

<b>Zeitschrift:</b>	Elemente der Mathematik
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	22 (1967)
<b>Heft:</b>	1
<b>Artikel:</b>	Ein mechanisches Modell zur Lösung gewisser Extremalaufgaben
<b>Autor:</b>	Giering, O.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-25349">https://doi.org/10.5169/seals-25349</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ein mechanisches Modell zur Lösung gewisser Extremalaufgaben

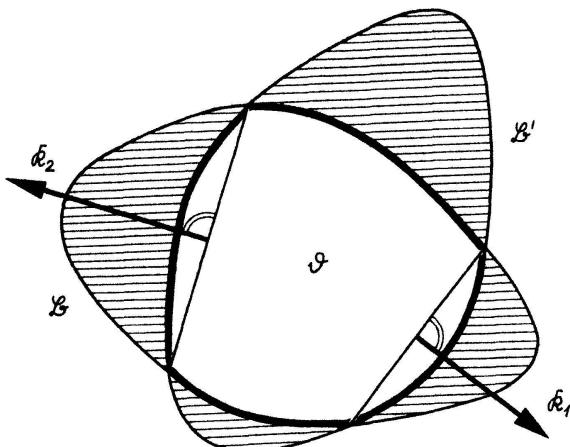
Herrn Prof. Dr. O. BAIER zum 60. Geburtstag gewidmet

**1.** Mechanische Interpretationen leisten zur Behandlung geometrischer Probleme oft wertvolle Dienste. Man denke etwa an die bereits von Archimedes angewandte Hebelmethode zur Bestimmung des Flächeninhalts eines Parabelsegments und des Volumens einer Kugel [9, S. 5ff.], an die Ermittlung der Differentialgleichung der geodätischen Linien einer Fläche mit Hilfe der Vorstellung eines zwischen zwei Flächenpunkten gespannten Fadens [2, S. 102; 3] oder an die Aufgabe, in einem Dreieck  $A BC$  einen Punkt  $P$  so zu finden, dass die Summe seiner Abstände von  $A$ ,  $B$  und  $C$  minimal ist [4, S. 222; 5, S. 101]. In jedem der angeführten Fälle wird die gestellte geometrische Bedingung durch eine leichter zu handhabende Gleichgewichtsbedingung ersetzt. Ein solches, bisher wohl unbekanntes *Gleichgewichtsverfahren* wird auch im folgenden vorgestellt und angewendet. Wenn auch dabei keine Verfahren mit mathematischem Beweischarakter vorliegen, so pflegen derartige Betrachtungen doch die Verbindung zur Mechanik und bilden einen wünschenswerten Beitrag zur Pflege der Anschauung in der Mathematik [6, 8].

Wir legen in eine Ebene  $\varepsilon$  zwei beschränkte, einfach zusammenhängende und stückweise glatt berandete Bereiche  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$ , die sich in  $\varepsilon$  nicht derart verschieben lassen, dass einer den andern vollständig bedeckt, und fragen nach jenen gegenseitigen Lagen dieser Bereiche in  $\varepsilon$ , in denen ihr Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  maximal, also ihre Vereinigungsmenge minimal ist. Im Hinblick auf die in 4. folgende Anwendung beschreiben wir das Verfahren an zwei *nicht axialsymmetrischen konvexen Bereichen  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$ , wobei  $\mathfrak{B}'$  aus  $\mathfrak{B}$  durch Spiegelung an einer Geraden entsteht* (Figur 1). Im allgemeinen Fall lässt sich das Verfahren in analoger Weise anwenden. Die gegenseitige Lage von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  in  $\varepsilon$  hängt von drei Parametern ab, die man zur Auffindung der maximalen Durchschnitte  $\mathfrak{D}$  in einem dreidimensionalen abgeschlossenen Gebiet variieren lassen kann, dessen zweidimensionale Randpunktmenge zu leeren Durchschnitten  $\mathfrak{D}$  führt; es gibt also keine Randmaxima. Die Durchschnitte  $\mathfrak{D}$  bilden eine beschränkte Funktion dieser drei Parameter und besitzen, wenn diese Funktion stetig ist, nach einem bekannten Satz über stetige Funktionen ein Maximum [1, S. 60], das nicht notwendig in nur einer gegenseitigen Lage von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  angenommen wird. Den Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  als Funktion dieser gegenseitigen Lagen anzugeben und die Maxima dieser Funktion zu bestimmen, dürfte selbst bei einfachen Bereichen  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{B}'$  sehr schwierig sein. Die folgende mechanische Überlegung umgeht einen Teil dieser Schwierigkeiten, indem sie gewisse Durchschnitte aussondert, unter denen das absolute Maximum zu suchen ist.

