Abbildung $a^\sigma\{e'\} \to a^\sigma$ mit G^σ kanonisch isomorph. Durch Hintereinanderausführen dieser beiden Abbildungen erhält man $a\,N \to a^\sigma$ als den kanonischen Isomorphismus von G/N auf G^σ.

Setzt man aber den Homomorphiesatz als bekannt voraus, so folgt der allgemeine Satz daraus relativ schnell, indem man LK als den Kern des Homomorphismus $a \to a^\sigma\,L^\sigma M$ $(a \in G)$ von G auf $G^\sigma M/L^\sigma M$ erkennt.

Korollar 2 (*Erster Isomorphiesatz*, [1], S. 150)

Es seien G eine Gruppe, N ein Normalteiler von G und H eine beliebige Untergruppe von G. Dann besteht ein kanonischer Isomorphismus

$$H/H \cap N \cong HN/N\,.$$

Beweis. In der Bezeichnung des Satzes sei $G := H$, $G' := G$ und es sei σ: $H \to G$ die natürliche Injektion d.h. $a^\sigma = a$ für jedes $a \in H$. Man setze weiter $M := N$, $L := \{e\}$. Dann ist offenbar $K = \sigma^{-1}(N) = H \cap N$ und $G^\sigma M = HN$, $LK = H \cap N$, $L^\sigma M = N$. Die Behauptung folgt somit aus dem Satz; der kanonische Isomorphismus ist dabei

$$a\,H \cap N \to a\,N, \quad a \in H\,.$$

Korollar 3 (*Zweiter Isomorphiesatz*, [1], S. 151)

Es seien G eine Gruppe und H, N zwei Normalteiler von G mit $H \supset N$. Dann ist H/N ein Normalteiler in G/N und es besteht ein kanonischer Isomorphismus

$$G/H \cong (G/N)/(H/N)\,.$$

Beweis. Dass H/N ein Normalteiler in G/N ist, ist klar. Man setze $G' := G/N$ und wähle als σ: $G \to G/N$ den natürlichen Homomorphismus $a \to a\,N$ von G auf G/N. Sodann sei $M := H/N$, $L := \{e\}$. Dann ist offenbar $K = \sigma^{-1}(H/N) = H$, $LK = H$, $L^\sigma M = H/N$ und $G^\sigma M = (G/N)\,(H/N) = G/N$; damit folgt die Behauptung aus dem Satz.

M. R. Chowdhury, Göttingen

LITERATURVERZEICHNIS

[1] B. L. van der Waerden, *Algebra*, Teil I, 5. Auflage, Springer-Verlag 1960.

Aufgaben

Aufgabe 513. If

$$N = \frac{x^2 - 6\,x\,y + y^2}{x^2 - 10\,x\,y + y^2}\,,$$

where x, y are integers not both zero, N a positive integer, then N is representable in the forms

$$s^2 + (s+1)^2 \text{ and } 2\,r^2 + (r \pm 1)^2\,.$$

M. N. Khatri, Bhilupur/India, A. Makowski, Warszawa/Poland

Solution: Rewrite the equation

$$N\,(x^2 - 10\,x\,y + y^2) = x^2 - 6\,x\,y + y^2 \qquad (1)$$

in the form

$$(N-1)\,x^2 - 2\,(5\,N-3)\,x\,y + (N-1)\,y^2 = 0\,.$$

The latter equation has non-trivial solutions x, y provided

$$(5\,N-3)^2 - (N-1)^2 = m^2\,,$$

where m is an integer. Clearly m is even and we get

$$6 N^2 - 7 N + 2 = (2 N - 1)(3 N - 2) = M^2 ,$$

where M is an integer. Clearly $2 N - 1$ and $3 N - 2$ are relatively prime. Hence

$$2 N - 1 = (2 s + 1)^2 , \quad 3 N - 2 = (3 r \pm 1)^2 , \tag{2}$$

where r, s are integers. The first equation implies $N = s^2 + (s + 1)^2$, the second $N = 2 r^2 + (r \pm 1)^2$.

