscrites et circonscrites aux figures convexes*, C. r. Acad. Sci. Paris *235*, 771–773 (1952).
[13] I. M. YAGLOM and V. G. BOLTYANSKIJ, *Convex Figures* (translated by PAUL J. KELLY and LEWIS F. WALTON), Holt, Rinehart and Winston, New York 1961.
[14] K. ZINDLER, *Über konvexe Gebilde, I, II, III*, Mh. Math. Phys. *30*, 87–102 (1920); *31*, 25–56 (1921); *32*, 107–138 (1922).

Kleine Mitteilungen

Bestimmung einer oberen Schranke für den Inhalt des Parallelrisses eines regelmässigen Körpers

1. Im dreidimensionalen euklidischen Raum E_3 gibt es bekanntlich fünf regelmässige, konvexe oder PLATONische Körper. Ist s eine beliebige Sehstrahlrichtung und π eine zu s normale Bildebene, so ist der scheinbare Umriss eines solchen PLATONischen Körpers Π ein ebenes konvexes Polygon Π^n, das im folgenden kurz als der Normalriss von Π bezeichnet werden soll; F sei sein Flächeninhalt. Das PLATONische Polyeder Π habe p (untereinander kongruente und regelmässige) Polygone zu Seitenflächen s_i ($i = 1, 2, \ldots p$), die alle denselben Flächeninhalt f besitzen. Ist ε_i die Trägerebene von s_i und α_i der Neigungswinkel von ε_i gegen die Bildebene π, so hat der Normalriss s_i^n von s_i einen durch

$$f_i = f \cos \alpha_i \tag{1}$$

gegebenen Flächeninhalt. Da jeder Sehstrahl s, der mit dem konvexen Polyeder Π innere Punkte gemeinsam hat, den Rand $\mathfrak{R}(\Pi)$ von Π in genau zwei Punkten trifft, ist jeder innere Punkt des Normalrisses Π^n von Π Normalriss von genau zwei Punkten des Randes $\mathfrak{R}(\Pi)$ von Π und es gilt mithin für den Flächeninhalt F von Π^n:

$$2\,F = \sum_{i=1}^{p} f_i\,. \tag{2}$$

Ist O der Mittelpunkt des PLATONischen Körpers und O_i der Mittelpunkt seiner Seitenfläche s_i, so ordnen wir jeder Seitenfläche s_i einen zum Vektor $\overrightarrow{OO_i}$ proportionalen Vektor $\mathfrak{m}_i$ zu, dessen Betrag mit dem Inhalt f von s_i übereinstimmt. Jeder Vektor $\mathfrak{m}_i$ steht somit auf der Trägerebene ε_i von s_i normal; die Spitzen der Vektoren $\mathfrak{m}_i$ bestimmen in ihrer Gesamtheit als von O ausgehende Ortsvektoren ein zu dem gegebenen PLATONischen Polyeder Π «duales» regelmässiges Polyeder.

Die Bestimmung einer oberen Schranke für den Flächeninhalt F der Normalprojektion Π^n von Π gründen wir auf die folgenden Bemerkungen:

a) Die Normalprojektion jedes Vektors $\mathfrak{m}_i$ auf einen Sehstrahl s hat die Länge f_i.

b) Das Vektorsystem $\{\mathfrak{m}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots p$ hat als System der vom Mittelpunkt O eines regelmässigen Polyeders zu dessen Eckpunkten weisenden Ortsvektoren die Eigenschaft $\mathfrak{P}$, d.h. die Quadratsumme ihrer Normalprojektionen auf eine Gerade g des E_3 hängt nicht von der Richtung der Geraden g ab (vgl. hiezu [1] und für das regelmässige Tetraeder auch [2] und W. JÄNICHEN [3] und [4]).

Sind h_1, h_2 und h_3 drei paarweise orthogonale Geraden des E_3 und ist Q der auf jeder dieser Geraden h_i bestimmte Wert der Quadratsumme der Normalprojektionen der Vektoren $\{\mathfrak{m}_i\}$, so gilt

$$3\,Q = \sum_{i=1}^{p} \mathfrak{m}_i^2 = p\,f^2\,, \quad \text{also} \quad Q = \sum_{i=1}^{p} f_i^2 = \frac{p}{3}\,f^2\,. \tag{3}$$

Da die Funktion $y = x^2$ nach unten konvex ist, gilt die JENSENsche Ungleichung in der Form (vgl. hiezu [5]):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqq \sqrt{n}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{4}$$

mit Gleichheit nur für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Aus den Ungleichungen (2) und (3) folgt nun für den Inhalt F des Normalrisses Π^n von Π:

$$F \leqq \frac{p}{2\sqrt{3}}\,f\,, \tag{5}$$

wobei Gleichheit nur für $f_1 = f_2 = \ldots = f_p$ gilt, d.h. wenn alle Trägerebenen ε_i der Seitenflächen s_i gegen die Sehstrahlrichtung s gleich geneigt sind. Somit erhalten wir

Satz 1. *Ist Π ein* PLATON*ischer Körper des dreidimensionalen euklidischen Raumes E_3 mit p Seitenflächen vom Flächeninhalt f, so gilt für den Inhalt F seines Normalrisses Π^n stets die Ungleichung*

$$F \leqq \frac{p}{2\sqrt{3}}\,f\,,$$

wobei Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn die Trägerebenen der Seitenflächen s_i von Π gegen die Sehstrahlrichtung gleich geneigt sind.