**2.** Zur Auffindung der Lagen von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  mit maximalem Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  denken wir uns die Randkurven dieser Bereiche als dünne Drahtringe realisiert, die reibungsfrei übereinander hinweggleiten können. In ihren nicht leeren Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  sei ein zu  $\varepsilon$  normaler Zylinder mit dem Querschnitt  $\mathfrak{D}$  hineingestellt, dessen Mantel und Boden ohne Energieaufwand dehnbar sind und der in sich steife Erzeugenden besitzt. Wird dieser Zylinder mit einer idealen Flüssigkeit gefüllt, so wird nach dem Dirichletschen Prinzip [3, S. 70] die potentielle Energie der Flüssigkeit dadurch einem

Minimum zustreben, dass sie den Zylinderquerschnitt  $\mathfrak{D}$  einem Maximum zutreibt, wenn  $\mathfrak{B}'$  gegen  $\mathfrak{B}$  frei beweglich ist. Denkt man sich dabei  $\mathfrak{B}$  fest, so bewegt sich  $\mathfrak{B}'$  unter dem Einfluss der Kräfte  $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_n$ , die auf jene  $n$  Randteile von  $\mathfrak{B}'$  wirken, die den Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  mitberanden (Figur 1). Möglicherweise treten nicht nur



Figur 1

endlich viele solche Randteile auf, jedoch ist deren Gesamtlänge stets endlich. Jede Einzelkraft  $\mathfrak{R}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ist nach der Berechnung der Kraft, die eine Flüssigkeit auf eine Gefäßwand ausübt [7, S. 349], der Länge jener Sehne proportional, welche die Endpunkte des zu  $\mathfrak{R}_i$  gehörenden Randteils verbindet, und wirkt im Mittelpunkt der Sehne. Wir verwenden diese Sehnenlängen als Mass für die Beträge der Kräfte  $\mathfrak{R}_i$ . Das Kräftesystem aus den  $\mathfrak{R}_i$  lässt sich, etwa mit dem Schwerpunkt von  $\mathfrak{B}'$  als Reduktionspunkt, auf eine resultierende Kraft  $\mathfrak{R}$  und ein resultierendes Moment  $\mathfrak{M}$  reduzieren. Ist  $\mathfrak{R} = 0$  und  $\mathfrak{M} = 0$ , so ist  $\mathfrak{B}'$  im Gleichgewicht; eine Vergrößerung des Durchschnitts  $\mathfrak{D}$  ist unmöglich, und es liegt daher für  $\mathfrak{D}$  ein relatives Maximum oder ein instabiles Minimum<sup>1)</sup> vor. Die Bedingung  $\mathfrak{R} = 0$  ist genau dann erfüllt, wenn sich die linienflüchtigen Kraftvektoren  $\mathfrak{R}_i$  zum Nullvektor addieren. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn sich die den  $\mathfrak{R}_i$  entsprechenden, gleichsinnig orientierten Sehnen durch Parallelverschiebung zu einem geschlossenen Polygon zusammenfügen lassen. Die Bedingung  $\mathfrak{M} = 0$ , die verlangt, dass die Summe der um einen beliebigen Ebenenpunkt linksdrehenden Momente gleich der Summe der rechtsdrehenden Momente ist, lässt sich zwar im allgemeinen geometrisch nicht einfacher umformulieren, jedoch ist sie bei den in 4. behandelten Dreiecksbereichen geometrisch einfach zu fassen.

