

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 21 (1966)  
**Heft:** 5

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.05.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

auf dem verallgemeinerten Transversalensatz von Euler-Gergonne und auf  $a + b + c = 2s$ , nämlich auf  $H_a^{-1} + H_b^{-1} + H_c^{-1} = \varrho^{-1}$  (Höhen  $H_v$ ). Wie beim verallgemeinerten Satz von Euler-Gergonne darf der Kreismittelpunkt überall in der Ebene liegen, also auch auf dem Rande und ausserhalb des Dreiecks. Dem und der beliebigen Grösse von  $r$  wird durch  $a', b', c', A', B', C' \cong 0$  Rechnung getragen.

I. PAASCHE, München

## LITERATUR

- [1] E. ROTHMUND, *El. Math.* 4, 90 (1949), Aufgabe 43.  
 [2] I. PAASCHE, *El. Math.* 20, 11 (1965), Bild 7 und S. 12 Ende.

## Aufgaben

**Aufgabe 508.** Es bedeute  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  das kleinste gemeinsame Vielfache der natürlichen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .  $p_1 < p_2 < \dots$  sei eine unendliche Teilfolge  $P'$  der Folge  $P$  aller Primzahlen.  $a_1 < a_2 < \dots$  sei die Folge aller natürlichen Zahlen, in deren Primzahlzerlegung nur Primzahlen aus  $P'$  vorkommen. Man beweise, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\{a_1, a_2, \dots, a_n\}}$$

immer irrational ist. Für  $P' = P$  ist das die Aufgabe 308 [*El. Math.* 14, 39 (1959)].

P. ERDÖS

*Lösung des Aufgabenstellers:* Es sei  $p_k = a_{f(k)}$  und  $A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ . Die Unmöglichkeit von  $\sum 1/A_n = u/v$  folgt sofort aus

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} A_{f(k)-1} \sum_{j=f(k)}^{\infty} 1/A_j = 0. \quad (1)$$

Um (1) zu zeigen, setzen wir

$$A_{f(k)-1} \sum_{j=f(k)}^{\infty} 1/A_j = \sum_{u=1}^{\infty} \alpha_u, \quad (2)$$

wo

$$\alpha_u = A_{f(k)-1} \sum_u 1/A_j. \quad (3)$$

In  $\sum_u$  läuft  $a_j$  über diejenigen Elemente unserer Folge, für welche  $p_k^u \leq a_j < p_k^{u+1}$  gilt. Zunächst zeigen wir, dass für jedes  $\varepsilon > 0$  und  $k > k_0(\varepsilon)$

$$\alpha_3 + \alpha_4 + \dots < \varepsilon. \quad (4)$$

Da der Beitrag jeder Primzahl  $p_i$  ( $i < k$ ) zu  $A_{f(k)-1}$  kleiner als  $p_k$  ist, hat man

$$A_{f(k)-1} < p_k^{k-1}. \quad (5)$$

Nun ist die Anzahl der Summanden  $A_j^{-1}$  in  $\alpha_u$  offenbar kleiner als  $p_k^{u+1}$ , und man erhält mit (5) also

$$\alpha_u < p_k^{k+u} \{a_1, a_2, \dots, p_k^u\}^{-1}. \quad (6)$$

Ist  $a_j \geq p_k^u$ , dann gilt

$$A_j \geq \{a_1, a_2, \dots, p_k^u\} > p_k^{(u-1)k}, \quad (7)$$

da jedes  $p_i$  einen Beitrag liefert, der grösser als  $p_k^{u-1}$  ist. Aus (6) und (7) ergibt sich  $\alpha_u < p_k^{k+u-(u-1)k}$  und damit (4) für  $k > k_0(\varepsilon)$ .

Wegen (4) genügt für den Beweis von (1) der Nachweis von

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} (\alpha_1 + \alpha_2) = 0. \quad (8)$$

