

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 21 (1966)
Heft: 5

Artikel: Ein Beitrag zur Geometrie ähnlich-veränderlicher Felder
Autor: Schaal, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-24653>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.05.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band XXI

Heft 5

Seiten 97–120

10. September 1966

Ein Beitrag zur Geometrie ähnlich-veränderlicher Felder

Herrn Prof. Dr. O. Baier zum 60. Geburtstag gewidmet

1. Ausgehend von den beiden schon bei L. BURMESTER ([5]¹), S. 880) bzw. A. ARTZT ([2], S. 6) vorkommenden elementargeometrischen Aufgaben,

I. das kleinste zu einem Dreieck DEF gleichsinnig ähnliche Dreieck $D_1E_1F_1$ zu bestimmen, das einem Dreieck ABC einbeschrieben ist, und

II. das grösste zu $\triangle DEF$ gleichsinnig ähnliche und $\triangle ABC$ umbeschriebene Dreieck $D_2E_2F_2$ zu ermitteln,

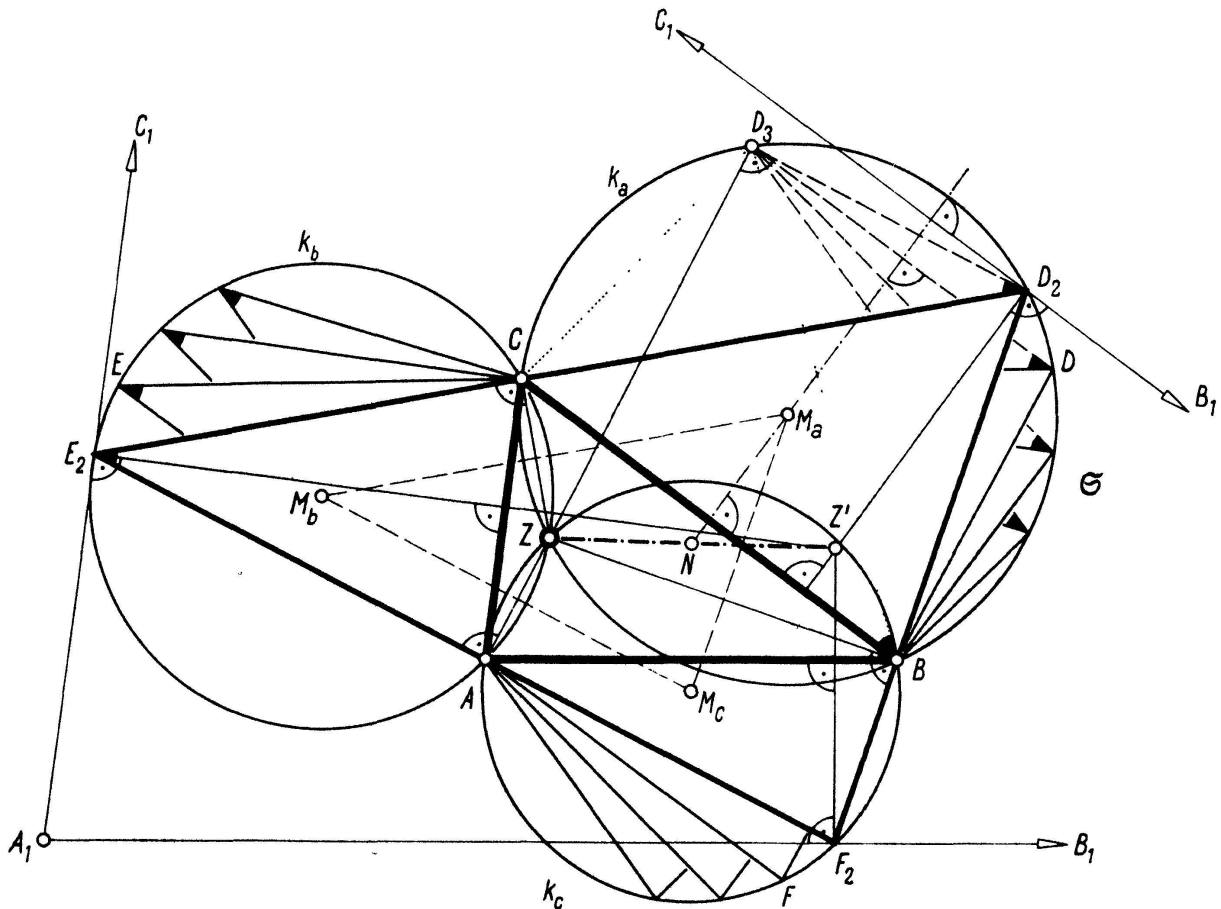
gelangt man im Rahmen der *Geometrie ähnlich-veränderlicher Bewegungen* einerseits rasch zu einigen reizvollen Beziehungen in der Ähnlichkeitsgeometrie des Dreiecks, von denen einige einfache Sonderfälle beispielsweise in den neueren Aufsätzen [10], [21] behandelt wurden; andererseits führt eine naheliegende Verallgemeinerung zu weiteren ähnlich-veränderlichen Bewegungen, die in Beziehung zu den neueren Mitteilungen von P. H. MÜLLER ([18], S. 11–13) und R. BEREIS ([4], S. 87–89) stehen. Bewegungen dieser Art wurden zwar von L. BURMESTER, M. KRAUSE und dessen Schülern TH. HARTMANN und H. ALT in [5], [13], [11] bzw. [1] eingehend untersucht, doch sind die folgenden weitergehenden Ergebnisse dort nicht enthalten.