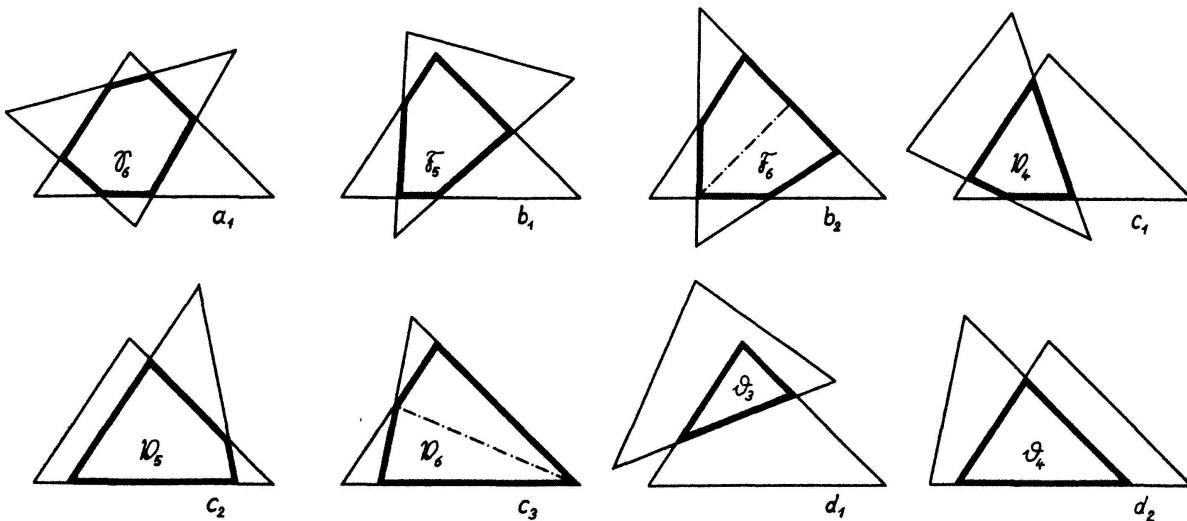
Der Bereich  $\mathfrak{B}'$  ist gegenüber  $\mathfrak{B}$  nur dann *nicht frei beweglich*, wenn es Randteile von  $\mathfrak{D}$  gibt, die nicht nur  $\mathfrak{B}$  bzw.  $\mathfrak{B}'$  angehören, sondern sowohl  $\mathfrak{B}$  als auch  $\mathfrak{B}'$ . Dies ist nur möglich, wenn  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  kongruente Randteile besitzen und  $\mathfrak{B}'$  jene Lagen zu  $\mathfrak{B}$  einnimmt, in denen solche Randteile zusammenfallen. In diesen Fällen wirken auf  $\mathfrak{B}'$  nicht allein die Flüssigkeitskräfte, sondern längs den  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  angehörenden Randteilen von  $\mathfrak{D}$  auch noch Reaktionskräfte, die von dem festen Bereich  $\mathfrak{B}$  herrühren. Das in 4. diskutierte Beispiel zeigt solche Sonderlagen und deren Be-

<sup>1)</sup> Ein instabiles Minimum liegt zum Beispiel vor, wenn  $\mathfrak{B}$  ein Parallelogramm und der Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  ein Quadrat ist.

handlung. Zur Bestimmung des absoluten Maximums  $\mathfrak{D}_{\max}$  und der zugehörigen Lagen von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  sind die relativen Maxima (und instabilen Minima) untereinander und mit jenen eventuell vorhandenen Durchschnitten  $\mathfrak{D}$  zu vergleichen, bei denen  $\mathfrak{B}'$  gegen  $\mathfrak{B}$  nicht frei beweglich ist.

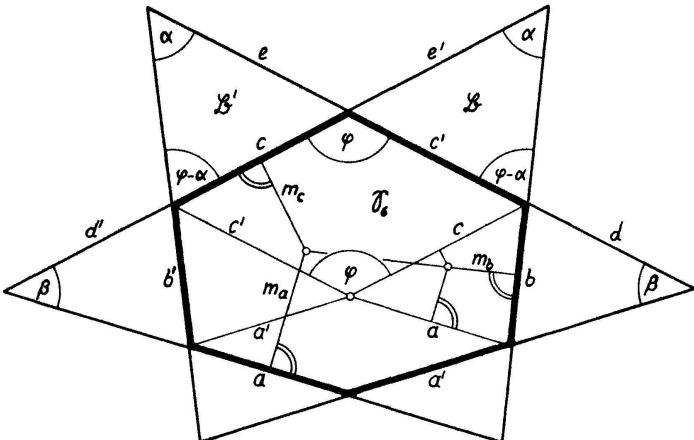
3. Das Verfahren lässt sich einfach variieren, etwa indem man bei den Bereichen  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  der Figur 1 verlangt, dass die Vereinigungsmenge der vier schraffierten halbmondförmigen Teilbereiche maximal wird. Das dann zu betrachtende Kräfte- system resultiert aus der (vereinfachten) Modellvorstellung, dass die vier halbmondförmigen Teilbereiche kommunizierend verbunden und mit Flüssigkeit gefüllt sind.

Anschliessend wenden wir das beschriebene Verfahren auf einen *nicht gleichschenklichen Dreieksbereich*  $\mathfrak{B}$  und den aus  $\mathfrak{B}$  durch Spiegelung an einer Geraden entstehenden Dreieksbereich  $\mathfrak{B}'$  an. Ist  $\mathfrak{B}$  gleichschenklig, so ist  $\mathfrak{D}_{\max} = \mathfrak{B}$ , und das Verfahren erübrigt sich. Ist  $\mathfrak{B}$  nicht gleichschenklig, so ist ein nicht leerer Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  ein *konvexes Polygon*, dessen Randstrecken den Seiten der beiden Dreiecke angehören. Da insgesamt sechs Dreieckseiten vorliegen, kann ein Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  höchstens ein Sechseck sein, aber auch ein Fünfeck, Viereck oder Dreieck, wenn nur fünf, vier oder drei der vorhandenen sechs Dreieckseiten zur Berandung von  $\mathfrak{D}$  beitragen oder auch die Seitenzahl von  $\mathfrak{D}$  dadurch reduziert wird, dass zwei Dreieckseiten ganz oder teilweise zusammenfallen. Letzteres kann höchstens zweimal eintreten, da  $\mathfrak{B}$  nicht gleichschenklig ist; Figur 2a<sub>1</sub>–d<sub>2</sub> zeigt die möglichen Fälle, auf die wir künftig mit (a<sub>1</sub>), (b<sub>1</sub>), ... verweisen.