Hierzu muss ich zwei Fälle unterscheiden. Zunächst nehmen wir an, dass es für jedes  $\varepsilon > 0$  beliebig grosse  $k$  mit

$$p_{k+3} < (1 + \varepsilon) p_k \tag{9}$$

gibt. Für diese  $k$  gilt dann

$$\alpha_1 + \alpha_2 = A_{f(k)-1} \left( \sum_1 1/A_j + \sum_2 1/A_j \right), \tag{10}$$

wo in  $\sum_1$  über  $p_k \leq a_j < p_{k+3}$  und in  $\sum_2$  über  $p_{k+3} \leq a_j \leq p_k^3$  summiert wird. Wegen (9) hat  $\sum_1$  höchstens  $\varepsilon p_k$  Summanden, und wegen  $A_j \geq A_{f(k)} = p_k A_{f(k)-1}$  folgt

$$A_{f(k)-1} \sum_1 < \varepsilon. \tag{11}$$

Für  $a_j \geq p_{k+3}$  gilt

$$A_j \geq A_{f(k)-1} p_k p_{k+1} p_{k+2} p_{k+3} > A_{f(k)-1} p_k^4,$$

also ist

$$A_{f(k)-1} \sum_2 < p_k^3 p_k^{-4} = 1/p_k < \varepsilon. \tag{12}$$

(8) folgt aus (10), (11) und (12).

Im zweiten Fall nehmen wir an, dass für alle genügend grossen Werte von  $l$  gilt

$$p_{l+3} \geq (1 + \varepsilon) p_l. \tag{13}$$

Aus (13) wollen wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_1 + \alpha_2) = 0 \tag{14}$$

herleiten.  $U(x)$  sei die Anzahl der  $a_i \leq x$ . Wir zeigen zunächst

$$U(x) = O(x^\varepsilon). \tag{15}$$

Aus (13) folgt sofort, dass  $\sum 1/p_k^\varepsilon < \infty$  für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt. Daraus ergibt sich (15), weil jetzt

$$a_k^{-\varepsilon} U(a_k) < \sum 1/a_k^\varepsilon = \prod (1 + p_k^{-\varepsilon} + p_k^{-2\varepsilon} + \dots) < \infty.$$

Man hat  $A_j \geq p_k A_{f(k)-1}$  für  $j \geq f(k)$ , und für  $a_j \leq p_k^3$  gibt es in (14) höchstens  $U(p_k^3)$  Summanden, somit ist

$$\alpha_1 + \alpha_2 \leq U(p_k^3)/p_k. \tag{16}$$

Aus (15) folgt natürlich  $U(p_k^3) = o(p_k)$ , und damit ergibt (16) die Richtigkeit von (14).

**Aufgabe 509.** Auf einer Geraden  $g$  liegen drei Punkte  $A, B, C$  derart, dass  $A$  ausserhalb der Strecke  $BC$  liegt und die Strecke  $AB$  kleiner als die Strecke  $AC$  ist.  $A$  sei Doppelpunkt,  $B$  und  $C$  seien Scheitel einer verschlungenen Pascalschnecke  $c$  ( $c =$  rationale Quartik mit Spitzen in den absoluten Kreispunkten).

Man ermittle eine gestreckte Pascalschnecke  $c^*$ , die den gleichen Umfang besitzt wie  $c$ .  
 R. BEREIS, Dresden<sup>1)</sup>

*Lösung des Aufgabenstellers:* Spiegelt man einen der beiden Scheitel von  $c$ , etwa  $B$ , an  $A$  nach  $B^*$ , so genügt jene (gestreckte) Pascalschnecke, deren symmetrische Scheitel  $B^*$  und  $C^* = C$  sind und deren isolierter Punkt in  $A^* = A$  liegt, der gestellten Forderung.

1. *Beweis:* Ist  $H$  die Mitte der Strecke  $AB$ , gilt also

$$\overline{OH} = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{AC}) = : a \quad \text{und sei} \quad \frac{1}{2} (\overline{AC} - \overline{AB}) = : b \quad (b < a),$$

so lautet die Polargleichung von  $c$

$$r = a \cos \varphi + b. \tag{1}$$

Der Umfang von  $c$  ergibt sich nach (1) mit

$$u = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab \cos \varphi} d\varphi. \tag{2}$$

<sup>1)</sup> Die Redaktion hat die traurige Mitteilung erhalten, dass Prof. Dr. R. BEREIS, dem die Elemente viele wertvolle Beiträge verdanken, am 6. 6. 66 verstorben ist.

Aus (2) ist ersichtlich, dass sich der Umfang von  $c$  nicht ändert, wenn die Bedeutungen von  $a$  und  $b$  vertauscht werden. In diesem Fall entsteht aber eine gestreckte Pascalschnecke  $c^*$  mit dem isolierten Punkt  $A^* = A$  und den symmetrischen Scheiteln  $B^* =$  Spiegelpunkt von  $B$  an  $A$  und  $C^* = C$ .

