**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik

**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 21 (1966)

Heft: 5

Artikel: Ein Beitrag zur Geometrie ähnlich-veränderlicher Felder

Autor: Schaal, H.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-24653

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 14.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XXI Heft 5 Seiten 97-120 10. September 1966

## Ein Beitrag zur Geometrie ähnlich-veränderlicher Felder

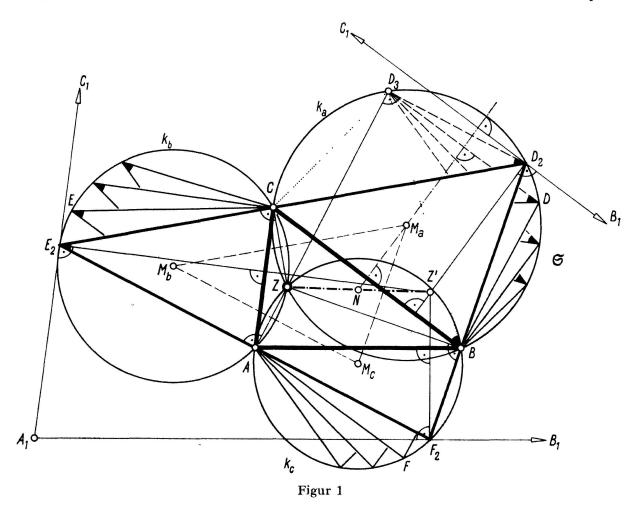
Herrn Prof. Dr. O. Baier zum 60. Geburtstag gewidmet

- 1. Ausgehend von den beiden schon bei L. Burmester ([5]<sup>1</sup>), S. 880) bzw. A. Artzt ([2], S. 6) vorkommenden elementargeometrischen Aufgaben,
- I. das kleinste zu einem Dreieck DEF gleichsinnig ähnliche Dreieck  $D_1E_1F_1$  zu bestimmen, das einem Dreieck ABC einbeschrieben ist, und
- II. das grösste zu  $\triangle$  DEF gleichsinnig ähnliche und  $\triangle$  ABC umbeschriebene Dreieck  $D_2E_2F_2$  zu ermitteln,
- gelangt man im Rahmen der Geometrie ähnlich-veränderlicher Bewegungen einerseits rasch zu einigen reizvollen Beziehungen in der Ähnlichkeitsgeometrie des Dreiecks, von denen einige einfache Sonderfälle beispielsweise in den neueren Aufsätzen [10], [21] behandelt wurden; andererseits führt eine naheliegende Verallgemeinerung zu weiteren ähnlich-veränderlichen Bewegungen, die in Beziehung zu den neueren Mitteilungen von P. H. MÜLLER ([18], S. 11–13) und R. BEREIS ([4], S. 87–89) stehen. Bewegungen dieser Art wurden zwar von L. Burmester, M. Krause und dessen Schülern Th. Hartmann und H. Alt in [5], [13], [11] bzw. [1] eingehend untersucht, doch sind die folgenden weitergehenden Ergebnisse dort nicht enthalten.
- 2. Ein Dreieck XYZ heisst einem Dreieck UVW einbeschrieben, und das Dreieck UVW heisst dem Dreieck XYZ umbeschrieben, wenn die Punkte X, Y, Z in dieser Reihenfolge mit den Geraden VW, WU bzw. UV inzidieren; es wird dabei nicht verlangt, dass Dreieck XYZ im Innern von Dreieck UVW liegt.

Zur Lösung von II betrachten wir Dreieck ABC als fest und Dreieck DEF als ähnlichveränderlich und dem Dreieck ABC umbeschrieben (Fig. 1). Durchläuft Dreieck DEF diese einparametrige Schar  $\mathfrak S$  ähnlicher Dreiecke, so wandern die Punkte D, E, F jeweils auf festen Kreisen  $k_a$ ,  $k_b$ ,  $k_c$  über den Sehnen BC, CA, AB. Diese Kreise schneiden einander in einem Punkt Z (vgl. [19]), und daher haben zum Beispiel die Winkel AEZ und AFZ konstante Grösse. Dies bedeutet, dass das Teildreieck ZEF und mit ihm das Gesamtdreieck DEF einer kontinuierlichen Folge von Drehstreckungen um das feste Zentrum Z unterliegt. Jeder von Z verschiedene Punkt, der

<sup>1)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 108.

mit dem Dreieck DEF im Sinne der Ähnlichkeitsgruppe fest verknüpft ist, beschreibt dabei als Bahnkurve einen Kreis durch Z. Es liegt daher jene spezielle kreislinige Bewegung des durch das Dreieck DEF bestimmten ähnlich-veränderlichen Systems



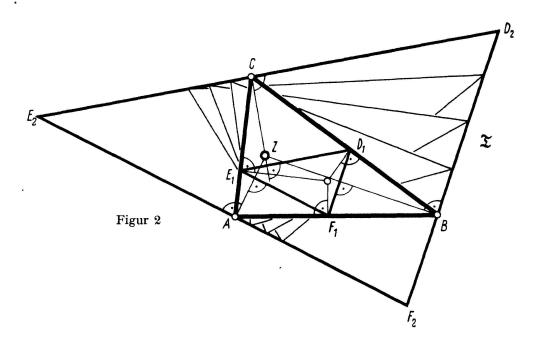
gegen das feste System des Dreiecks ABC vor, die L. Burmester in [5], S. 874–884 behandelte. Jede Gerade des bewegten Systems durchläuft dabei ein Büschel des festen Systems.

Da es eine singuläre Systemlage gibt, für welche das Dreieck DEF auf das Zentrum Z zusammenschrumpft, ist die Frage nach der kleinsten Systemlage nicht sinnvoll. Dagegen gibt es in der Schar  $\mathfrak S$  ein nicht ausgeartetes grösstes Dreieck  $D_2E_2F_2$ , welches dadurch ausgezeichnet ist, dass jede der Strecken ZD, ZE, ZF ein Maximum annimmt und daher Durchmesser von  $k_a$ ,  $k_b$  bzw.  $k_c$  ist²). Das gesuchte Maximaldreieck  $D_2E_2F_2$ wird somit von den Gegenpunkten von Z bezüglich  $k_a$ ,  $k_b$ ,  $k_c$  gebildet, und seine Seiten stehen in A, B bzw. C auf den Zentralen ZA, ZB, ZC senkrecht (vgl. [2], S. 6), oder mit anderen Worten: Die auf den Seiten des Maximaldreiecks $D_2E_2F_2$  in A, B und C errichteten Lote schneiden sich in einem Punkt. Umgekehrt folgt aus der Eindeutigkeit des gemeinsamen Schnittpunktes Z der Kreise  $k_a$ ,  $k_b$ ,  $k_c$ : Schneiden sich die auf den Seiten eines dem Dreieck ABC umbeschriebenen Dreiecks DEF in A, B und C errichteten Lote in einem Punkt, so ist  $\triangle$  DEF das grösste aus jener Schar von Dreiecken, die zu  $\triangle$  DEF ähnlich und  $\triangle$  ABC umbeschrieben sind.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>) Für den Sonderfall eines gleichseitigen Dreiecks *DEF* wurde die Aufgabe II von E. FASBENDER ([8], S. 230-231) durch Rechnung gelöst.