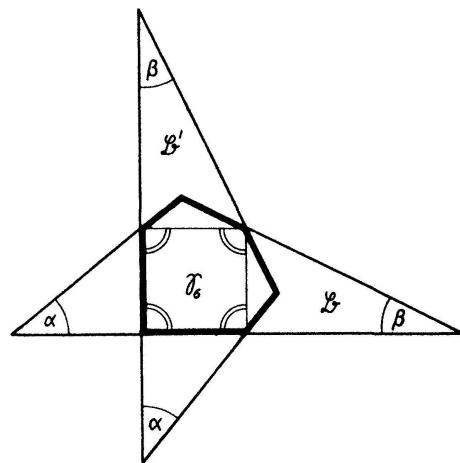


Figur 2

4. a) Ist ein Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  ein Sechseck  $\mathfrak{S}_6$  (a<sub>1</sub>), so betrachten wir zunächst den Fall, dass die Sechseckseiten *abwechselnd* zum Rand von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  gehören; dabei ist  $\mathfrak{B}'$  gegen  $\mathfrak{B}$  stets *frei beweglich*. Die zu  $\mathfrak{B}$  gehörenden Sechseckseiten seien  $a, b, c$  und die zu  $\mathfrak{B}'$  gehörenden  $a', b', c'$  (Figur 3). Die Bedingung  $\mathfrak{R} = 0$  hat zur Folge, dass die durch Parallelverschiebung (bei Erhaltung eines zuvor festgelegten Umlaufsinns von  $\mathfrak{S}_6$ ) aneinandergefügten Seiten  $a, b, c$  ein zu  $\mathfrak{B}$  ähnliches Dreiseit bilden. Für die Seiten  $a', b', c'$  gilt notwendig Entsprechendes. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass  $a', b, c', c, b', a$  die Aufeinanderfolge der Sechseckseiten ist,



Figur 3



Figur 4

da bei dem sechszackigen Stern  $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{B}'$ , der zu jedem Sechseck  $\mathfrak{S}_6$  dieses Falles gehört, zweimal bei aufeinanderfolgenden Zacken gleiche Winkel auftreten. Bedeuten  $d, d', e, e'$  die in Figur 3 bezeichneten Reststrecken und  $\alpha, \beta, \varphi$  die eingetragenen Winkel, so gilt:

$$e + c' + d = e' + c + d', \quad (1)$$

mit

$$c : e = c' : e' = \sin \alpha : \sin (\varphi - \alpha) \quad (2a)$$

und

$$b : d = b' : d' = \sin \beta : \sin (\varphi - \alpha + \beta). \quad (2b)$$

Verwendet man (2a, b) in (1) und beachtet, dass  $a' = \lambda a, b' = \lambda b, c' = \lambda c$  ( $\lambda = \text{konst.} > 0$ ) gilt, da  $a, b, c$  und  $a', b', c'$  ähnliche Dreiseite sind, so folgt bei Heranziehung des Sinussatzes im Dreiseit  $abc$ :

$$[\sin(\alpha + \beta) \sin(\varphi - \alpha) + \sin \alpha \sin(\varphi + \beta - \alpha) - \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)] (\lambda - 1) = 0. \quad (3)$$