2. *Beweis:* Man fasst die gegebene verschlungene Pascalschnecke  $c$  als Rastpolkurve eines Gelenkdeltoides auf, dessen Steg kleiner sei als die Koppel. Die Gangpolkurve  $c^*$  muss den gleichen Umfang wie  $c$  haben, da  $c^*$ , ohne zu gleiten, auf  $c$  abrollt und nach einmaliger Umdrehung die Ausgangsstellung erreicht.

Nun gilt aber für diese speziellen Gang- und Rastpolkurven  $c^*$  und  $c$  bekanntlich die Relation  $\overline{AB} = \overline{A^*B^*}$  und  $\overline{AC} = \overline{A^*C^*}$ , nur dass der isolierte Punkt  $A^*$  von  $c^*$  jetzt innerhalb der Strecke  $B^*C^*$  liegt.

*Bemerkung:* Sind die Abmessungen des Gelenkdeltoides gegeben durch  $m, n$  ( $m < n$ ), so gilt:

$$\overline{AB} = \frac{2mn}{n-m} = -\overline{A^*B^*}, \quad \overline{AC} = \frac{2mn}{n+m} = \overline{A^*C^*}.$$

**Aufgabe 510.** Es ist zu beweisen, dass in einem Parallelepipedgitter alle vierseitigen konvexen Pyramiden mit Gitterpunktecken, die keine weiteren Gitterpunkte weder im Innern noch auf der Oberfläche enthalten, denselben Inhalt haben. Ist die Forderung der Konvexität notwendig? JÁNOS SURÁNYI, Budapest

*Lösung des Aufgabenstellers:* Wir wollen ein Polyeder oder Polygon mit Gitterpunkten als Ecken leer nennen, wenn weder im Innern noch auf dem Rande weitere Gitterpunkte liegen. Die in der Aufgabe auftretende leere Pyramide sei  $SABCD$ . Die Grundfläche  $ABCD$  ist ein Parallelogramm; denn die in ihrer Ebene  $\Sigma$  liegenden Gitterpunkte bilden ein Parallelogrammgitter, und in diesem sind die leeren konvexen Vierecke Parallelogramme. Alle weiteren Gitterpunkte liegen in Parallelebenen zu  $\Sigma$ , die in gleichem Abstand aufeinander folgen, und die in ihnen liegenden Gitter können durch Parallelverschiebung ineinander übergeführt werden. Die Pyramide  $SABCD$  werde zum Parallelepiped  $ABCDSTUV = \Pi$  ergänzt. Es genügt zu zeigen, dass  $\Pi$  leer ist, da alle leeren Parallelepipeda denselben Inhalt haben.  $\Sigma'$  sei die erste zu  $\Sigma$  parallele und die Pyramide schneidende Gitterebene.  $\Sigma'$  schneidet  $\Pi$  in einem zu  $ABCD$  kongruenten Parallelogramm und enthält also wenigstens einen zu  $\Pi$  gehörenden Gitterpunkt  $P$ . Die Gerade  $CP$  schneidet jede zu  $\Sigma$  parallele Gitterebene in einem Gitterpunkt, da die Gitterpunkte auf ihr gleiche Abstände haben. Ist  $\Sigma'$  von der durch  $S$  gehenden Parallelebene  $\Sigma_1$  verschieden, so liegt  $P$  in dem ausserhalb der Pyramide liegenden,  $L$ -förmigen Teil  $\mathfrak{B}$  des Schnittes von  $\Pi$  mit  $\Sigma'$ . Projiziert man  $\mathfrak{B}$  von  $C$  aus auf  $\Sigma_1$ , so wird diese Projektion von den beiden Streifen zwischen den Geraden  $ST$  und  $UV$  bzw.  $SV$  und  $TU$  überdeckt, und diese Streifen enthalten Gitterpunkte nur auf den Rändern, und zwar in den Abständen  $\overline{ST}$  bzw.  $\overline{SV}$ . Betrachtet man die Projektion  $P_1$  von  $P$ , so folgt, dass  $P$  nur auf der Strecke  $CU$  oder auf einem der Dreiecke  $BCT, CDV$  liegen kann. Dann gäbe es aber auf dem Durchschnitt von  $\Sigma'$  mit den Dreiecken  $ADS$  und  $ABS$  einen Gitterpunkt, und die Pyramide wäre nicht leer. (Einen ähnlichen Beweis gab auch Prof. G. HAJÓS.)

