

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 22 (1967)
Heft: 1

Artikel: Über eine Vertauschbarkeit von Addition und Multiplikation
Autor: Spilker, J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-25350>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über eine Vertauschbarkeit von Addition und Multiplikation

Sei N die Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, \dots$ versehen mit der üblichen Addition und Multiplikation. Es bezeichne α die Additionsabbildung

$$\alpha: N \times N \rightarrow N: (a, b) \rightarrow a + b$$

und μ die Multiplikationsabbildung

$$\mu: N \times N \rightarrow N: (a, b) \rightarrow a b .$$

Eine bijektive Abbildung $\pi: N \times N \rightarrow N$ heisst Peano-Abbildung. Mit diesen Bezeichnungen lautet ein Problem von ULAM ([3], Seite 32): Gibt es eine Peano-Abbildung π , so dass $\mu \pi^{-1} \alpha = \alpha \pi^{-1} \mu$ auf $N \times N$ gilt? Diese Frage ist von GAO [1] und KOPFERMANN [2] negativ beantwortet worden. Es stellt sich deshalb das folgende Problem: Existieren zwei Peano-Abbildungen π und ϱ mit der Eigenschaft $\mu \pi^{-1} \alpha = \alpha \varrho^{-1} \mu$? Allgemeiner kann man fragen, in welchem Sinne Addition und Multiplikation vertauschbar oder nicht vertauschbar sind. Ein Resultat in dieser Richtung enthält der

Satz: 1. *Es gibt keine Peano-Abbildungen $\pi, \varrho, \sigma, \tau$ mit $\sigma^{-1} \mu \pi^{-1} \alpha = \tau^{-1} \alpha \varrho^{-1} \mu$ auf $N \times N$.*

2. *Es gibt Peano-Abbildungen $\pi, \varrho, \sigma, \tau$ mit $\mu \pi^{-1} \alpha \sigma^{-1} = \alpha \varrho^{-1} \mu \tau^{-1}$ auf N .*

Um den ersten Teil des Satzes zu beweisen, nehme man an, es gäbe Peano-Abbildungen $\pi, \varrho, \sigma, \tau$, für die das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \alpha & & & & \\ & & \nearrow & & \xrightarrow{\pi^{-1}} & & \searrow \\ & & N & \xrightarrow{\mu} & N \times N & \xrightarrow{\sigma^{-1}} & N \\ & & & & & & \searrow \\ N \times N & & & & & & N \times N \\ & & \searrow & & \xrightarrow{\varrho^{-1}} & & \nearrow \\ & & N & \xrightarrow{\alpha} & N \times N & \xrightarrow{\tau^{-1}} & N \end{array}$$

Offenbar ist $\alpha^{-1}(n)$ nur für $n = 1$ leer, was $\pi \mu^{-1} \sigma \tau^{-1}(1) = \{1\}$ zur Folge hat, und $\mu^{-1}(n)$ nur für $n = 1$ einelementig, weshalb $\sigma \tau^{-1}(1) = \{1\}$ gilt. Ferner enthält $\pi \mu^{-1} \sigma \tau^{-1}(2)$ zwei verschiedene Elemente $a > 1, b > 1$. Weil $\varrho \alpha^{-1}(2)$ einelementig ist, folgt $\mu(1, a - 1) = \mu(1, b - 1)$ und daraus der Widerspruch $a = b$.

Im nachfolgenden zweiten Teil des Beweises werden induktiv Peano-Abbildungen π, ϱ sowie eine Bijektion φ von $N \times N$ auf sich konstruiert, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & \alpha & & \xrightarrow{\pi^{-1}} & & \searrow \\ & & N \times N & \xrightarrow{\mu} & N \times N & \xrightarrow{\mu} & N \\ & & \downarrow \varphi & & & & \searrow \\ N \times N & & \xrightarrow{\mu} & N & \xrightarrow{\varrho^{-1}} & N \times N & \xrightarrow{\alpha} \end{array}$$

kommutativ machen. Weil am rechten Ende des Diagramms jede natürliche Zahl $n > 1$ auftreten kann, definiere man $\pi(1, 1) := 1$ und weiter