Alle Durchschnitte  $\mathfrak{S}_6$ , deren Seiten abwechselnd zu  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  gehören und für die  $\mathfrak{R} = \mathfrak{o}$  gilt, müssen (nachdem sie wie in Figur 3 bezeichnet sind) notwendig der Bedingung (3) genügen. Für diese Durchschnitte muss in (3) die runde oder die eckige Klammer verschwinden. Für jene Durchschnitte  $\mathfrak{S}_6$ , die (3) erfüllen, indem die *runde* Klammer verschwindet ( $\lambda = 1$ ), sind die Dreiseite  $abc$  und  $a'b'c'$  kongruent, die Durchschnitte  $\mathfrak{S}_6$  also axialsymmetrisch;  $\mathfrak{B}'$  entsteht somit aus  $\mathfrak{B}$  durch Spiegelung an einer Symmetriechse von  $\mathfrak{S}_6$ . Maximal sind unter diesen Durchschnitten  $\mathfrak{S}_6$  jene, die neben der schon erfüllten Bedingung  $\mathfrak{R} = \mathfrak{o}$  auch der Bedingung  $\mathfrak{M} = \mathfrak{o}$  genügen, die verlangt, dass die Mittellote  $m_a, m_b, m_c$  der Seiten  $a, b, c$  von  $\mathfrak{S}_6$  durch einen Punkt gehen. Die Mittellote der Seiten  $a', b', c'$  von  $\mathfrak{S}_6$  besitzen dann notwendig dieselbe Schnitteigenschaft. Zur Gewinnung dieser maximalen Durchschnitte  $\mathfrak{S}_6$  von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  verwendet man in einem konkreten Fall zweckmäßig die Tatsache, dass die Bedingungen  $\mathfrak{R} = \mathfrak{o}$  und  $\mathfrak{M} = \mathfrak{o}$  gegenüber Ähnlichkeiten invariant sind. Man bestimmt daher zunächst, ausgehend von irgendeinem vorgegebenen, zu  $\mathfrak{B}$  ähnlichen, festen Dreiseit  $a^*b^*c^*$  durch Variieren von  $\varphi$  alle *Sechsecke*  $\mathfrak{S}_6^*$ , die ähnlich vergrößert

oder verkleinert jene Durchschnitte  $\mathfrak{S}_6$  von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  ergeben, die (3) für  $\lambda = 1$  genügen; Figur 3 zeigt einen solchen Durchschnitt  $\mathfrak{S}_6$ , dessen Dreiseit  $abc$  aus dem vorgegebenen Dreiseit  $a^*b^*c^*$  durch Anwendung einer geeigneten Ähnlichkeit entsteht. Die Entscheidung, ob auch noch die Bedingung  $\mathfrak{M} = \mathfrak{o}$  zu erfüllen ist, trifft man vorteilhaft an den zum Dreiseit  $a^*b^*c^*$  bestimmten Sechsecken  $\mathfrak{S}_6^*$ , die von  $\varphi$  abhängen. Variiert  $\varphi$ , so beschreibt der Schnittpunkt der Mittellote  $m_{a^*}$  und  $m_{c^*}$ , wie man leicht nachrechnet, eine Ellipse, deren reelle Schnittpunkte mit  $m_{b^*}$  zu bestimmen sind. Gehört ein solcher Schnittpunkt der drei Mittellote  $m_{a^*}$ ,  $m_{b^*}$ ,  $m_{c^*}$  zu einem Durchschnitt  $\mathfrak{S}_6^*$ , der zu einem Durchschnitt  $\mathfrak{S}_6$  ähnlich ist, dessen Seiten abwechselnd  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  mitberanden und der  $\mathfrak{R} = \mathfrak{o}$  erfüllt<sup>2)</sup>, so liegt in  $\mathfrak{S}_6$  ein maximaler Durchschnitt vor. Für die in Figur 2, a<sub>1</sub>–d<sub>2</sub> verwendeten Dreiecke  $\mathfrak{B}_0$ ,  $\mathfrak{B}'_0$  gibt es drei solche Durchschnitte mit den Maximaleigenschaften  $\mathfrak{R} = \mathfrak{o}$ ,  $\mathfrak{M} = \mathfrak{o}$ <sup>3)</sup>. Zu untersuchen bleibt noch, ob das Verschwinden der *eckigen* Klammer in (3) zu weiteren maximalen Durchschnitten führt. Solche Durchschnitte kommen nur für jene Winkel  $\varphi$  in Betracht, die sich aus der quadratischen Gleichung für  $\sin(\varphi - \alpha)$  ergeben, welche die verschwindende eckige Klammer bestimmt; davon brauchbar sind jene Winkel  $\varphi$ , die (3) wirklich erfüllen. Zu prüfen ist nun, ob sich bei passender Wahl von  $\lambda$  maximale Durchschnitte  $\mathfrak{S}_6$  ergeben. Dies entscheidet man mit Hilfe des zu einem festen Dreiseit  $a^*b^*c^*$  für den betreffenden Winkel  $\varphi$  bestimmten Sechsecks  $\mathfrak{S}_6^*$ . Variiert dort  $\lambda$ , so beschreibt der Schnittpunkt der Mittellote  $m_{a^*}$  und  $m_{c^*}$  eine Gerade  $g$ , deren Schnitt mit  $m_{b^*}$  zur Erfüllung der Bedingung  $\mathfrak{M} = \mathfrak{o}$  zu bestimmen ist. Für  $\lambda = 0$  erhält man sicher einen Schnittpunkt der drei Mittellote  $m_{a^*}$ ,  $m_{b^*}$ ,  $m_{c^*}$ . Soll auch für  $\lambda > 0$  ein gemeinsamer Punkt der Geraden  $g$  und  $m_{b^*}$  existieren, so muss  $g$  mit  $m_{b^*}$  zusammenfallen. Dann erhält man aber für alle  $\lambda$  gemeinsame Punkte, also auch für  $\lambda = 1$ , wofür in (3) die runde Klammer verschwindet; dies ist zugleich der einzige  $\lambda$ -Wert, der zu zwei Dreiecken  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{B}'$  führt, die bis auf Spiegelung kongruent sind. Das Verschwinden der eckigen Klammer in (3) liefert somit keine weiteren maximalen Durchschnitte.