2. An Satz 1 schliessen wir noch folgende Bemerkungen an:

a) Für ein regelmässiges Tetraeder kann Gleichheit nur dann gelten, wenn die Sehstrahlrichtung zum Gemeinlot eines Paares windschiefer Gegenkanten parallel ist. Der Normalriss Π^n von Π ist dann ein Quadrat, dessen Diagonalen von den Normalrissen der zur Bildebene parallelen Kanten des Tetraeders gebildet werden. Es gilt daher stets die Ungleichung

$$F_{\text{Tetraeder}} \leqq \frac{1}{2}\,k^2\,, \tag{6}$$

wobei k die Länge der Tetraederkante bedeutet.

b) Für einen Würfel, dessen Seitenkante die Länge k hat, gilt in (5) Gleichheit genau dann, wenn die Sehstrahlrichtung zu einer Raumdiagonale des Würfels parallel ist; der Normalriss des Würfels ist dann ein regelmässiges Sechseck. Es gilt daher stets die Ungleichung

$$F_{\text{Würfel}} \leqq \sqrt{3}\,k^2\,. \tag{7}$$

c) Für ein regelmässiges Oktaeder, dessen Seitenkanten die Länge k haben, gilt in (5) Gleichheit dann und nur dann, wenn die Sehstrahlrichtung zu einer Raumdiagonale des Oktaeders parallel ist. Der Normalriss ist dann ein Quadrat und es gilt:

$$F_{\text{Oktaeder}} \leqq k^2\,. \tag{8}$$

d) Bei einem (Pentagon-) Dodekaeder und einem regelmässigen Ikosaeder kann in Ungleichung (5) die obere Schranke nicht angenommen werden, da es keine Sehstrahlrichtung gibt, die zu allen Seitenflächen gleich geneigt ist.

e) Der Fall des Schrägrisses kann auf den Normalriss zurückgeführt werden; ist nämlich für eine Sehstrahlrichtung s der Inhalt F des Normalrisses Π^n eines konvexen Polyeders Π, so gilt für den Inhalt F^* des Schrägrisses Π^s von Π:

$$F^* \cos\left(\nu - \frac{\pi}{2}\right) = F \tag{9}$$

wobei ν den Neigungswinkel der Sehstrahlrichtung gegen die Bildebene des Schrägrisses bedeutet. Somit gilt

Satz 2. *Ist Π ein* PLATON*ischer Körper mit p Seitenflächen, die den Inhalt f besitzen, so gilt für den Inhalt F seines Schrägrisses stets*

$$F^* \leqq \frac{p\,f}{2\sqrt{3}\sin\nu}, \tag{10}$$

wobei ν den Neigungswinkel der Sehstrahlen gegen die Bildebene bezeichnet. Gleichheit gilt genau dann, wenn alle Seitenflächen des PLATON*ischen Körpers zu den Sehstrahlen gleich geneigt sind.*

f) Das hier durchgeführte Verfahren kann zwanglos auf den n-dimensionalen euklidischen Raum E_n übertragen werden, um für die regelmässigen Polytope des E_n den Inhalt ihrer Parallelrisse auf einen $(n-1)$-dimensionalen linearen Unterraum nach oben abzuschätzen. Dies soll jedoch – ebenso wie die entsprechende Abschätzung nach unten – einer weiteren Note vorbehalten bleiben.

HANS VOGLER, Wien

LITERATUR

[1] H. VOGLER, *Über die Normalprojektionen von Vektorsystemen im n-dimensionalen euklidischen Raum*, Sber. Akad. Wiss. Wien, mat.-nat., II, *173*, 299–329 (1965).
[2] H. VOGLER, *Über die Normalprojektionen des Simplex eines n-dimensionalen euklidischen Raumes*, Sber. Akad. Wiss. Wien, mat.-nat., II, *173*, 29–57 (1964).
[3] W. JÄNICHEN, *Aufgabe Nr. 458*, El. Math. *18*, 92 (1963).
[4] W. JÄNICHEN, *Über ein Tetraederproblem*, El. Math. *19*, 83–87 (1964).
[5] J. L. JENSEN, *Sur les fonctions convexes et les inéqualités entre les valeurs moyennes*, Acta Matematica *30*, 175–193 (1906).