Nun sei  $ABCD$  ein nicht konvexes leeres ebenes Viereck in einem Parallelepipedgitter.  $C$  sei die einspringende Ecke und  $D_1$  das Spiegelbild von  $D$  in bezug auf den Mittelpunkt der Strecke  $AC$ .  $BD_1$  ist dann die nächste zu  $AC$  parallele, durch Gitterpunkte gehende Gerade.  $\overline{D_1B}/\overline{AC}$  ist eine ganze Zahl  $k \geq 2$ . Wählt man nun eine Gittergerade durch  $D_1$  ausserhalb der Ebene  $ABCD$  und auf ihr einen Gitterpunkt  $S$  so, dass die Anzahl der Strecken, in die  $D_1S$  durch die Gitterpunkte geteilt wird, zu  $k$  teilerfremd ist, so ist  $SABCD$  eine leere Pyramide, deren Volumen von der Wahl von  $S$  abhängt.

**Aufgabe 511.** Ist  $G$  eine primitive Permutationsgruppe und ist  $N$  ein nicht trivialer Normalteiler von  $G$ , so ist  $N$  transitiv. (Beim Beweis benutze man, dass die Standuntergruppe einer Ziffer in  $G$  maximal ist.) R.-H. SCHULZ, Mainz

*Lösung des Aufgabenstellers:*

a)  $N$  ist nicht in der Standuntergruppe  $M$  enthalten; andernfalls wäre  $Pg^n g^{-1} = P^{n'} = P$  (mit  $g$  aus  $G$  beliebig,  $n$  und  $n'$  aus  $N$  und der Standuntergruppe  $M$  auf  $P$ ) und damit  $(Pg)^n = P^g$ , was nicht möglich ist. (Eine primitive Permutationsgruppe ist ja transitiv.)

b)  $G = NM$ . Denn:  $NM = MN$  ist Untergruppe von  $G$ , da  $N$  normal.  $M$  ist in  $NM$  enthalten. Wäre  $M = NM$ , so gäbe es zu beliebigem  $n$  aus  $N$  ein  $m, m'$  aus  $M$  mit  $m' = nm$ , also  $n = m' m^{-1}$  aus  $M$ , was unter a) ausgeschlossen war.  $M$  ist also echt in  $NM$  enthalten. Aus der Maximalität von  $M$  folgt  $NM = G$ .

c)  $R$  und  $Q$  seien beliebig vorgegebene Ziffern der Permutationsgruppe. Aus der Transitivität von  $G$  folgt: Es existiert ein  $g$  aus  $G$  mit  $R^g = P$ ;  $g = nm$  nach b);  $R^{nm} = P$ ,  $R^n = P^{m^{-1}} = P$ , da  $m$  aus der Standuntergruppe. Analog existiert ein  $n'$  aus  $N$  mit  $Q^{n'} = P$ . Dann gilt  $R^{nn'^{-1}} = P^{n'^{-1}} = Q$ .  $nn'^{-1}$  ist aus  $N$ . Daraus folgt:  $N$  ist transitiv.

**Aufgabe 512.** Es seien  $n, k, m, r, s$  natürliche Zahlen,  $d(n)$  die Anzahl aller Teiler von  $n$ , und man setze

$$D_s^{(r)} = \sum_{k|n^s} \{d(k)\}^r, \quad d_s = d(n^s).$$

Dann gilt

$$D_{2m}^{(1)} = d_m d_{2m}, \quad D_{6m}^{(2)} = d_{3m} d_{4m} d_{6m}, \quad D_{2m}^{(3)} = d_m^2 d_{2m}^2.$$

E. TROST, Zürich

*Solution:* Since the various functions are factorable it suffices to take  $n = p^t$ , where  $p$  is a prime and  $t \geq 1$ . Then we have

$$D_{2m}^{(1)} = \sum_{a|b|c=p^{2mt}} 1 = (2mt + 1)(mt + 1) = d_{2m} d_m,$$

$$\begin{aligned} D_{6m}^{(2)} &= \sum_{k|p^{6mt}} (d(k))^2 = \sum_{j=0}^{6mt} (j+1)^2 = \frac{1}{6} (6mt + 1)(6mt + 2)(12mt + 3) \\ &= (6mt + 1)(3mt + 1)(4mt + 1) = d_{6m} d_{3m} d_{4m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{2m}^{(3)} &= \sum_{k|p^{2mt}} (d(k))^3 = \sum_{j=0}^{2mt} (j+1)^3 = \frac{1}{4} (2mt + 1)^2 (2mt + 2)^2 \\ &= (2mt + 1)^2 (mt + 1)^2 = d_{2m}^2 d_m^2. \end{aligned}$$

L. CARLITZ, Duke University, Durham, N.C., USA

Eine weitere Lösung sandte H. MEILI (Winterthur).