Zu betrachten ist noch der Unterfall, dass die Seiten eines Durchschnitts  $\mathfrak{S}_6$  nicht abwechselnd zum Rand von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  gehören. Auch in diesen Lagen ist  $\mathfrak{B}'$  gegen  $\mathfrak{B}$  frei beweglich. Es können dann höchstens zwei aufeinanderfolgende Sechseckseiten demselben Dreieck, etwa  $\mathfrak{B}$ , angehören, da sonst  $\mathfrak{R} = \mathfrak{o}$  nicht gilt. Ist dies der Fall, so gehören notwendig zwei aufeinanderfolgende und daran anschliessende Sechseckseiten zum Rand von  $\mathfrak{B}'$ . Gilt dann  $\mathfrak{R} = \mathfrak{o}$ , so muss dem Sechseck ein Rechteck einbeschrieben sein, dessen Ecken jene Ecken des Sechsecks sind, von denen Seiten auslaufen, die zu verschiedenen Dreiecken gehören (Figur 4). Die Bedingung  $\mathfrak{M} = \mathfrak{o}$  ist dann bereits erfüllt. Eine einfache Überlegung zeigt, dass  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  nur so zueinander liegen können wie es die Bezeichnung der Winkel in Figur 4 angibt. Das einbeschriebene Rechteck ist dann notwendig ein Quadrat; wäre es kein Quadrat, so wären zwei verschiedene kongruente Rechtecke sowohl  $\mathfrak{B}$  als auch  $\mathfrak{B}'$  einbeschrieben derart, dass beide auf derselben Dreieckseite aufsitzen und zugleich dem maximalen Sechseck in der angegebenen Weise einbeschrieben sind, das ist jedoch unmöglich. Ob derartige

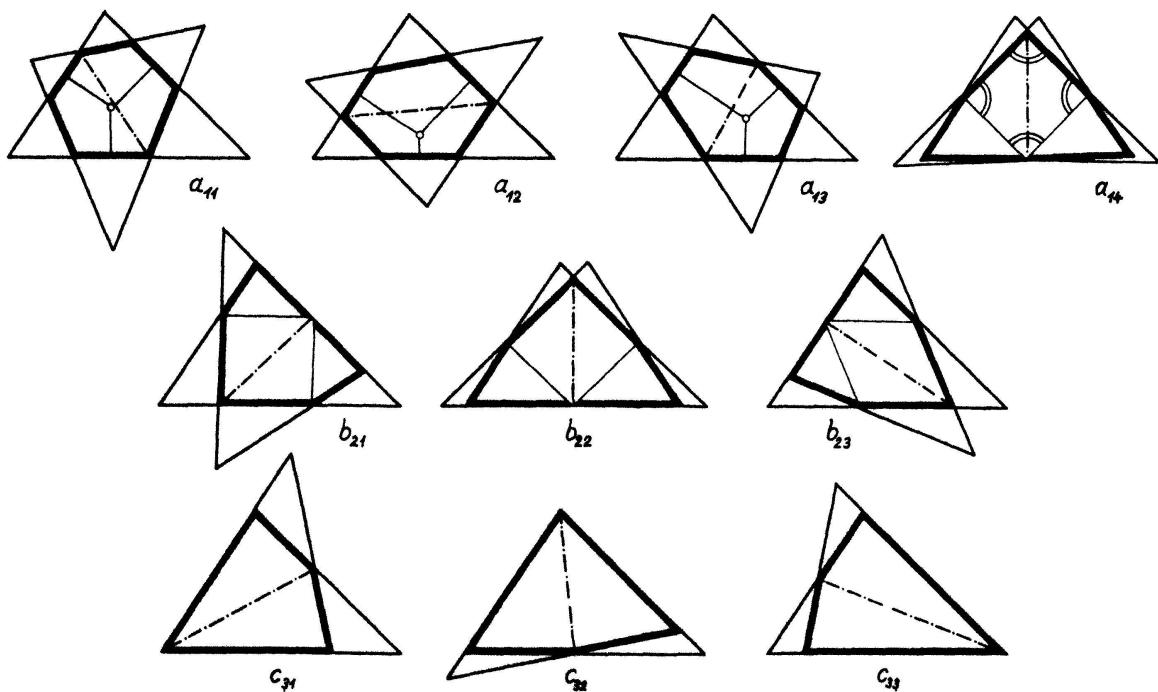
<sup>2)</sup> Diese Eigenschaften bleiben nicht für alle  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , wofür sich die Ellipsenpunkte ergeben, erhalten.