Remark: Conversely, if

$$N = s^2 + (s + 1)^2 = 2 r^2 + (r \pm 1)^2 ,$$

where r and s are integers, then (2) follows and $(2 N - 1)(3 N - 2) = M^2$, where M is an integer. It follows, that (1) is solvable in integers x, y not both zero.

L. CARLITZ, Duke University, USA

G. BACH (Braunschweig) berechnet die Lösungstripel N_t, x_t, y_t mit $(x_t, y_t) = 1$ durch die Formeln:

$$N_t = \{(5 + 2\sqrt{6})^{2t+1} + (5 - 2\sqrt{6})^{2t+1} + 14\}/24 ,$$
$$y_t : x_t = \{(10 N_t - 6)\sqrt{6} + (5 + 2\sqrt{6})^{2t+1} - (5 - 2\sqrt{6})^{2t+1}\} : 2 (N_t - 1)\sqrt{6} ,$$
$(y_t, x_t) = 1$, $t = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ Beispiel: $N_1 = 41$, $x_1 = 1$, $y_1 = 10$.

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), P. BUNDSCHUH (Freiburg i. Br.), H. GAEBELEIN (Helmstedt), H. HARBORTH (Braunschweig), W. JÄNICHEN (Berlin), I. PAASCHE (Stockdorf, Lkr. Starnberg).

Aufgabe 514. Gegeben sei ein Kreis k und auf k ein Punkt S. Man ermittle jene kubische Parabel p, vom Typus $a^2 y = x^3$, von der S ein Scheitel und k der zugehörige Schmiegkreis ist.

R. BEREIS, Dresden

Lösung und Verallgemeinerung; Sei $a = 1$ und $M = X + i\,Y$ der Mittelpunkt sowie $r = (1 + y'^2)^{3/2}/y''$ der Radius des Krümmungskreises k im Punkt $S = x + i\,y$ einer Kurve p mit der Gleichung $y = y(x)$. S ist genau für extremes r Scheitel, also für

$$3 y' y''^2 = (1 + y'^2) y''' \quad \text{und} \quad r_{extr.} = (3 y'/y''')^{3/2} y''^2 .$$

Das zugehörige M hat

$$X = x - y'(1 + y'^2)/y'' = x - 3 y'^2 y''/y''' \quad \text{und} \quad Y = y + (1 + y'^2)/y'' = y + 3 y' y''/y''' .$$

Im Falle $y; y'; y''; y''' = x^n; n x^{n-1}; n (n - 1) x^{n-2}; n (n - 1)(n - 2) x^{n-3}$ liegt der Scheitel S also auf der Geraden $y = x\sqrt{n - 2}/n\sqrt{2 n - 1}$. Die Tangente in diesem Scheitel $S = x + i\,y = x + i\,x^n$ hat die Richtung $y' = n\,y/x = \sqrt{n - 2}/\sqrt{2 n - 1}$. Der Mittelpunkt M des Scheitelkrümmungskreises k hat

$$X = x - 3 n^2 y^2/(n - 2) x \quad \text{und} \quad Y = y + 3 n y/(n - 2) = 2 y (2 n - 1)/(n - 2) .$$

Der Radius von k ist $r = 3\sqrt{3}\, n^2 (n - 1)^{1/2} y^2/x (n - 2)^{3/2}$. Die Gerade SM hat den Abszissenabschnitt $u = x + n\,y^2/x$ und den Ordinatenabschnitt $v = y + x^2/n\,y$.

Im Spezialfall $n = 3$, wo p die Kurve $y = x^3$ ist, kann p z.B. im Quadrat mit Ecken $0, 1, 1 + i, i$ gut approximiert werden, weil die 3 Kurvenpunkte $0; S; 1 + i$ die Tangentenrichtungen $y' = 0; 1/\sqrt{5}; 3$ besitzen und im Scheitel S der Krümmungskreis k bekannt ist: Verlängert man $MS = r$ über S hinaus um $r/9$ bis T und über M hinaus um $2 r/3$ bis P, so liegt T auf der x-Achse und P auf der y-Achse. Den Ursprung O findet man wegen $TO : OP : PT = 1 : \sqrt{5} : \sqrt{6}$ durch eine Ähnlichkeitskonstruktion. Die Quadratecken 1 und $1 + i$ konstruiert man auf Grund von $r = 3\sqrt{2}/5\sqrt[4]{5}$.