2. Ein Dreieck XYZ heisst einem Dreieck UVW *einbeschrieben*, und das Dreieck UVW heisst dem Dreieck XYZ *umbeschrieben*, wenn die Punkte X, Y, Z in dieser Reihenfolge mit den Geraden VW, WU bzw. UV inzidieren; es wird dabei nicht verlangt, dass Dreieck XYZ im Innern von Dreieck UVW liegt.

Zur Lösung von II betrachten wir Dreieck ABC als fest und Dreieck DEF als ähnlichveränderlich und dem Dreieck ABC umbeschrieben (Fig. 1). Durchläuft Dreieck DEF diese einparametrische Schar \mathfrak{S} ähnlicher Dreiecke, so wandern die Punkte D, E, F jeweils auf festen Kreisen k_a, k_b, k_c über den Sehnen BC, CA, AB . Diese Kreise schneiden einander in einem Punkt Z (vgl. [19]), und daher haben zum Beispiel die Winkel AEZ und AFZ konstante Grösse. Dies bedeutet, dass das Teildreieck ZEF und mit ihm das Gesamtdreieck DEF einer *kontinuierlichen Folge von Drehstreckungen um das feste Zentrum Z* unterliegt. Jeder von Z verschiedene Punkt, der

¹) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 108.

mit dem Dreieck DEF im Sinne der Ähnlichkeitsgruppe fest verknüpft ist, beschreibt dabei als Bahnkurve einen *Kreis durch Z* . Es liegt daher jene *spezielle kreislinige Bewegung* des durch das Dreieck DEF bestimmten ähnlich-veränderlichen Systems