## Neue Aufgaben

**Aufgabe 533.** Mit  $A, B, C$  seien Kreise oder Geraden und auch die Inversion (bzw. Spiegelung) an denselben bezeichnet. Welche geometrische Bedingung erfüllen drei Kreise, wenn in der Möbiusgruppe der Kreistransformationen

$$ABCABCBCABCACBACBCBACB = 1$$

gilt?

H. GUGGENHEIMER, Minneapolis, USA

**Aufgabe 534.** Let  $P$  be an interior point of a triangle  $ABC$ . Let  $x, y, z$  denote the distances from  $P$  to the vertices of  $ABC$  and let  $p, q, r$  denote the perpendiculars from  $P$  to the sides of  $ABC$ . Let  $\alpha, \beta, \gamma$  denote the angles of  $ABC$ . Show that

$$x \sin(\alpha/2) + y \sin(\beta/2) + z \sin(\gamma/2) \geq p + q + r,$$

with equality only if  $P$  is the incenter of  $ABC$ .

L. CARLITZ, Durham, N.C., USA

**Aufgabe 535.** Démontrer le théorème de Fermat d'après lequel, pour  $p$  premier, les diviseurs premiers  $\neq 3$  du nombre  $2^p + 1$  sont de la forme  $2k p + 1$ , où  $k$  est un nombre naturel.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

**Aufgabe 536.** Die Gleichung

$$r x^4 + s x^3 + t x^2 + s x + r = 0$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten sei im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel. Welcher notwendigen und hinreichenden Bedingung müssen  $r$ ,  $s$ ,  $t$  genügen, wenn sich die Gleichungswurzeln rational durch die Quadratwurzeln aus zwei rationalen Zahlen darstellen lassen sollen?

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

## Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur

Folgende Gleichungssysteme sollen *graphisch* gelöst werden.

$$1. \quad \begin{cases} 2x + y + 2z = 15 \\ 4x - 5y + 3z = 8 \\ x + 3y - 4z = 10 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 22x - 12y - 14z + 181 = 0 \\ x^2 + z^2 - 16x - 10z + 73 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

► Es genügt, einen Kreis mit einer Ellipse zu schneiden.

$$L_1 (6,540; 4,540; 8,724) \quad L_2 (11,855; 9,855; 3,933)$$

$$3. \quad \begin{cases} 9(x-9)^2 + 9y^2 - 4z^2 = 0 \\ \frac{x-9}{8} + \frac{y}{12} + \frac{z}{6} = 1 \\ -\frac{x-9}{8} + \frac{y}{6} + \frac{z}{16} = 1 \end{cases}$$

► Schnitt eines Drehkegels mit einer Geraden.

$$L_1 (0,813; -5,776; 15,028) \quad L_2 (7,942; 3,272; 5,158)$$

$$4. \quad \begin{cases} (x-5)^2 + (y-2)^2 + (z-6)^2 = 49 \\ (x-11)^2 + (y-7)^2 + (z-2)^2 = 49 \\ 19x - 28y - 6,5z = 0 \end{cases}$$

► Beachte, dass die beiden Kugelradien gleich sind und die Ebene durch die beiden Kugelzentren geht.

$$L_1 (5,393; 3,832; -0,744) \quad L_2 (10,607; 5,168; 8,744)$$

$$5. \quad \begin{cases} \frac{(x-24)^2}{144} + \frac{y^2}{49} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0 \\ -7x + 24y + 100,8 = 0 \\ 15x - 40z - 432 = 0 \end{cases}$$

► Wählt man folgende Maßstäbe:

$$\begin{aligned} x\text{-Achse: } 5 \text{ cm} &\hat{=} 12 \\ y\text{-Achse: } 5 \text{ cm} &\hat{=} 7 \\ z\text{-Achse: } 5 \text{ cm} &\hat{=} 3, \end{aligned}$$

so handelt es sich um den Schnitt einer Kugel mit einer Geraden.

$$L_1 (31,451; 4,973; 0,994) \quad L_2 (21,349; 2,027; -2,794)$$