I. PAASCHE, München

Eine weitere Lösung sandte H. MEILI (Winterthur).

Aufgabe 515. Es sei $\mathfrak{C}$ ein «einfacher» Kurvenbogen (die Tangente ist in jedem Punkt von $\mathfrak{C}$ eindeutig und variiert kontinuierlich und monoton). Das von einer beweglichen Sehne s abgeschnittene Segment habe die Fläche S und T sei die Fläche des von s und den Tangenten in den Endpunkten von s gebildeten Dreiecks. Man zeige, dass die Parabelbogen die einzigen $\mathfrak{C}$ sind, für die S/T einen konstanten Wert hat. E. W. STEIN, Graz

Lösung: In einem rechtwinkligen x, f-Koordinatensystem habe $\mathfrak{C}$ die Endpunkte $A(0;1)$ und $B(1;0)$, und die Tangenten in diesen Punkten seien die Koordinatenachsen mit Schnittpunkt $O(0;0)$. Diese Annahme bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, weil jeder beliebige einfache Kurvenbogen durch eine geeignete affine Abbildung in einen solchen mit vorgeschriebenen Endpunkten samt Richtungen abgebildet werden kann, und Flächeninhaltsverhältnisse gegenüber dieser Abbildung invariant sind.

$\mathfrak{C}$ wird dann durch eine in $I = (0 < x < 1)$ zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ dargestellt, welche die Randbedingungen $\lim\limits_{x\to 0} f = 1, \lim\limits_{x\to 1} f = 0, \lim\limits_{x\to 0} f' = -\infty, \lim\limits_{x\to 1} f' = 0$ erfüllt, und wegen der monotonen Richtungsänderung der Tangente ist $f'(x)$ in I monoton wachsend und ständig negativ. Die Tangente in einem beliebigen Punkt $P(x;f)$ von $\mathfrak{C}$ $(x \in I)$ schneidet die Tangente AO in $Q(0; f - x f')$ und die Tangente BO in $R(x - f/f'; 0)$. Demnach hat das Dreieck AQP den Inhalt $T = x(1 - f + x f')/2$, und das Segment mit den Endpunkten A und P den Inhalt $S = x(1+f)/2 - \int\limits_0^x f(t)\, dt$. Auf Grund der Flächeneigenschaft von $\mathfrak{C}$ ist nun $T = (1+c) S$ mit konstantem $c > 0$ für alle $x \in I$. Daraus folgt durch Differenzieren nach x die Differentialgleichung

$$x^2 f'' - c x f' + c f = c \quad (x \in I) \tag{1}$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung 2. Ordnung ist

$$f(x) = 1 + a x + b x^c \quad (a, b \text{ konstant}; x \in I),$$

denn die Funktionen x und x^c bilden für $c \neq 1$ ein Hauptsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, während die konstante Funktion 1 eine triviale Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1) ist. Damit $f(x)$ auch die Randbedingungen erfüllt, muss notwendig $0 < c < 1$ sein, und als Lösung ergibt sich

$$f(x) = \frac{1}{1-c}\left[(1-c) + c x - x^c\right] \quad (0 < c < 1; x \in I). \tag{2}$$

Aus der Flächeneigenschaft von $\mathfrak{C}$ folgt weiterhin, dass auch die Dreiecke QOR und APB ein konstantes Inhaltsverhältnis besitzen, und zwar ist $F(QOR) = c\, F(APB)$. Wegen $2F(QOR) = -(f - x f')^2/f'$ und $2F(APB) = 1 - x - f$ muss also $f(x)$ der zusätzlichen Bedingung

$$(f - x f')^2 = c f' (f + x - 1) \quad (x \in I) \tag{3}$$

genügen. Mit Berücksichtigung von (2) muss demnach für alle $x \in I$ die Gleichung

$$(1 - x^c)^2 = \left(\frac{c}{1-c}\right)^2 (1 - x^{c-1})(x - x^c)$$

bestehen. Dies trifft genau dann zu, wenn $c = 1/2$ ist, und damit ist

$$f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x} = (1 - \sqrt{x})^2 \quad (x \in I)$$

die einzige Lösungsfunktion. Deren Schaubild ist eine Parabel 2. Ordnung (Scheitel $S(1/4; 1/4)$, Achse = 1. Winkelhalbierende). O. REUTTER, Ochsenhausen