Figur 1

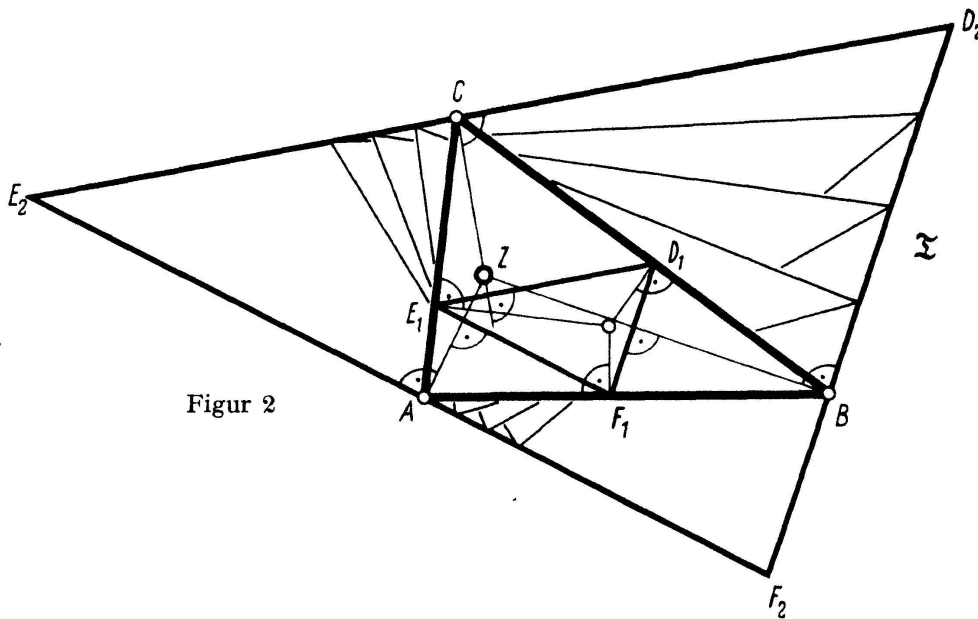
gegen das feste System des Dreiecks ABC vor, die L. BURMESTER in [5], S. 874–884 behandelte. Jede Gerade des bewegten Systems durchläuft dabei ein Bündel des festen Systems.

Da es eine *singuläre Systemlage* gibt, für welche das Dreieck DEF auf das Zentrum Z zusammenschrumpft, ist die Frage nach der kleinsten Systemlage nicht sinnvoll. Dagegen gibt es in der Schar \mathfrak{S} ein nicht ausgeartetes größtes Dreieck $D_2E_2F_2$, welches dadurch ausgezeichnet ist, dass jede der Strecken ZD , ZE , ZF ein Maximum annimmt und daher Durchmesser von k_a , k_b bzw. k_c ist²⁾. Das gesuchte Maximaldreieck $D_2E_2F_2$ wird somit von den Gegenpunkten von Z bezüglich k_a , k_b , k_c gebildet, und seine Seiten stehen in A , B bzw. C auf den Zentralen ZA , ZB , ZC senkrecht (vgl. [2], S. 6), oder mit anderen Worten: *Die auf den Seiten des Maximaldreiecks $D_2E_2F_2$ in A , B und C errichteten Lote schneiden sich in einem Punkt.* Umgekehrt folgt aus der Eindeutigkeit des gemeinsamen Schnittpunktes Z der Kreise k_a , k_b , k_c : *Schneiden sich die auf den Seiten eines dem Dreieck ABC umbeschriebenen Dreiecks DEF in A , B und C errichteten Lote in einem Punkt, so ist $\triangle DEF$ das größte aus jener Schar von Dreiecken, die zu $\triangle DEF$ ähnlich und $\triangle ABC$ umbeschrieben sind.*

²⁾ Für den Sonderfall eines gleichseitigen Dreiecks DEF wurde die Aufgabe II von E. FASBENDER ([8], S. 230–231) durch Rechnung gelöst.

Die Mitten M_a, M_b, M_c der Kreise k_a, k_b, k_c gehen durch zentrische Streckung ($Z; 2:1$) in die Punkte D_2, E_2, F_2 über, und dabei werden die Mittellote von $\triangle ABC$ in die Lote von D_2, E_2, F_2 auf BC, CA bzw. AB abgebildet. Daraus ergibt sich: *Die von den Ecken des Maximaldreiecks $D_2E_2F_2$ auf BC, CA bzw. AB gefälltten Lote schneiden sich in einem Punkt Z' . Der Umkreismittelpunkt N von $\triangle ABC$ ist die Mitte der Strecke ZZ' .*