Die Mitten  $M_a$ ,  $M_b$ ,  $M_c$  der Kreise  $k_a$ ,  $k_b$ ,  $k_c$  gehen durch zentrische Streckung (Z;2:1) in die Punkte  $D_2$ ,  $E_2$ ,  $F_2$  über, und dabei werden die Mittellote von  $\triangle ABC$  in die Lote von  $D_2$ ,  $E_2$ ,  $F_2$  auf BC, CA bzw. AB abgebildet. Daraus ergibt sich: Die von den Ecken des Maximaldreiecks  $D_2E_2F_2$  auf BC, CA bzw. AB gefällten Lote schneiden sich in einem Punkt Z'. Der Umkreismittelpunkt N von  $\triangle ABC$  ist die Mitte der Strecke ZZ'.

3. Die Lösung von I kann man auf die Lösung von II zurückführen. Um dies auch in den Bezeichnungen deutlich zu machen, suchen wir – zunächst abweichend von I – das kleinste zu  $\triangle$  ABC gleichsinnig ähnliche und  $\triangle$   $D_2E_2F_2$  einbeschriebene Dreieck. Dazu bilden wir jedes Dreieck aus  $\mathfrak S$  auf das Maximaldreieck  $D_2E_2F_2$  ähnlich ab und nehmen dabei jeweils das Dreieck ABC mit. So entsteht eine einparametrige Schar  $\mathfrak X$  von Dreiecken³), die zu  $\triangle$  ABC gleichsinnig ähnlich und  $\triangle$   $D_2E_2F_2$  einbeschrieben sind (Fig. 2). Unter diesen ist  $\triangle$  ABC selbst das kleinste, da alle übrigen aus diesem durch ähnliche Vergrösserung hervorgingen. Dies bedeutet: Ist  $\triangle$   $D_2E_2F_2$  das grösste zu  $\triangle$  DEF gleichsinnig ähnliche und  $\triangle$  ABC umbeschriebene Dreieck, so ist  $\triangle$  ABC das kleinste zu  $\triangle$  ABC gleichsinnig ähnliche und  $\triangle$   $D_2E_2F_2$  einbeschriebene Dreieck.



Zur Konstruktion des in I gesuchten Minimaldreiecks  $D_1E_1F_1$  kann man demnach zuerst analog zu  $\mathbf 2$  das grösste zu  $\triangle$  ABC gleichsinnig ähnliche und  $\triangle$  DEF umbeschriebene Dreieck bestimmen und dieses zusammen mit  $\triangle$  DEF in den gewünschten Maßstab übertragen. Dann geht  $\triangle$  DEF in das gesuchte Minimaldreieck  $D_1E_1F_1$  über.

Dem Übergang von der Schar  $\mathfrak Z$  zur Schar  $\mathfrak Z$  entspricht vom kinematischen Standpunkt aus der Übergang von einer (kontinuierlichen) Bewegung zu ihrer Umkehrbewegung (vgl. z. B. [20]), wobei zur stetigen Lagenänderung im Falle starrer Systeme jetzt noch eine stetige Maßstabsänderung der bewegten Figur hinzukommt. Da das Drehstreckungszentrum Z im vorliegenden Fall in beiden Systemen fest ist, gehen auch die Dreiecke der Schar  $\mathfrak Z$  durch eine kontinuierliche Folge von Drehstreckungen um Z auseinander hervor, wobei die Punkte A, B, C die Geraden  $E_2F_2$ ,  $F_2D_2$ ,  $D_2E_2$ 

<sup>3)</sup> Diese Schar T erhielt W. Götz ([10], S. 65, Fig. 8) auf anderem Wege.

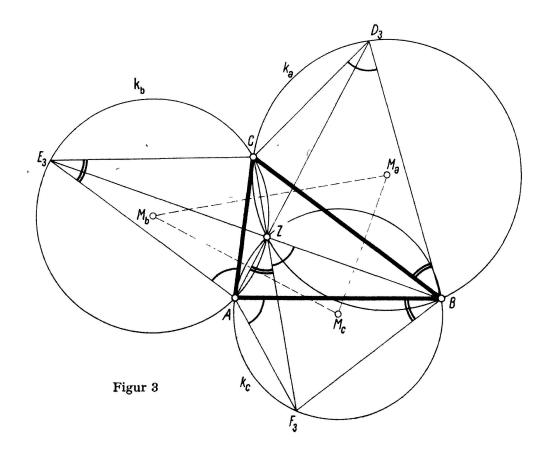
durchlaufen. Ebenso läuft jeder von Z verschiedene Punkt P des durch ABC bestimmten ähnlich-veränderlichen Systems auf einer Geraden, welche in der betrachteten Minimallage zu ZP senkrecht steht. Der singulären Systemlage aus  $\mathfrak S$  entspricht in  $\mathfrak X$  jene, in welcher A, B und C und damit jeder von Z verschiedene Systempunkt jeweils in den Fernpunkt seiner Bahngeraden gerückt ist.

Die durch  $\mathfrak{T}$  bestimmte ähnlich-veränderliche Bewegung wurde von L. Burmester ([5], S. 875–884) als «geradlinige Bewegung» bezeichnet und besitzt ebenso wie  $\mathfrak{S}$  eine Reihe bemerkenswerter Eigenschaften, von denen einige, die vielleicht nicht allgemein bekannt sind (vgl. [5], [25]), in 4 und 5 auf kurzem Wege hergeleitet werden.

4. Die Parallele zu EF durch D bildet mit DE (und mit DF) einen Winkel fester Grösse und gleitet daher vermöge  $\mathfrak S$  durch einen festen Punkt  $D_3$  des Kreises  $k_a$  (Fig. 1). In der Lage  $EF \mid\mid BC$  ist  $DD_3 \mid\mid BC$ ; die Dreiecke DCB und DEF sind dann gleichsinnig ähnlich. Da  $\triangle DCB$  und  $\triangle D_3BC$  symmetrisch sind in bezug auf das Mittellot der Seite BC, erhält man  $D_3$ , indem man an die Seite BC des gegebenen Dreiecks ABC das zu  $\triangle DEF$  ungleichsinnig ähnliche Dreieck  $D_3BC$  ansetzt.