Einfacher Beweis und Verallgemeinerung einer Dreiecksungleichung

Einleitung. Es sei P ein beliebiger Punkt im Innern oder auf dem Rande eines Dreiecks $A_1A_2A_3$. Wir bezeichnen mit R_i $(i = 1, 2, 3)$ den Abstand PA_i, mit r_i den Abstand der Seiten $A_{i+1}A_{i+2}$ von P, mit h_i $(i = 1, 2, 3)$ die Höhen und mit r den Radius des Inkreises. Bekannt sind die drei folgenden Ungleichungen

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 2\,(r_1 + r_2 + r_3) \tag{1}$$

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 6\,r \tag{2}$$

$$h_1 + h_2 + h_3 \geqq 9\,r \tag{3}$$

(1) ist die berühmte ERDÖS-MORDELLsche Ungleichung [1]; (2) stammt von M. SCHREIBER [2]; (3) findet man bei LEUENBERGER [3]. Wir untersuchen die Zusammenhänge zwischen den Ungleichungen (1) und (3) und die Verallgemeinerungen dieser Ungleichungen im n-dimensionalen Raum E^n.

Satz I. Die Ungleichung (2) folgt aus (1) und (3) auf elementare Weise.

Beweis. Bedeutet $A(x_i)$ das arithmetische Mittel der Grössen x_i $(x_i > 0;\ i = 1, 2, 3)$, so gilt:

$$3\,r \leqq A(h_i) \leqq A(R_i + r_i) = A(R_i) + A(r_i) \leqq A(R_i) + 0{,}5\,A(R_i) = 1{,}5\,A(R_i)$$

Nun betrachten wir die Verallgemeinerungen für den n-dimensionalen Raum E^n!

Es bedeute jetzt R_i $(i = 0, 1, 2, \ldots n)$ den Abstand PA_i, wo P ein beliebiger Punkt im Innern oder auf dem Rande des n-dimensionalen Simplex $A_0A_1A_2 \ldots A_n$ ist; r und h_i haben dieselbe Bedeutung wie in der Einleitung (Inkugelradius und Höhen); V ist der Inhalt des Simplex.

Bekannt ist die Verallgemeinerung von (3) auf E^n [4]. Jetzt beweisen wir:

Satz II. Es gilt folgende Verallgemeinerung von (2) auf den E^n:

$$R_0 + R_1 + R_2 + \ldots + R_n \geqq (n+1)\, n\, r. \tag{2*}$$

Beweis. Die Ungleichung von PETTY und WATERMAN lautet [5]:

$$\sum_{i=0}^{n} R_i \geqq (n+1)^{(n-1)/2n}\, (n!)^{1/n}\, V^{1/n} \sqrt{n}. \tag{I}$$

Andererseits findet man bei L. FEJES TÓTH auch eine Simplexungleichung [6]:

$$V \geqq \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{n!}\, n^{n/2}\, r^n. \tag{II}$$

Wenden wir die Substitution von (II) in der Ungleichung (I) an, so ergibt sich:

$$A(R_i) = \frac{\sum_{i=0}^{n} R_i}{n+1} \geqq n\, r.$$

Für $n = 3$ lautet die Ungleichung:

$$R_0 + R_1 + R_2 + R_3 \geqq 12\, r.$$

Bemerkungen. Die vollständige Verallgemeinerung von (1) für $n = 3$ ist noch nicht bekannt. Vielleicht geben eine Arbeit von J. STEINIG [6] und diese Arbeit gewisse Stützpunkte in dieser Richtung.

Der Verfasser dankt Herrn J. STEINIG für nützliche Bemerkungen.

J. BERKES, Szeged

LITERATURVERZEICHNIS

[1] MORDELL, L. J., *Lösung der Aufgabe 3740 von P. Erdös*, Amer. Math. Monthly *44*, 252 (1937).
[2] M. SCHREIBER, *Aufgabe 196*, Jber. dtsch. Math.-Ver. *45* (1935).
[3] F. LEUENBERGER, *Einige Dreiecksungleichungen*, El. Math. *13*, 121–126 (1958).
[4] F. LEUENBERGER, *Extremaleigenschaften der wichtigsten Ecktransversalen des n-dimensionalen Simplex*, El. Math. *15*, 81–82 (1960).
[5] PETTY und WATERMAN, *An Extremal Theorem for N-Simplexes*, Monatshefte Math. *59*, 320–322 (1955).
[6] J. STEINIG, *A Comparison of Two Inequalities for the Triangle*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. *16*, 19–22 (1965).

Aufgaben

Aufgabe 537. Ein gegebener Kreis K wird von zwei zueinander orthogonalen Kreisen K_1, K_2, die durch einen festen Punkt F seiner Ebene gehen, berührt. Welches ist der geometrische Ort der Ähnlichkeitszentren von K_1 und K_2?

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung des Aufgabenstellers: Durch eine Inversion mit Zentrum F, die K in sich überführt, gehen K_1 und K_2 in zwei zueinander senkrechte Tangenten K_1', K_2' über. Dem