3. Die Lösung von I kann man auf die Lösung von II zurückführen. Um dies auch in den Bezeichnungen deutlich zu machen, suchen wir – zunächst abweichend von I – das kleinste zu $\triangle ABC$ gleichsinnig ähnliche und $\triangle D_2E_2F_2$ einbeschriebene Dreieck. Dazu bilden wir jedes Dreieck aus \mathfrak{S} auf das Maximaldreieck $D_2E_2F_2$ ähnlich ab und nehmen dabei jeweils das Dreieck ABC mit. So entsteht eine einparametrische Schar \mathfrak{T} von Dreiecken³⁾, die zu $\triangle ABC$ gleichsinnig ähnlich und $\triangle D_2E_2F_2$ einbeschrieben sind (Fig. 2). Unter diesen ist $\triangle ABC$ selbst das kleinste, da alle übrigen aus diesem durch ähnliche Vergrößerung hervorgingen. Dies bedeutet: *Ist $\triangle D_2E_2F_2$ das grösste zu $\triangle DEF$ gleichsinnig ähnliche und $\triangle ABC$ umbeschriebene Dreieck, so ist $\triangle ABC$ das kleinste zu $\triangle ABC$ gleichsinnig ähnliche und $\triangle D_2E_2F_2$ einbeschriebene Dreieck.*



Figur 2

Zur Konstruktion des in I gesuchten Minimaldreiecks $D_1E_1F_1$ kann man demnach zuerst analog zu 2 das grösste zu $\triangle ABC$ gleichsinnig ähnliche und $\triangle DEF$ umbeschriebene Dreieck bestimmen und dieses zusammen mit $\triangle DEF$ in den gewünschten Maßstab übertragen. Dann geht $\triangle DEF$ in das gesuchte Minimaldreieck $D_1E_1F_1$ über.

Dem Übergang von der Schar \mathfrak{S} zur Schar \mathfrak{T} entspricht vom kinematischen Standpunkt aus der *Übergang von einer (kontinuierlichen) Bewegung zu ihrer Umkehrbewegung* (vgl. z. B. [20]), wobei zur stetigen Lagenänderung im Falle starrer Systeme jetzt noch eine stetige Maßstabsänderung der bewegten Figur hinzukommt. Da das Drehstreckungszentrum Z im vorliegenden Fall in beiden Systemen fest ist, gehen auch die Dreiecke der Schar \mathfrak{T} durch eine kontinuierliche Folge von Drehstreckungen um Z auseinander hervor, wobei die Punkte A, B, C die Geraden E_2F_2, F_2D_2, D_2E_2

³⁾ Diese Schar \mathfrak{T} erhielt W. Götz ([10], S. 65, Fig. 8) auf anderem Wege.

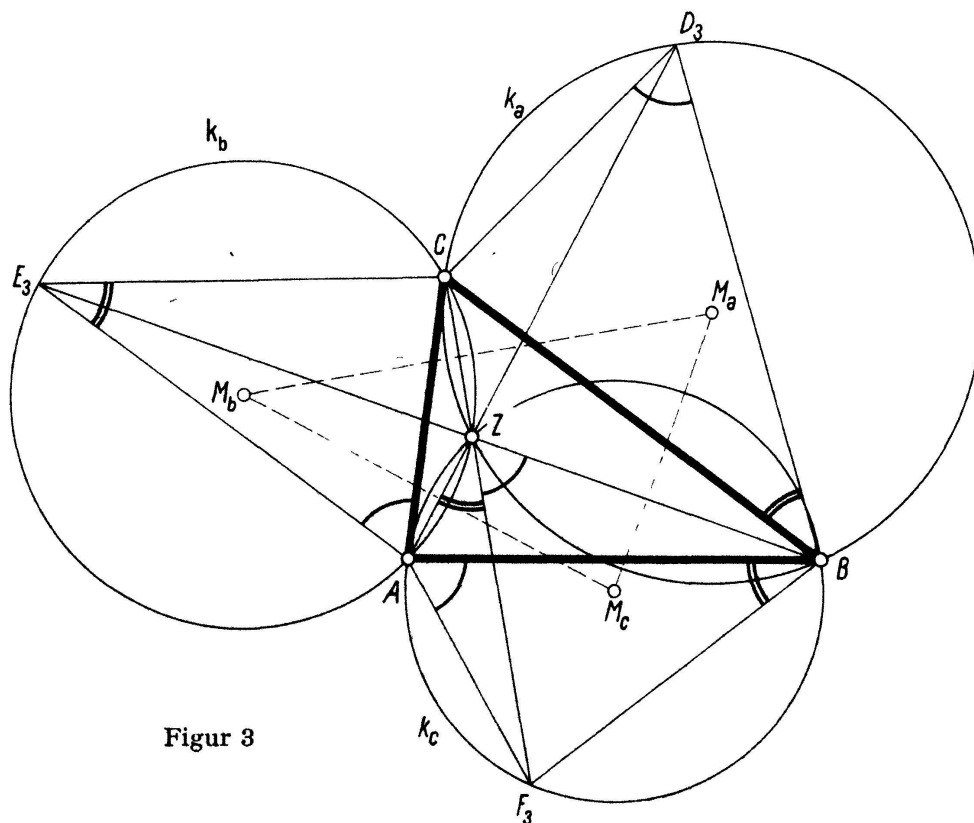
durchlaufen. Ebenso läuft jeder von Z verschiedene Punkt P des durch ABC bestimmten ähnlich-veränderlichen Systems auf einer *Geraden*, welche in der betrachteten Minimallage zu ZP senkrecht steht. Der singulären Systemlage aus \mathfrak{S} entspricht in \mathfrak{Z} jene, in welcher A , B und C und damit jeder von Z verschiedene Systempunkt jeweils in den Fernpunkt seiner Bahngeraden gerückt ist.