$$\pi(1, 2) := 2, \pi(2, 1) := 3,$$

$$\varrho(1, 1) := 4,$$

$$\varphi(1, 1) := (1, 4), \varphi(1, 2) := (2, 2), \varphi(2, 1) := (4, 1) .$$

Dann kommutiert die Figur für alle Urbilder von $n = 2$, nämlich für $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$. Für ein $n > 2$ seien Injektionen π von $\mu^{-1}\{1, 2, \dots, n-1\}$ in N und ϱ von $\alpha^{-1}\{1, 2, \dots, n-1\}$ in N sowie eine Bijektion φ von $\alpha^{-1}\pi\mu^{-1}\{1, \dots, n-1\}$ auf $\mu^{-1}\varrho\alpha^{-1}\{1, \dots, n-1\}$ so definiert, dass das Diagramm kommutativ ist. Hat dann n die Primfaktorzerlegung $n = \prod_{\nu} p_{\nu}^{q_{\nu}}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_{ν} , so existieren genau $m_n := \prod (q_{\nu} + 1)$ formal verschiedene Zerlegungen $n = a_{\nu} b_{\nu}$ in natürliche Zahlen a_{ν}, b_{ν} ($1 \leq \nu \leq m_n$). Wenn $N - \varrho\alpha^{-1}\{1, \dots, n-1\} =: \{c_1, c_2, \dots\}$ mit $c_1 < c_2 < \dots$ ist, dann definiere man $\varrho(1, n-1) := c_1$, $\varrho(2, n-2) := c_2, \dots$, $\varrho(n-2, 2) := c_{n-2}$.

Ferner setze man $\pi(a_1, b_1) := d_1, \dots, \pi(a_{m_n-1}, b_{m_n-1}) := d_{m_n-1}$, sofern $N - \pi\mu^{-1}\{1, \dots, n-1\} =: \{d_1, d_2, \dots\}$ mit $d_1 < d_2 < \dots$ gilt. Sodann wähle man $\pi(a_{m_n}, b_{m_n})$ aus $N - (\pi\mu^{-1}\{1, \dots, n-1\} \cup \{d_1, \dots, d_{m_n-1}\})$ so gross, dass

$$\pi(a_1, b_1) + \dots + \pi(a_{m_n}, b_{m_n}) - m_n \geq m_{\varrho(1, n-1)} + \dots + m_{\varrho(n-2, 2)} + 2$$

gilt. Da es beliebig grosse natürliche Zahlen l gibt, für die m_l einen vorgegebenen Wert ≥ 2 hat, kann man eine Zahl $\varrho(n-1, 1)$ aus $N - (\varrho\alpha^{-1}\{1, \dots, n-1\} \cup \{c_1, \dots, c_{n-2}\})$ mit der Eigenschaft

$$\pi(a_1, b_1) + \dots + \pi(a_{m_n}, b_{m_n}) - m_n = m_{\varrho(1, n-1)} + \dots + m_{\varrho(n-2, 2)} + m_{\varrho(n-1, 1)}$$

bestimmen. Dann haben die Mengen $\alpha^{-1}\pi\mu^{-1}(n)$ und $\mu^{-1}\varrho\alpha^{-1}(n)$ gleiche Elementezahl, und φ lässt sich fortsetzen zu einer Bijektion von $\alpha^{-1}\pi\mu^{-1}\{1, \dots, n\}$ auf $\mu^{-1}\varrho\alpha^{-1}\{1, \dots, n\}$. Auf diese Weise sind rekursiv Peano-Abbildungen π, ϱ und eine Bijektion φ von $N \times N$ auf sich mit der Eigenschaft $\mu\pi^{-1}\alpha = \alpha\varrho^{-1}\mu\varphi$ konstruiert. Nimmt man für τ schliesslich eine beliebige Peano-Abbildung und setzt $\sigma := \tau\varphi$, dann gilt $\mu\pi^{-1}\alpha\sigma^{-1} = \alpha\varrho^{-1}\mu\tau^{-1}$, womit auch der zweite Teil des Satzes bewiesen ist.

J. SPILKER, Freiburg i. Br.

LITERATUR

- [1] H. GAO, *Solution to a Problem of S. Ulam*, Sci. Sinica 13, 1005–1006 (1964).
- [2] K. KOPFERMANN, *Lösung eines Problems über Peano-Abbildungen*, Math.-Phys. Semesterber. 10, 273–275 (1964).
- [3] S. ULAM, *A Collection of Mathematical Problems*, Interscience, New York 1960.

Zur Zerlegung von Permutationen in elementfremde Zyklen

1. Definitionen und Bezeichnungen

Ausgehend von der Tatsache, dass jede Permutation φ abgesehen von der Reihenfolge auf genau eine Weise in elementfremde Zyklen zerfällt¹⁾, ordnen wir φ ihre *Zyklenzahl* $z(\varphi)$ zu; hierbei sind die eingliedrigen Zyklen mitzuzählen. Eine Permutation φ von n Elementen mit $z(\varphi) = k$ nennen wir fortan eine (n, k) -Permutation, und es bezeichne $p(n, k)$ deren Anzahl. Die $(n, 1)$ -Permutationen werden auch «zyklisch» genannt, und im Falle $n \geq 2$ heissen die $(n, n-1)$ -Permutationen *Transpositionen*.

Es sollen in dieser Note die Zahlen $p(n, k)$ bestimmt und eine durch sie auf natürliche Weise induzierte Klassifikation der Permutationen betrachtet werden. Dabei beschränken wir uns auf die Behandlung des nichtentarteten Falles $1 \leq k \leq n$.

¹⁾ Vergleiche zum Beispiel [1], p. 10 oder [3], p. 28.