Insbesondere geht die durch  $D_2$  gezogene Parallele zu  $E_2F_2$  durch den Punkt  $D_3$ , und da  $k_a$  der Thaleskreis über der Strecke  $ZD_2$  ist, folgt weiter, dass AZ durch  $D_3$  geht. Die in II gesuchte Lage von  $E_2F_2$  ergibt sich daher besonders einfach (ohne Zeichnen von  $k_a$  und  $k_b$ ) als Lot zu  $AD_3$  in A; die übrigen Seiten von  $\triangle D_2E_2F_2$  ergeben sich aus der Ähnlichkeit von  $\triangle D_2E_2F_2$  und  $\triangle DEF$ .

Setzt man auch den Seiten CA und AB die zu  $\triangle DEF$  ungleichsinnig ähnlichen Dreiecke  $AE_3C$  und  $ABF_3$  auf (Fig. 3), so kann man unmittelbar den folgenden Satz aus der Theorie der «Aufsatzdreiecke» (vgl. [24], S. 1216 f.) ablesen, den der Student E. Engelbrecht in [7], S. 447-448 hergeleitet hat: Setzt man den Seiten eines Dreiecks ABC drei unter sich gleichsinnig ähnliche Dreiecke  $D_3CB$ ,  $ACE_3$  und  $AF_3B$  auf, so



schneiden sich die drei Geraden  $AD_3$ ,  $BE_3$  und  $CF_3$  in einem Punkt Z unter den in diesen Aufsatzdreiecken vorkommenden Winkeln, und die Umkreise der drei Aufsatzdreiecke schneiden einander ebenfalls in diesem Punkt Z.

Ebenso leicht entnimmt man Figur 1 folgende weitere Eigenschaften dieser in [24], S. 1218, nach E. Torricelli<sup>4</sup>) benannten Figur 3: Das von den Umkreismitten  $M_a$ ,  $M_b$ ,  $M_c$  gebildete Dreieck ist ungleichsinnig ähnlich zu den Aufsatzdreiecken, und die Verbindungsstrecken  $AD_3$ ,  $BE_3$ ,  $CF_3$  verhalten sich umgekehrt proportional wie die Seiten eines der Aufsatzdreiecke. Die letzte Behauptung folgt aus der Tatsache, dass die Strecke  $AD_3$  gleich der von  $D_2$  (Fig. 1) auf die Seite  $E_2F_2$  gefällten Höhe des zu den Aufsatzdreiecken ungleichsinnig ähnlichen Maximaldreiecks  $D_2E_2F_2$  ist und Analoges von  $BE_3$  und  $CF_3$  gilt<sup>5</sup>).

Im Sonderfall regulärer Aufsatzdreiecke folgt hieraus die bekannte Gleichheit der Diagonalenstrecken  $AD_3$ ,  $BE_3$ ,  $CF_3$ . Ihr Schnittpunkt Z ist in diesem Fall nach E. Torricelli benannt, oder auch nach P. de Fermat (vgl. [6], S. 38f., [24], S. 1218 und 1219), weil Z für spitzwinklige Grunddreiecke ABC die (eindeutige) Lösung des von P. de Fermat gestellten Problems ist, jenen Punkt P zu finden, für den die Abstandssumme  $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$  ein Minimum annimmt. Einen eleganten Beweis hierfür hat auch J. E. Hofmann ([12], S. 22–23) mitgeteilt.

Drei weitere Sonderfälle ergeben sich aus der Annahme, dass  $\triangle$  DEF gleichsinnig ähnlich zu  $\triangle$  ABC, zu  $\triangle$  BCA oder zu  $\triangle$  CAB ist. Die Aufsatzdreiecke sind dann jeweils ungleichsinnig ähnlich zum Grunddreieck ABC, und die drei Permutationen der Anordnung der Torricelli-Figur führen dann zum Höhenschnittpunkt bzw. zu den beiden Brocardschen Punkten des  $\triangle$  ABC als Lagen von Z. Diese drei Sonderfälle gehen nach ([24], S. 1227) auf Crelle zurück (vgl. auch L. Burmester [5], S. 881 und 882, J. Neuberg [19]).

5. Durch Iteration der in 4, Absatz 2, angegebenen Konstruktion des Dreiecks  $D_2E_2F_2$  kann das grösste jetzt diesem umbeschriebene und zu  $\triangle$  ABC gleichsinnig ähnliche Dreieck  $A_1B_1C_1$  bestimmt werden (Fig. 1), das man aber noch einfacher auf folgende Weise findet: Die Parallelen zu BC, CA und AB durch  $D_2$ ,  $E_2$  bzw.  $F_2$  bilden ein zu  $\triangle$  ABC zentrisch ähnliches und  $\triangle$   $D_2E_2F_2$  umbeschriebenes Dreieck, dessen Seiten in  $D_2$ ,  $E_2$ ,  $E_2$  Lote mit dem gemeinsamen Schnittpunkt Z' besitzen, und daher ist dieses zu  $\triangle$  ABC zentrisch ähnliche Dreieck  $A_1B_1C_1$  das grösste zu  $\triangle$  ABC ähnliche und  $\triangle$   $D_2E_2F_2$  umbeschriebene.

Überträgt man dieses Resultat auf die in I und II genannten Dreiecke, so ergibt sich zusammen mit den Eigenschaften aus 3, der folgende bemerkenswerte Zusammenhang zwischen den Aufgaben I und II:

Das grösste zu  $\triangle$  DEF gleichsinnig ähnliche und  $\triangle$  ABC umbeschriebene  $\triangle$   $D_2E_2F_2$  ist zum kleinsten zu  $\triangle$  DEF gleichsinnig ähnlichen und  $\triangle$  ABC einbeschriebenen Dreieck  $D_1E_1F_1$  zentrisch ähnlich (Fig. 2).