Die durch \mathfrak{Z} bestimmte ähnlich-veränderliche Bewegung wurde von L. BURMESTER ([5], S. 875–884) als «*geradlinige Bewegung*» bezeichnet und besitzt ebenso wie \mathfrak{S} eine Reihe bemerkenswerter Eigenschaften, von denen einige, die vielleicht nicht allgemein bekannt sind (vgl. [5], [25]), in 4 und 5 auf kurzem Wege hergeleitet werden.

4. Die Parallele zu EF durch D bildet mit DE (und mit DF) einen Winkel fester Grösse und gleitet daher vermöge \mathfrak{S} durch einen festen Punkt D_3 des Kreises k_a (Fig. 1). In der Lage $EF \parallel BC$ ist $DD_3 \parallel BC$; die Dreiecke DCB und DEF sind dann gleichsinnig ähnlich. Da $\triangle DCB$ und $\triangle D_3BC$ symmetrisch sind in bezug auf das Mittellot der Seite BC , erhält man D_3 , indem man an die Seite BC des gegebenen Dreiecks ABC das zu $\triangle DEF$ ungleichsinnig ähnliche Dreieck D_3BC ansetzt.

Insbesondere geht die durch D_2 gezogene Parallele zu E_2F_2 durch den Punkt D_3 , und da k_a der Thaleskreis über der Strecke ZD_2 ist, folgt weiter, dass AZ durch D_3 geht. Die in II gesuchte Lage von E_2F_2 ergibt sich daher besonders einfach (ohne Zeichnen von k_a und k_b) als Lot zu AD_3 in A ; die übrigen Seiten von $\triangle D_2E_2F_2$ ergeben sich aus der Ähnlichkeit von $\triangle D_2E_2F_2$ und $\triangle DEF$.

Setzt man auch den Seiten CA und AB die zu $\triangle DEF$ ungleichsinnig ähnlichen Dreiecke AE_3C und ABF_3 auf (Fig. 3), so kann man unmittelbar den folgenden Satz aus der Theorie der «*Aufsatzdreiecke*» (vgl. [24], S. 1216 f.) ablesen, den der Student E. ENGELBRECHT in [7], S. 447–448 hergeleitet hat: *Setzt man den Seiten eines Dreiecks ABC drei unter sich gleichsinnig ähnliche Dreiecke D_3CB , ACE_3 und AF_3B auf, so*



Figur 3

schneiden sich die drei Geraden AD_3 , BE_3 und CF_3 in einem Punkt Z unter den in diesen Aufsatzdreiecken vorkommenden Winkeln, und die Umkreise der drei Aufsatzdreiecke schneiden einander ebenfalls in diesem Punkt Z .