<sup>3)</sup> Wir verzichten auf die Wiedergabe der zur Untersuchung von  $\mathfrak{B}_0$  und  $\mathfrak{B}'_0$  erforderlichen elementaren numerischen Rechnungen, stellen jedoch in Figur 5 die maximalen Durchschnitte zusammen, die sich dabei ergeben und unter denen das absolute Durchschnittsmaximum zu suchen ist,

maximale Durchschnitte existieren, ist bei jedem Dreieck anhand der ihm einbeschriebenen Quadrate (die alle oder teilweise kongruent sein können!) sofort entscheidbar. Die Dreiecke  $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}'_0$  besitzen einen einzigen derartigen maximalen Durchschnitt (Figur 5 a<sub>14</sub>).

b) Ist ein *Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  ein Fünfeck  $\mathfrak{F}_5$* , zu dessen Berandung *nur fünf der sechs Dreieckseiten* beitragen ( $b_1$ ), so ist  $\mathfrak{B}'$  gegen  $\mathfrak{B}$  *frei beweglich*. Für das mit zwei Seiten beteiligte Dreieck kann  $\mathfrak{R} = 0$  nur dann gelten, wenn die beteiligten Seiten parallel sind, was unmöglich ist; dieser Fall liefert somit keinen maximalen Durchschnitt. Bei den fünfeckigen Durchschnitten  $\mathfrak{F}_6$ , an deren Berandung *alle sechs Dreieckseiten* beteiligt sind, überlappen sich deren zwei ( $b_2$ ); diese Durchschnitte besitzen eine Symmetriechse normal zu den überlappten Seiten. Die resultierende Kraft  $\mathfrak{R}$  der Flüssigkeitskräfte  $\mathfrak{R}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) wird bestimmt durch jene Seiten von  $\mathfrak{F}_6$ , an denen  $\mathfrak{B}'$  beteiligt ist. Die normal zu den überlappten Seiten wirkende Komponente  $\mathfrak{R}_N$  von  $\mathfrak{R}$  wird jedoch durch eine von dem festen Bereich  $\mathfrak{B}$  herrührende Reaktionskraft kompensiert; daher *gleitet*  $\mathfrak{B}'$  längs den überlappten Seiten und ist somit *nicht frei beweglich*. Der zu jeder Überlappungsmöglichkeit – es gibt deren drei – gehörende relative maximale Durchschnitt liegt also vor, wenn die parallel zu den überlappten Seiten wirkende Komponente  $\mathfrak{R}_P$  von  $\mathfrak{R}$  verschwindet. Die auf  $\mathfrak{B}'$  wirkenden Momente heben sich auf, da jedes von den drei Flüssigkeitskräften  $\mathfrak{R}_i$  erzeugte resultierende Moment ein entgegengesetzt gleiches Reaktionsmoment bewirkt.  $\mathfrak{R}_P = 0$  bedeutet geometrisch, dass die durch Parallelverschiebung aneinandergefügten Seiten von  $\mathfrak{F}_6$ , an denen  $\mathfrak{B}'$  beteiligt ist (bei Erhaltung eines zuvor festgelegten Umlaufsinns von  $\mathfrak{F}_6$ ), einen Streckenzug bilden, dessen Schlusslinie zu den überlappten Seiten parallel ist. Figur 5, b<sub>21</sub>–b<sub>23</sub> zeigt die zu  $\mathfrak{B}_0$  gehörenden maximalen fünfeckigen Durchschnitte.

c) Ist ein *Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  ein Viereck  $\mathfrak{B}_4$* , an dessen Berandung *nur vier der sechs Dreieckseiten* teilhaben ( $c_1$ ), so ist  $\mathfrak{B}'$  gegen  $\mathfrak{B}$  *frei beweglich*.  $\mathfrak{R} = 0$  kann höchstens