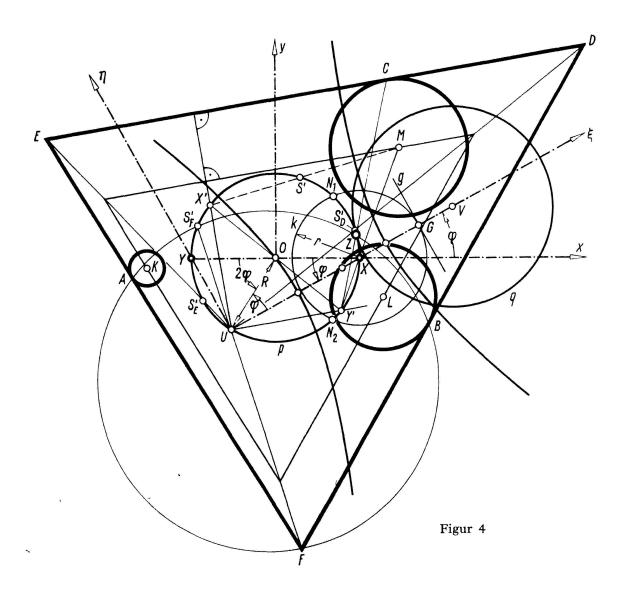
6. Die Umbeschreibungsaufgabe II führt zu einer naheliegenden V erallgemeinerung, indem man die Ecken des festen Dreiecks ABC durch Kreise um K, L, M ersetzt (Fig. 4). Um Eindeutigkeit der Umbeschreibung zu erzielen, seien die Seiten des

<sup>4)</sup> E. Torricelli hat allerdings nur den Sonderfall regulärer Aufsatzdreiecke untersucht; diesen Spezialfall behandelte auch E. Fasbender durch Rechnung ([8], S. 231).

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>) E. Engelbrecht benützte zum Nachweis eine planimetrische Rechnung, [7], vgl. auch [26].

Dreiecks DEF (unabhängig von dessen Umlaufsinn) als Speere und die Kreise als  $Zykel^6$ ) orientiert. Das Speerdreieck DEF heisse den Zykeln um K, L, M umbeschrieben, wenn die auf EF, FD, DE liegenden Speere in dieser Reihenfolge Tangentenspeere der Zykel um K, L bzw. M sind; diese Umbeschreibung bleibt erhalten, wenn man die Orientierungen eines Zykels und seines Tangentenspeeres gleichzeitig umkehrt.

Dreht man die drei Speere um die Mitten ihrer Berührzykel durch denselben orientierten Winkel  $\varphi$ , der das Intervall  $\langle 0,2\pi \rangle$  durchläuft, so bestimmt ihr Schnitt-dreieck DEF eine ähnlich-veränderliche Bewegung  $\mathfrak{S}$ , die im Sonderfall dreier Nullzykel in die in 2 betrachtete spezielle kreislinige Bewegung übergeht. Jeder der



Punkte D, E, F beschreibt im allgemeinen Fall eine Pascal-Schnecke als isoptische Kurve eines Kreispaares, (vgl. z. B. [20], S. 62). Nach R. Bereis [4] können die Schenkel eines auf einem Kreispaar reitenden Winkels fester Grösse als ein Paar der von P. H. Müller [18] eingeführten adjungierten Geraden eines Kreiszwillings aufgefasst werden; sie gehen nach [4] samt den von ihnen umhüllten Kreisen durch eine Drehstreckung um den singulären Punkt der vom Winkelscheitel durchlaufenen Pascal-Schnecke ineinander über. Danach findet man beispielsweise den singulären

<sup>6)</sup> Die im folgenden verwendeten Begriffe der Zykelgeometrie sind in [15] erklärt, vergl. auch [26].

 $Punkt \, S_F'$  der von F beschriebenen Pascal-Schnecke als (stets reellen)  $Schnitt \, des \, Kreises \, durch \, A$ , B, F mit jener Geraden, die F mit dem  $Schnittpunkt \, der \, Parallelen zu \, FA \, durch \, K$  und zu FB durch L verbindet (Fig. 4). In analoger Weise erhält man die singulären Punkte  $S_D'$  und  $S_E'$  der von D und E durchlaufenen Pascal-Schnecken.

Die drei Geraden  $DS'_D$ ,  $ES'_E$ ,  $FS'_F$  schneiden einander in jenem Punkt U des bewegten Systems, dessen Abstände von den Speeren des Dreiecks DEF sich wie die Radien der zugehörigen Hüllzykel um K, L, M verhalten, und sie gleiten im Verlauf von  $\mathfrak S$  durch die festen, als Nullzykel aufgefassten Punkte  $S'_D$ ,  $S'_E$  bzw.  $S'_F$ , falls diese verschieden sind. Der ausgezeichnete Punkt U, der nur im Sonderfall der in  $\mathbf 2$  behandelten speziellen kreislinigen Bewegung unbestimmt ist, durchläuft dann den durch  $S'_D$ ,  $S'_E$  und  $S'_F$  bestimmten Kreis p und soll der «Ursprung» des bewegten Systems heissen. Nennt man Geraden, die Nullzykel einhüllen, «Nullgeraden», so gilt:  $Die\ durch\ U\ gehenden\ Geraden\ des\ bewegten\ Systems\ sind\ Nullgeraden,\ und\ umgekehrt\ geht\ jede\ Nullgerade\ durch\ den\ Ursprung\ U$ ; die von den Nullgeraden umhüllten  $Nullzykel\ liegen\ auf\ p$ .

Sind nicht alle drei singulären Punkte  $S_D'$ ,  $S_E'$ ,  $S_F'$  verschieden, so fallen sie alle mit dem Ursprung U zusammen, der als festbleibender Punkt den  $Momentanpol^7$ ) Z von  $\mathfrak S$  darstellt. Solche ähnlich-veränderliche Bewegungen mit festem Momentanpol Z heissen nach [5], S. 867, «einförmig». Für diese fallen die Nullzykel mit Z zusammen, und die Nullgeraden inzidieren mit Z.

Extreme Systemlagen stellen sich genau dann ein, wenn der Abstand des Ursprungs U von einer nicht durch ihn gehenden Dreiecksseite, z.B. von DE, ein relatives Maximum oder Minimum annimmt. Ist Y' der Nullzykel der zu DE parallelen Nullgeraden, so muss DE also für  $M \neq Y'$  eine zu Y'M normale Lage einnehmen, was auf zweifache Weise möglich ist<sup>8</sup>). Damit gilt zusammenfassend für nicht kreislinige und nicht starre Bewegungen  $\mathfrak{S}$ :

Bei einer ähnlich-veränderlichen Bewegung & eines drei Zykeln umschriebenen Speerdreiecks gibt es durch jede Ecke des Dreiecks genau eine Nullgerade; der von ihr umhülte Nullzykel liegt im singulären Punkt der von der zugehörigen Ecke durchlaufenen Pascal-Schnecke. Diese drei Nullgeraden schneiden einander im Ursprung U des bewegten Systems, der im allgemeinen Fall auf dem Kreis p durch die singulären Punkte der Pascal-Schnecken läuft, im Sonderfall einer einförmigen Bewegung in den festen Momentanpol Z fällt. & besitzt zwei extreme Systemlagen, die dadurch festliegen, dass einer (und damit jeder) der bewegten Speere senkrecht auf der Verbindungsgeraden der Mitte seines Hüllzykels mit dem Nullzykel der zu ihm parallelen Nullgeraden steht.