Ebenso leicht entnimmt man Figur 1 folgende weitere Eigenschaften dieser in [24], S. 1218, nach E. TORRICELLI⁴⁾ benannten Figur 3: *Das von den Umkreismitten M_a , M_b , M_c gebildete Dreieck ist ungleichsinnig ähnlich zu den Aufsatzdreiecken, und die Verbindungsstrecken AD_3 , BE_3 , CF_3 verhalten sich umgekehrt proportional wie die Seiten eines der Aufsatzdreiecke.* Die letzte Behauptung folgt aus der Tatsache, dass die Strecke AD_3 gleich der von D_2 (Fig. 1) auf die Seite E_2F_2 gefällten Höhe des zu den Aufsatzdreiecken ungleichsinnig ähnlichen Maximaldreiecks $D_2E_2F_2$ ist und Analoges von BE_3 und CF_3 gilt⁵⁾.

Im Sonderfall regulärer Aufsatzdreiecke folgt hieraus die bekannte Gleichheit der Diagonalenstrecken AD_3 , BE_3 , CF_3 . Ihr Schnittpunkt Z ist in diesem Fall nach E. TORRICELLI benannt, oder auch nach P. DE FERMAT (vgl. [6], S. 38f., [24], S. 1218 und 1219), weil Z für spitzwinklige Grunddreiecke ABC die (eindeutige) Lösung des von P. DE FERMAT gestellten Problems ist, jenen Punkt P zu finden, für den die Abstandssumme $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ ein Minimum annimmt. Einen eleganten Beweis hierfür hat auch J. E. HOFMANN ([12], S. 22–23) mitgeteilt.

Drei weitere Sonderfälle ergeben sich aus der Annahme, dass $\triangle DEF$ gleichsinnig ähnlich zu $\triangle ABC$, zu $\triangle BCA$ oder zu $\triangle CAB$ ist. Die Aufsatzdreiecke sind dann jeweils ungleichsinnig ähnlich zum Grunddreieck ABC , und die drei Permutationen der Anordnung der Torricelli-Figur führen dann zum Höhenschnittpunkt bzw. zu den beiden Brocardschen Punkten des $\triangle ABC$ als Lagen von Z . Diese drei Sonderfälle gehen nach ([24], S. 1227) auf CRELLE zurück (vgl. auch L. BURMESTER [5], S. 881 und 882, J. NEUBERG [19]).

5. Durch Iteration der in 4, Absatz 2, angegebenen Konstruktion des Dreiecks $D_2E_2F_2$ kann das grösste jetzt diesem umschriebene und zu $\triangle ABC$ gleichsinnig ähnliche Dreieck $A_1B_1C_1$ bestimmt werden (Fig. 1), das man aber noch einfacher auf folgende Weise findet: Die Parallelen zu BC , CA und AB durch D_2 , E_2 bzw. F_2 bilden ein zu $\triangle ABC$ zentrisch ähnliches und $\triangle D_2E_2F_2$ umschriebenes Dreieck, dessen Seiten in D_2 , E_2 , F_2 Lote mit dem gemeinsamen Schnittpunkt Z' besitzen, und daher ist dieses zu $\triangle ABC$ zentrisch ähnliche Dreieck $A_1B_1C_1$ das grösste zu $\triangle ABC$ ähnliche und $\triangle D_2E_2F_2$ umschriebene.

Überträgt man dieses Resultat auf die in I und II genannten Dreiecke, so ergibt sich zusammen mit den Eigenschaften aus 3, der folgende bemerkenswerte Zusammenhang zwischen den Aufgaben I und II:

Das grösste zu $\triangle DEF$ gleichsinnig ähnliche und $\triangle ABC$ umschriebene $\triangle D_2E_2F_2$ ist zum kleinsten zu $\triangle DEF$ gleichsinnig ähnlichen und $\triangle ABC$ einbeschriebenen Dreieck $D_1E_1F_1$ zentrisch ähnlich (Fig. 2).