Eine weitere Lösung sandte C. BINDSCHEDLER (Küsnacht).

Aufgabe 516. Es sei r der Inkreisradius, $2s$ der Umfang und R der Umkreisradius eines reellen ebenen Dreiecks, also

$$2r \leqq \frac{2s}{3\sqrt{3}} \leqq R .$$

Man zeige, dass zwischen $2r$ und R beliebig viele in s quadratische Terme in folgender Weise eingeschoben werden können:

$$2r \leqq \frac{4s^2R^{-1} - 2tr}{27 - t} \leqq \frac{4s^2R^{-1} - 2Tr}{27 - T} \leqq R \, (-\infty < t \leqq T \leqq 11) .$$

I. PAASCHE, München

Lösung; Es genügt zu zeigen, dass der Term $f(x) = (4s^2R^{-1} - 2rx)/(27 - x)$ in der Variablen x für $x < 27$ monoton zunimmt und für $x \leqq 11$ der Doppelungleichung $2r \leqq f(x) \leqq R$ genügt.

Aus $4s^2 = \Sigma a_i^2 + 2\Sigma a_i a_{i+1} \geqq 3\Sigma a_i a_{i+1} \geqq 54Rr$ [1] folgt

$$f(x) \geqq \frac{54r - 2rx}{27 - x} = 2r \quad \text{und} \quad \frac{df(x)}{dx} = \frac{4s^2R^{-1} - 54r}{(27 - x)^2} \geqq 0 \quad \text{für alle} \quad x < 27 ,$$

womit die Monotonie und die untere Grenze von $f(x)$ nachgewiesen sind.

Aus $4s^2 \leqq 4(3r^2 + 4Rr + 4R^2)$ [2] und $2r \leqq R$ folgt $4s^2 \leqq 16R^2 + 22Rr$ und damit $f(11) \leqq R$, womit auch die obere Grenze von $f(x)$ für $x \leqq 11$ nachgewiesen ist.

O. REUTTER, Ochsenhausen

[1] F. LEUENBERGER, El. Math. *13*, S. 126 (1958).
[2] J. STEINIG, El. Math. *18*, S. 129 (1963).

Weitere Lösungen sandten F. LEUENBERGER (Feldmeilen) und K. ZACHARIAS (Berlin).

Neue Aufgaben

Aufgabe 537. Ein gegebener Kreis K wird von zwei zueinander orthogonalen Kreisen K_1, K_2, die durch einen festen Punkt F seiner Ebene gehen, berührt. Welches ist der geometrische Ort der Ähnlichkeitszentren von K_1 und K_2?

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Aufgabe 538. Trouver toutes les solutions de l'équation

$$x^2 + (x + 1)^2 = y^4$$

en nombres naturels x et y.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Aufgabe 539. Show that the quotient

$$\frac{(a^n - 1)(a^n - a) \ldots (a^n - a^{n-1})}{n!} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

is integral for arbitrary integers a.

L. CARLITZ, Duke University, Durham, N.C., USA

Aufgabe 540. Sei $a_{-1}\, a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 \ldots = 1\,0\,1\,1\,2\,3\,5 \ldots$ die Fibonaccifolge. Für $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$ und $k = 0, 1, 2, \ldots$ zeige man

$$\sum_{\nu=-1}^{n} \binom{n + k - \nu}{k} a_\nu + \sum_{\nu=0}^{k} \binom{n + 1 + k - \nu}{1 + n} a_{2\nu} = a_{n+2k+2} .$$

I. PAASCHE, München

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur

1. Ist in einem Dreieck $\alpha - \beta = 90°$, so liegt der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises auf der Seite AB.