7. Zur weiteren Untersuchung der nicht einförmigen Bewegung  $\mathfrak{S}$  wollen wir die Angabe der sie bestimmenden Zykel und Speere normieren. Zunächst können anstelle der Speere EF und FD und ihrer Hüllzykel um K bzw. L auch die zu DE normalen und parallelen Nullgeraden mit ihren Nullzykeln X' bzw. Y' vorgegeben sein (Fig. 4). Der Momentanpol von  $\mathfrak{S}$  ist jener eindeutig bestimmte Punkt Z, dessen Verbindungsstrahlen zu den Bahn- und Hüllbahnpunkten mit deren Bahn- bzw. Hüllbahntangenten gleiche Winkel bilden und liegt daher in dem von  $S_F'$  im allgemeinen verschiedenen Schnittpunkt des Kreises p mit dem Kreis durch A, B, F. Im Verlauf von  $\mathfrak{S}$  ändert Z

vor, deren Eigenschaften z.B. in [20] hergeleitet wurden.

<sup>7)</sup> Die Grundbegriffe der Kinematik ähnlich-veränderlicher Felder sind z.B. in [13], S. 132 ff. enthalten. 8) Für M = Y' liegt der im weiteren ausgeschlossene Sonderfall einer (starren) Konchoidenbewegung

seine Lage auf dem festen Kreis p, und da p die zu Nullzykeln ausgearteten Geradenhüllkurven trägt, und da deren Tangentenspeere durch den Ursprung U weisen, gilt:

Bei der ähnlich-veränderlichen Bewegung & fungiert der Kreis p als Rastpolkurve und ist zugleich der Rückkehrkreis mit dem Ursprung U als Rückkehrpol.

Da auch die Gerade Y'C durch den Momentanpol gehen muss, fällt Z für die beiden extremen Systemlagen in den von Y' im allgemeinen verschiedenen Schnittpunkt X von Y'M mit p. Diesen ausgezeichneten Punkt X und seinen bezüglich p diametralen Punkt Y verwenden wir künftig zur normierten Angabe von  $\mathfrak{S}$ , wobei UX und UY als zugehörige Nullgeraden mit gegeben seien (Fig. 4).

Ist S' der zweite Schnittpunkt von X'M mit p (Fig. 4), so führt nach dem Peripheriewinkelsatz am Kreis p jene Bereissche Drehstreckung um S', die den Nullzykel Y' in den Nullzykel Y bringt, die Geraden S'X' und XY' in die Geraden S'X und XY und daher den Punkt M in den ausgezeichneten Punkt X über. Der Speer auf DE geht dabei in einen zu UY parallelen Speer g, der Hüllzykel um M in die Hüllkurve von g, also einen Zykel k mit der Mitte X und einem gewissen von Null verschiedenen Radius r über. Da man die Orientierung eines Zykels und seiner Tangentenspeere gleichzeitig umkehren darf, gilt:

Die ähnlich-veränderliche Bewegung  $\mathfrak S$  lässt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit in eindeutig normierter Weise dadurch vorgeben, dass die Schenkel eines rechten Winkels mit Scheitel U durch zwei feste Nullzykel X, Y gleiten und ein zum Schenkel UY paralleler Speer g einen positiv orientierten Zykel k um X mit Radius r>0 ständig berührt (Fig. 4). Der Scheitel U ist dann der Ursprung des bewegten Systems, der Punkt X der Momentanpol für die beiden extremen Systemlagen und der Thaleskreis p über XY die Rastpolkurve.

Im Sonderfall einer einförmigen Bewegung  $\mathfrak{S}$  fallen X und Y in den festen Momentanpol Z, und als normierte Angabe von  $\mathfrak{S}$  kann Z und der Hüllzykel eines beliebigen Speeres dienen.

8. Der Berührpunkt G von g und k (Fig. 4) ist als Schnitt der beiden Systemgeraden UX und g ein Punkt des bewegten Systems; seine Bahnkurve ist der Kreis k. Auch der Ursprung U durchläuft einen Kreis als Bahn, nämlich p. Man kann zeigen, dass G und U die einzigen Punkte mit Bahnkreisen sind und alle anderen Punkte Pascalsche Schnecken oder Kardioiden durchlaufen $^9$ ): Zuerst folgt mittels der Drehstreckung von Bereis, dass jede nicht durch U gehende Gerade einen Kreis umhüllt (vgl. auch [11], S. 126); jeder Punkt kann als Schnittpunkt von zwei solchen Geraden aufgefasst werden und beschreibt daher wie D, E, E im allgemeinen eine Kurve der genannten Art, deren singulärer Punkt auf E liegt. Der Punkt E ist dadurch ausgezeichnet, dass die durch ihn gehenden Geraden speziell konzentrische Hüllkreise um E besitzen, so dass seine Bahnkurve in den E und dessen (isotrope) Asymptoten zerfällt, während der Ursprung E dadurch charakterisiert ist, dass die durch ihn gehenden Geraden Nullzykel umhüllen, die auf seinem doppelt zu zählenden Bahnkreis E liegen.

In den beiden extremen Systemlagen fällt der Ursprung U nach Y und hat vom Speer g den orientierten Abstand  $r \pm 2 R$ , wenn R > 0 der Radius von p ist. Wählt man

 $<sup>^9</sup>$ ) Vgl. [11], S. 125; Th. Hartmann hat in dieser Dissertation die Existenz von zwei solchen Punkten U,G durch aufwendige Rechnung ohne nähere Angaben über sie nachgewiesen. Dass unter den Bahnkurven speziell auch Kardioiden auftreten (siehe Abschnitt 10), wurde dort nicht erwähnt.

die zum oberen Zeichen gehörige Extremlage als Ausgangslage für die Zählung des Drehwinkels  $\varphi$ , so legt  $\varphi = \pi$  die andere Extremlage fest, und für beliebige Systemlagen hat U von g den orientierten Abstand (Fig. 4)

$$\overline{Ug} = r + 2 R \cos \varphi , \qquad (1)$$

dessen Verschwinden die Nullagen von  $\mathfrak S$  kennzeichnet. Es gibt daher in algebraischer Zählung genau zwei Nullagen, die getrennt reell, zusammenfallend oder konjugiert komplex sind, je nachdem r < 2 R, r = 2 R oder r > 2 R ist; dieselben Realitätsverhältnisse zeigen die Schnittpunkte  $N_1$  und  $N_2$  von k und p, in denen sich mit U und G alle Punkte des bewegten Systems in den Nullagen vereinen. Wegen  $\overline{Yg} = \overline{Ug}$  weist die Grenzlage des Tangentenspeeres g von k in  $N_1$  bzw.  $N_2$  durch Y.