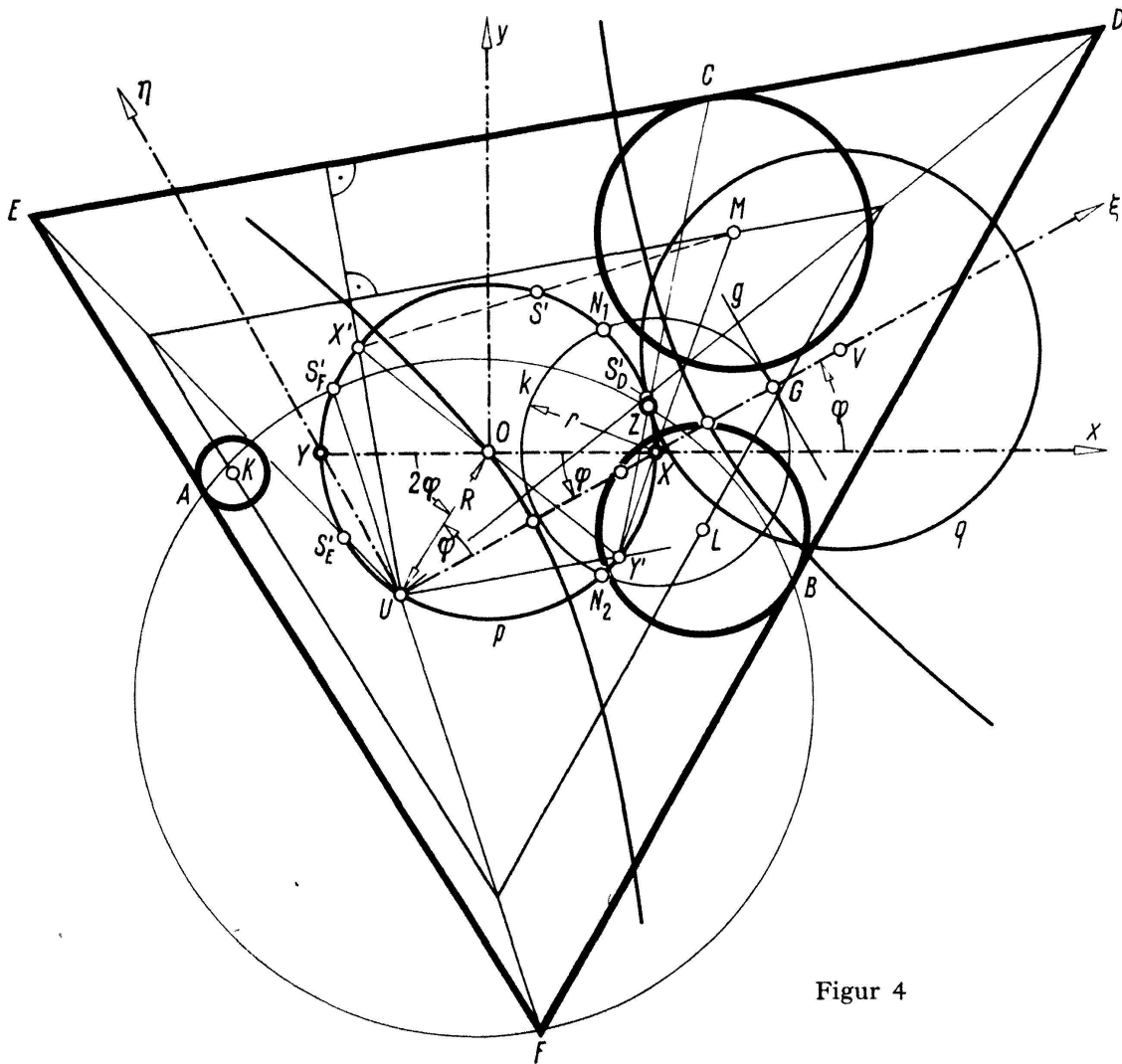
6. Die Umbeschreibungsaufgabe II führt zu einer naheliegenden Verallgemeinerung, indem man die Ecken des festen Dreiecks ABC durch Kreise um K , L , M ersetzt (Fig. 4). Um Eindeutigkeit der Umbeschreibung zu erzielen, seien die Seiten des

⁴⁾ E. TORRICELLI hat allerdings nur den Sonderfall regulärer Aufsatzdreiecke untersucht; diesen Spezialfall behandelte auch E. FASBENDER durch Rechnung ([8], S. 231).