2. Es sind zwei Kreise gegeben: $k_1(M_1, r_1)$, $k_2(M_2, r_2)$, $M_1 M_2 = d > r_1 + r_2$. Die Tangenten von M_1 an k_2 schneiden k_1 in vier Punkten, ebenso schneiden die Tangenten von M_2 an k_1 den Kreis k_2 in vier Punkten. Die acht Punkte liegen zu je vieren auf zwei Parallelen zu $M_1 M_2$.

   ▶ Der Abstand der beiden Parallelen ist $2\, r_1\, r_2/d$.

3. $k(M, r)$ ist ein fester Kreis, A ein fester Punkt. Der Punkt Q wandert auf k. Die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle AMQ$ schneiden AQ in U und V. Welches sind die geometrischen Örter von U und V?

   ▶ $AU : AQ = AM : (r + AM) =$ konst. Entsprechend für V. Die geometrischen Örter sind perspektiv-ähnliche Kreise von k bezüglich des Zentrums A.

4. A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sind die Ecken eines Pseudoquadrats, das heisst, die Diagonalen sind gleich lang und stehen senkrecht aufeinander. Die Punkte P_i teilen die Seiten A_iA_{i+1} im gleichen Verhältnis λ. Die Teilpunkte sind ebenfalls Ecken eines Pseudoquadrats.

   ▶ Mache $\bar{P}_iA_{i+1} = A_iP_i$. $P_1\bar{P}_2P_3\bar{P}_4$ und $\bar{P}_1P_2\bar{P}_3P_4$ sind zwei kongruente Rechtecke, die sich durch eine Drehung von 90° zur Deckung bringen lassen; also sind die Diagonalen P_1P_3 und P_2P_4 gleich lang und zueinander normal.

5. Das Dreieck $A_1B_1C_1$ ist gleichsinnig ähnlich dem Dreieck $A_2B_2C_2$. Von irgendeinem Punkt Z aus zieht man $\overrightarrow{ZA_3} = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{ZB_3} = \overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{ZC_3} = \overrightarrow{C_1C_2}$. Stets ist $\triangle A_3B_3C_3$ ähnlich $\triangle A_1B_1C_1$.

   ▶ Es genügt, den Beweis für $Z \equiv A_1$ zu führen. Man findet $\triangle C_3C_2A_2 \sim \triangle B_3B_2A_2$, woraus folgt

$$C_3A_2 : B_3A_2 = C_2A_2 : B_2A_2 \quad \text{und} \quad \sphericalangle C_3A_2B_3 = \sphericalangle C_2A_2B_2 .$$

Bericht

Internationaler Mathematikerkongress

Moskau, 16.–26. August 1966

Die hervorragenden Leistungen russischer Mathematiker in Vergangenheit und Gegenwart sind durch ein ausgedehntes Übersetzungsprogramm allgemein bekannt geworden. Die Möglichkeiten zur persönlichen Begegnung sind hingegen immer noch beschränkt, da nur relativ wenige russische Gelehrte an Tagungen in der westlichen Welt teilnehmen. Es war daher gegeben, dass die UdSSR einmal den alle vier Jahre stattfindenden internationalen Mathematikerkongress zu sich einlud. Gegen 5000 Mathematiker aus ca. 60 Ländern (UdSSR ca. 1500, USA ca. 500, Schweiz ca. 40) leisteten dieser Einladung Folge.

Für diesen grössten Mathematikerkongress aller Zeiten konnte Moskau einen passenden Rahmen stellen. Die in dominierender Lage über der Stadt auf den Leninbergen gelegene Lomonossov-Universität (MGU), deren Hauptgebäude 31 Stockwerke umfasst, konnte in ihren Hörsälen und der 1500 Personen fassenden Aula verschiedenartigsten Platzbedürfnissen genügen. In den siebzehnstöckigen Seitenflügeln des Universitätsgebäudes finden etwa 6000 Studenten Unterkunft. Hier konnte ein grosser Teil der Kongress-