Sämtliche Bahnkurven von  $\mathfrak S$  müssen durch  $N_1$  und  $N_2$  hindurchgehen; da sie bizirkulare Quartiken sind (vgl. [9], S. 284), haben sie mit dem Kreis p acht Schnittpunkte gemeinsam, von denen vier in die absoluten Kreispunkte fallen. Weiters liegt der doppelt zu zählende singuläre Punkt der Bahnkurven auf p, so dass mit  $N_1$  und  $N_2$  die restlichen beiden Schnittpunkte bestimmt sind.

9. Zur analytischen Behandlung von  $\mathfrak S$  führt die nach 7 normierte Vorgabe zu einer besonders einfachen Bauart der Bewegungsgleichungen, die man als ihre Normalform anzusprechen hat. Die feste Ebene sei auf das kartesische Koordinatensystem (x, y) bezogen, dessen Ursprung in der Mitte O des Rastpolkreises p liegt und dessen x-Achse durch den Punkt X(R, 0) weist (Fig. 4). Das bewegte System sei durch das kartesische Koordinatensystem  $(\xi, \eta)$  festgelegt, dessen Anfangspunkt im Ursprung U liegt und dessen  $\xi$ - bzw.  $\eta$ -Achse in den Nullstrahl UX bzw. UY fällt. Die Einheitsstrecke des  $(\xi, \eta)$ -Systems sei so gewählt, dass g die Gleichung

$$\xi = 1 \tag{2}$$

besitzt, so dass der vom Drehwinkel  $\varphi$  abhängige Ähnlichkeitsfaktor  $\lambda$  nach (1) den Wert

$$\lambda = r + 2 R \cos \varphi \tag{3}$$

annimmt. Fasst man die Koordinaten (x, y) und  $(\xi, \eta)$  zu komplexen Zahlen z = x + i y bzw.  $\zeta = \xi + i \eta$  zusammen, wie es in der gewöhnlichen Kinematik R. Mehmke [14] und in neuerer Zeit W. Wunderlich [22], R. Bereis [3] und H. R. Müller [17] vorgeführt haben, so lautet die Normalform 10 von  $\mathfrak{S}$ :

$$z = -R e^{2i\varphi} + (r + 2 R \cos \varphi) \zeta e^{i\varphi}; \qquad (4)$$

die feste und die ähnlich-veränderliche Ebene können dabei jeweils als Gaußsche Zahlenebenen aufgefasst werden.

Die Bewegungsgleichung (4) geht für c=R aus der nicht bis zur Normalform spezialisierten Gleichung

$$z = -R e^{2i\varphi} + [r + (R + c)\cos\varphi] \zeta e^{i\varphi}, \quad c \text{ reell}$$
 (5)

 $<sup>^{10}</sup>$ ) Bei den in [11] und [1] durchgeführten Koordinatenrechnungen gehen 6 bzw. 5 willkürliche Konstanten ein; in (4) könnte man durch geeignete Wahl der Einheitsstrecke des festen Systems R=1 setzen, so dass nur noch eine willkürliche Konstante auftritt.

hervor, in welcher statt X der Punkt (c, 0) als Mitte des gegebenen Hüllzykels gewählt ist. Durch (5) werden alle möglichen Sonderfälle erfasst:

- a) R = 0,  $r^2 + c^2 \neq 0$ : Einförmige Bewegung mit festem Momentanpol Z = O = U,
- b)  $R + c \neq 0$ , r = 0: Spezielle kreislinige Bewegung (vgl. 2) mit Z(R, 0),
- c) R + c = 0,  $r \neq 0$ : (Starre) Konchoidenbewegung mit Momentanpol  $z = R e^{2i\varphi}$ ,
- d) R = c = 0,  $r \neq 0$ : Reine Drehung um O (Sonderfall von a und c).

Als Beispiel zur analytischen Behandlungsweise diskutieren wir im allgemeinen Fall R = c + 0, r + 0 die Abbildung der Speere der  $\xi$ ,  $\eta$ -Ebene auf ihre Hüllzykel in der x, y-Ebene. Unter Verwendung orientierter Speerkoordinaten  $(\alpha, p)$  besitzt ein Speer des Systems  $(\xi, \eta)$  die Gleichung

$$\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha = \rho , \qquad (6)$$

die durch die zu (4) inverse Transformation

$$\zeta = (r + 2 R \cos \varphi)^{-1} (z + R e^{2i\varphi}) e^{-i\varphi}$$
 (7)

übergeht in

$$x\cos(\varphi + \alpha) + y\sin(\varphi + \alpha) = pr + 2pR\cos\varphi - R\cos(\varphi - \alpha). \tag{8}$$

Die Ableitung nach dem Scharparameter  $\varphi$  bringt

$$-x\sin(\varphi+\alpha)+y\cos(\varphi+\alpha)=-2pR\sin\varphi+R\sin(\varphi-\alpha). \tag{9}$$

Der Hüllzykel des Speeres  $(\alpha, p)$  folgt aus (8) und (9) zu

$$z = p \, r \, e^{i(\varphi + \alpha)} + 2 \, p \, R \, e^{i \, \alpha} - R \, e^{2 \, i \, \alpha}, \tag{10}$$

wobei die Mitte  $z_h$  und der Radius  $r_h$  des Zykels durch

$$z_h = 2 \not p R e^{i \alpha} - R e^{2 i \alpha}, \quad r_h = \not p r \tag{11}$$

festliegen.

Da  $r_h$  nur von p abhängt, besitzen die Hüllzykel jener Speere, die im System  $(\xi, \eta)$  den Zykel um U mit Radius p berühren, im System (x, y) alle denselben Radius p r, und ihre Mitten  $z_h$  liegen nach (11) auf jener Pascal-Schnecke oder Kardioide, die durch konchoidale Erzeugung mittels des Rastpolkreises und einer durch den festen Punkt X gleitenden Strecke der Länge 2p R entsteht.