Figur 5

gelten, wenn zwei Viereckseiten zu  $\mathfrak{B}$  und zwei zu  $\mathfrak{B}'$  gehören und außerdem die  $\mathfrak{B}$  bzw.  $\mathfrak{B}'$  zugehörigen Seiten parallel sind. Dies ist jedoch unmöglich; dieser Fall liefert daher keinen maximalen Durchschnitt. Der weitere Fall viereckiger Durchschnitte  $\mathfrak{B}_5$ , zu deren Berandung *fünf der sechs Dreieckseiten* beitragen, von denen sich notwendig zwei überlappen ( $c_2$ ), längs denen  $\mathfrak{B}'$  gleitet, führt ebenfalls zu keinem maximalen Durchschnitt, da wie zuvor  $\mathfrak{R} = \mathfrak{o}$  nicht erfüllbar ist. Sind schliesslich *alle sechs Dreieckseiten* an der Berandung eines viereckigen Durchschnitts beteiligt, so überlappen sich notwendig zweimal zwei Dreieckseiten ( $c_3$ ). Für einen solchen Durchschnitt  $\mathfrak{B}_6$  entsteht  $\mathfrak{B}'$  aus  $\mathfrak{B}$  durch Spiegelung an einer Winkelhalbierenden, die Symmetrieachse des Durchschnitts ist. Es gibt somit genau drei Durchschnitte  $\mathfrak{B}_6$ , für die  $\mathfrak{B}'$  gegen  $\mathfrak{B}$  *unbeweglich* ist und im Gleichgewicht steht. Jene Seiten eines Durchschnitts  $\mathfrak{B}_6$ , an denen  $\mathfrak{B}'$  beteiligt ist, bestimmen nämlich die resultierende Kraft  $\mathfrak{R}$  der Flüssigkeitskräfte  $\mathfrak{R}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), deren Normalkomponenten zu den beiden Paaren überlappter Seiten durch Reaktionskräfte, herrührend von dem festen Bereich  $\mathfrak{B}$ , kompensiert werden;  $\mathfrak{B}'$  steht somit im Kräftegleichgewicht. Entsprechend wird jedes auf  $\mathfrak{B}'$  als Folge der drei Kräfte  $\mathfrak{R}_i$  wirkende Gesamtmoment  $\mathfrak{M}$  durch ein von  $\mathfrak{B}$  herrührendes Reaktionsmoment aufgehoben. Jeder Durchschnitt  $\mathfrak{B}_6$  ist mit den in a) und b) festgestellten relativen Durchschnittsmaxima zu vergleichen und ist eine Grenzlage von Durchschnitten  $\mathfrak{B}_5$  sowie ein relatives Maximum unter den entsprechenden Durchschnitten ( $c_2, c_3, d_2$ ).

d) Liegt schliesslich als *Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  ein Dreieck* vor, so können *nur drei* ( $d_1$ ) *oder vier* ( $d_2$ ) *der sechs Dreieckseiten* zu seiner Berandung beitragen, und man erkennt leicht, dass diese Durchschnitte  $\mathfrak{D}_3, \mathfrak{D}_4$  keine maximalen enthalten.

*Das absolute Durchschnittsmaximum kann somit nur ein axialsymmetrisches Sechseck  $\mathfrak{S}_6$ , Fünfeck  $\mathfrak{F}_6$  oder Viereck  $\mathfrak{B}_6$  sein, also ein Durchschnitt, an dessen Berandung alle sechs Dreieckseiten teilhaben.* Bei den Dreiecken  $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}'_0$  wird es von ( $c_{32}$ ) angenommen, dicht gefolgt von ( $c_{33}$ ), ( $b_{22}$ ) und ( $a_{14}$ ). Abschliessend sei erwähnt, dass die entwickelte Methode unabhängig davon, ob das absolute Maximum etwa stets in ( $c_{31}-c_{33}$ ) liegt, ihre Bedeutung auch in der Bestimmung aller maximalen fünf- und sechseckigen Dreiecksdurchschnitte besitzt.

O. GIERING, Stuttgart

#### LITERATUR

- [1] R. COURANT, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, 3. Aufl., Berlin, Göttingen und Heidelberg 1955.
- [2] W. HAACK, *Elementare Differentialgeometrie*, Basel und Stuttgart 1955.
- [3] L. A. LUSTERNIK, *Kürzeste Linien*, Berlin 1957.
- [4] G. PÓLYA, *Mathematik und plausibles Schliessen*, Band 1 (Induktion und Analogie in der Mathematik), Basel und Stuttgart 1962.
- [5] H. SCHAALE, *Ein Beitrag zur Geometrie ähnlich veränderlicher Felder*, El. Math., 21, 97–109 (1966).
- [6] K. STRUBECKER, *Mathematik und Anschauung*, Physik. Blätter, 20./21. Jhrg., 1964/65.
- [7] I. SZABO, *Einführung in die Technische Mechanik*, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1959.
- [8] V. A. USPENSKIJ, *Einige Anwendungen der Mechanik auf die Mathematik*, Moskau 1958.
- [9] B. L. VAN DER WAERDEN, *Einfall und Überlegung*, Basel und Stuttgart 1954 und El. Math., 8, 121–129 (1953); 9, 1–9; 49–56 (1954).