Das zyklographische Bild (vgl. [15], S.9) der zweiparametrigen Schar der Hüllzykel ist eine zur x, y-Ebene symmetrische  $Strahlfläche \Phi$  mit der Parameterdarstellung (11), in der  $z_h$  den Grundriss und  $r_h$  die Koten der Flächenpunkte festlegen und  $\alpha$ ,  $\phi$  die Parameter sind. Die Erzeugenden  $\alpha$  = konst. haben konstante Böschung r: 2 R und treffen die vertikale Leitgerade x = R, y = 0, die mithin die Striktionslinie von  $\Phi$  ist. Da der Rastpolkreis und der Fernkreis des Richtdrehkegels als zwei weitere Leitkurven fungieren, ist  $\Phi$  nach [16], S. 36, 33 algebraisch vom 4. Grad, und da die Doppelkurve von  $\Phi$  in den Rastpolkreis und die ihn schneidende Leitgerade zerfällt, von V. Art nach der Sturmschen Einteilung (vgl. [16], S. 260). Striktion und konische Krümmung von  $\Phi$  sind konstant und ergeben sich unmittelbar aus der Böschung der Erzeugenden.

Den Parallelspeerbüscheln  $\alpha = \text{konst.}$  der  $\xi$ ,  $\eta$ -Ebene entsprechen die Erzeugenden von  $\Phi$  und daher in der x, y-Ebene lineare Zykelreihen mit gemeinsamem Modul 2R: r

(vgl. [15], S. 31), der gleich dem Kehrwert der konischen Krümmung von  $\Phi$  ist. Diese Zykelreihen sind also hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch, je nachdem r < 2 R, = 2 R oder > 2 R ist, also je nachdem die Schnittpunkte  $N_1$ ,  $N_2$  der Kreise  $\phi$  und k reell getrennt, zusammenfallend oder konjugiert komplex sind, und die Nullzykel der Reihen liegen nach (11) auf dem Kreis  $\phi$  in Übereinstimmung mit  $\mathbf{6}$ .

10. Die kinematische Umkehrung der ähnlich-veränderlichen Bewegung  $\mathfrak{S}$  mit dem Drehwinkel  $\varphi$  und dem Modul  $\lambda = \lambda(\varphi)$  ist eine ähnlich-veränderliche Bewegung  $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}^{-1}$  mit dem Drehwinkel  $-\varphi$ , dem Modul  $\lambda^{-1}$  und der Bewegungsgleichung (7), die aus der zu (5) inversen Gleichung

$$\zeta = [r + (R + c) \cos \varphi]^{-1} (z + R e^{2i\varphi}) e^{-i\varphi}$$
 (12)

ohne Beschränkung der Allgemeinheit für c=R hervorgeht. Es können die folgenden Sonderfälle auftreten, die jeweils die Umkehrbewegungen der in 9 aufgetretenen Sonderfälle von  $\mathfrak S$  sind:

- a) R = 0,  $r^2 + c^2 \neq 0$ : Einförmige Bewegung mit festem Momentanpol Z = U = 0,
- b)  $R + c \neq 0$ , r = 0: Geradlinige Bewegung (vgl. 3) mit Z[R/(R + c), 0],
- c) R + c = 0,  $r \neq 0$ : (Starre) Kardanbewegung (Ellipsenbewegung) mit dem Momentanpol  $\zeta = 2 Rr^{-1} e^{i\varphi}$ ,
- d) R = c = 0,  $r \neq 0$ : Reine Drehung um U.

Im allgemeinen Fall  $R = c \neq 0$  sind  $\zeta$  und das Konjugium  $\bar{\zeta}$  linear gebrochene Funktionen von  $e^{i\varphi}$  und  $e^{-i\varphi}$ , so dass die Bahnkurven der Punkte z Kegelschnitte sind. Die Punkte des Kreises p, der nun die Rolle der Gangpolkurve übernimmt, laufen speziell auf den in **6** hergeleiteten Nullgeraden durch U.

Die Bahnkurve des Anfangspunktes z=0 lässt sich besonders einfach beschreiben, wenn man im System  $(\xi,\eta)$  in üblicher Weise Polarkoordinaten  $\varrho,\varphi$  einführt, wobei  $\varphi$  zugleich der bisher verwendete Drehwinkel ist. Aus (7) folgt dann die bekannte Gleichung

$$\varrho = \frac{R}{r + 2R\cos\varphi} \tag{13}$$

eines zur  $\xi$ -Achse symmetrischen Kegelschnittes mit Brennpunkt U, Parameter R/r und Exzentrizität  $\varepsilon=2$  R/r; man hat eine Hyperbel (Fig. 4), eine Parabel oder eine Ellipse, je nachdem r<2 R, =2 R oder >2 R ist. Die Halbachsen der Mittelpunktskegelschnitte sind a=R r: |4  $R^2-r^2$  | und b=R:  $\sqrt{|4$   $R^2-r^2|}$ , ihre lineare Exzentrizität beträgt e=2  $R^2$ : |4  $R^2-r^2|$ .

Dieser von der Mitte O des Gangpolkreises p im Verlauf von  $\mathfrak{T}$  beschriebene Kegelschnitt führt zu einer elementaren Bestimmung der Rastpolkurve q von  $\mathfrak{T}$ : Da p in allen Lagen auch durch den Brennpunkt U geht, umhüllen diese den Leitkreis des Kegelschnittes (13) um den zweiten Brennpunkt V mit den  $\xi$ ,  $\eta$ -Koordinaten  $4R^2$ :  $|4R^2-r^2|$ , 0 bzw. im Fall r=2R die Leitlinie  $\xi=1/2$ , die als Mittelparallele der  $\eta$ -Achse und des vorgegebenen Speeres g auftritt. Dieser Leitkreis bzw. diese Leitgerade ist mithin die Rastpolkurve q, und es gilt q1):

 $<sup>^{11}</sup>$ ) H. Alt hat in seiner Dissertation [1] zwar Parameterdarstellungen der Polkurve q für verschiedene Bewegungsfälle hergeleitet, doch nicht bemerkt, dass im vorliegenden Fall q ein Kreis bzw. eine Gerade ist; demzufolge sind auch die obigen Resultate dort nicht enthalten.

Die Rastpolkurve q der Bewegung  $\mathfrak T$  ist der Leitkreis bzw. die Leitgerade des vom Mittelpunkt O des Gangpolkreises p durchlaufenen Bahnkegelschnittes (13) mit Brennpunkt U (Fig. 4).

Im Sonderfall c) sind p und q die bekannten Polkreise mit dem Radienverhältnis 1:2. Im allgemeinen Fall hat q den Radius 2 a=2 R r: | 4  $R^2-r^2$  |, gemessen in der Einheit des  $\xi$ ,  $\eta$ -Systems.

Da Z im Berührungspunkt von p und q liegt, ist der zweite Brennpunkt V ein Punkt der Geraden OZ.

Da die Punkte von q wie im Fall starrer Bewegungen Bahnkurven durchlaufen, die im allgemeinen mit einer Spitze auf p aufsetzen und nur Punkte von q Bahnkurven mit Spitzen aufweisen können, so gilt ergänzend zu 8:

Die Punkte der Gangpolkurve q von S haben die kennzeichnende Eigenschaft, dass ihre Bahnkurven Kardioiden sind.

H. Schal, Stuttgart

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Alt, H., Zur Theorie der Geschwindigkeits- und Beschleunigungspläne einer komplan bewegten Ebene, Dissertation Dresden (1914).
- [2] ARTZT, A., Untersuchungen über ähnliche Dreiecke, die einem festen Dreieck umschrieben sind, nebst einer Anwendung auf die Gerade der zwölf harmonischen Punktreihen und ihre beiden Gegenbilder, die Ellipse und den Kreis der zwölf harmonischen Punktsysteme (Kreis Brocard's), 56. Jahresbericht des Gymnasiums Recklinghausen (1885–86), S. 1–28.
- [3] Bereis, R., Aufbau einer Theorie der ebenen Bewegung mit Verwendung komplexer Zahlen, Öst. Ing.-Arch. 5, 246-266 (1951).
- [4] Bereis, R., Adjungierte Geraden eines Kreiszwillings, El. Math. 18, 87-89 (1963).
- [5] BURMESTER, L., Lehrbuch der Kinematik (Leipzig 1888).
- [6] COXETER, H. S. M., Unvergängliche Geometrie (Birkhäuser, Basel und Stuttgart 1963).
- [7] ENGELBRECHT, E., Planimetrischer Lehrsatz, Arch. Math. Phys. 60, 447-448 (1877).
- [8] FASBENDER, E., Über die gleichseitigen Dreiecke, welche um ein gegebenes Dreieck gelegt werden können, J. reine angew. Math. 30, 230-231 (1846).
- [9] FLADT, K., Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven (Frankfurt a.M. 1962).
- [10] Götz, W., Systematische Ausweitung einer Einbeschreibungsaufgabe, Der Math.-Unterr. 6, H. 1: Vom Problem zum System, 57-66 (1960).
- [11] HARTMANN, Th., Zur Theorie der Momentanbewegung eines ebenen ähnlich veränderlichen Systems, Dissertation Rostock (1912).
- [12] HOFMANN, J. E., Elementare Lösung einer Minimumsaufgabe, Z. math. naturw. Unterr. 60, 22-23 (1929).
- [13] Krause, M., Analysis der ebenen Bewegung (Berlin und Leipzig 1920).

- [14] MEHMKE, R., Über die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene, Z. Math. Phys. 35, 1-24, 65-81 (1890).
- [15] MÜLLER, E., und J. L. KRAMES, Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. 2: Die Zyklographie (Leipzig und Wien 1929).
- [16] MÜLLER, E., und J. L. KRAMES, Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. 2: Konstruktive Behandlung der Regelflächen (Leipzig und Wien 1931).
- [17] MÜLLER, H. R., Kinematik (Berlin 1963 [Sammlung Göschen]).
- [18] MÜLLER, P. H., Adjungierte Sekanten und Tangenten zweier Kreise, El. Math. 18, 11-13 (1963).
- [19] Neuberg, J., Sur les figures semblablement variables, Proc. Lond. math. Soc. 16, 185-188 (1885).
- [20] Schal, H., Von der Bewegungsgeometrie zur konstruktiven Kinematik, Der Math.-Unterr. 10, H. 3: Vom Problem zum System II, 48-72 (1964).
- [21] SIEBER, H., Über Drehungen um 60°, Der Math.-Unterr. 11, H.3: Abbildungsgeometrie, V, 24-38 (1965).
- [22] WUNDERLICH, W., Höhere Radlinien, Öst. Ing.-Arch. 1, 277-296 (1947).
- [23] Zacharias, M., Elementargeometrie und elementare nichteuklidische Geometrie in synthetischer Behandlung, in Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 3, AB 9 (Leipzig 1914–1931), S. 859–1172.
- [24] BERKHAN, G., und W. Fr. MEYER, Neuere Dreiecksgeometrie, in Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 3, AB 10 (Leipzig 1914–1931), S. 1173–1276.
- [25] Schoenflies, A., Kinematik, in Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 4, 1 B I 3 (Leipzig 1901–1908), S. 190–278.
- [26] HOHENBERG, F. und J. TSCHUPIK, Grundzüge der Darstellenden Geometrie, in Grundzüge der Mathematik, Bd. II Kap. 11, S. 454-459 (Göttingen 1960).

## Kleine Mitteilungen

## Einige elementare kombinatorische Identitäten mit alternierenden Summen 1. Einleitung

Im Zentrum unserer Betrachtung steht die Identität

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \binom{n}{\nu} [x + (n-\nu) h]^{m} = \delta_{mn} h^{n} n! \quad [0 \leqslant m \leqslant n; \quad h \in R; \quad x \in R]^{1}), \quad (1)$$

der man ohne weiteres auch die Gestalten

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} (x+kh)^{m} = \delta_{mn} (-1)^{n} h^{n} n! \quad [0 \leqslant m \leqslant n; \ h \in R; \ x \in R], \quad (1')$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} (x-k h)^{m} = \delta_{mn} h^{n} n! \quad [0 \leqslant m \leqslant n; \quad h \in R; \ x \in R]$$
 (1")

geben kann<sup>2</sup>). Im Hinblick auf den bemerkenswerten Spezialfall

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} {n \choose \nu} (n-\nu)^{n} = n! \quad [n \geqslant 0]$$
 (2)

 $<sup>^1</sup>$ ) R bezeichne die Menge der reellen Zahlen und  $\delta_{mn}$  das Kroneckersche Symbol. Für die ganze Betrachtung verabreden wir  $0^0=1$ .

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>) Für Spezialfälle vergleiche zum Beispiel [3], Seite 97, Lemma 2.1; [7], (1) und (2); [8], S. 249, (17); [9], S. 496, zwischen (45) und (46); [10], S. 28, (4.14).