⁵⁾ E. ENGELBRECHT benützte zum Nachweis eine planimetrische Rechnung, [7], vgl. auch [26].

Dreiecks DEF (unabhängig von dessen Umlaufsinn) als *Speere* und die Kreise als *Zykel*⁶⁾ orientiert. Das Speerdreieck DEF heisse den Zykeln um K, L, M *umbeschrieben*, wenn die auf EF, FD, DE liegenden Speere in dieser Reihenfolge *Tangentenspeere* der Zykel um K, L bzw. M sind; diese Umbeschreibung bleibt erhalten, wenn man die Orientierungen eines Zykels und seines Tangentenspeeres gleichzeitig umkehrt.

Dreht man die drei Speere um die Mitten ihrer Berührzykel durch denselben orientierten Winkel φ , der das Intervall $\langle 0, 2\pi \rangle$ durchläuft, so bestimmt ihr Schnittdreieck DEF eine *ähnlich-veränderliche Bewegung* \mathfrak{S} , die im Sonderfall dreier Nullzykel in die in **2** betrachtete spezielle kreislinige Bewegung übergeht. Jeder der



Figur 4

Punkte D, E, F beschreibt im allgemeinen Fall eine *Pascal-Schnecke* als isoptische Kurve eines Kreispaares, (vgl. z. B. [20], S. 62). Nach R. BEREIS [4] können die Schenkel eines auf einem Kreispaar reitenden Winkels fester Grösse als ein Paar der von P. H. MÜLLER [18] eingeführten *adjungierten Geraden eines Kreiszwillinges* aufgefasst werden; sie gehen nach [4] samt den von ihnen umhüllten Kreisen durch eine Drehstreckung um den singulären Punkt der vom Winkelscheitel durchlaufenen Pascal-Schnecke ineinander über. Danach findet man beispielsweise den *singulären*

⁶⁾ Die im folgenden verwendeten Begriffe der Zykelgeometrie sind in [15] erklärt, vergl. auch [26].

Punkt S'_F der von F beschriebenen Pascal-Schnecke als (stets reellen) Schnitt des Kreises durch A, B, F mit jener Geraden, die F mit dem Schnittpunkt der Parallelen zu FA durch K und zu FB durch L verbindet (Fig. 4). In analoger Weise erhält man die singulären Punkte S'_D und S'_E der von D und E durchlaufenen Pascal-Schnecken.

Die drei Geraden DS'_D, ES'_E, FS'_F schneiden einander in jenem Punkt U des bewegten Systems, dessen Abstände von den Speeren des Dreiecks DEF sich wie die Radien der zugehörigen Hüllzykel um K, L, M verhalten, und sie gleiten im Verlauf von \mathfrak{S} durch die festen, als Nullzykel aufgefassten Punkte S'_D, S'_E bzw. S'_F , falls diese verschieden sind. Der ausgezeichnete Punkt U , der nur im Sonderfall der in **2** behandelten speziellen kreislinigen Bewegung unbestimmt ist, durchläuft dann den durch S'_D, S'_E und S'_F bestimmten Kreis p und soll der «Ursprung» des bewegten Systems heißen. Nennt man Geraden, die Nullzykel einhüllen, «Nullgeraden», so gilt: Die durch U gehenden Geraden des bewegten Systems sind Nullgeraden, und umgekehrt geht jede Nullgerade durch den Ursprung U ; die von den Nullgeraden umhüllten Nullzykel liegen auf p .

Sind nicht alle drei singulären Punkte S'_D, S'_E, S'_F verschieden, so fallen sie alle mit dem Ursprung U zusammen, der als festbleibender Punkt den Momentanpol⁷⁾ Z von \mathfrak{S} darstellt. Solche ähnlich-veränderliche Bewegungen mit festem Momentanpol Z heißen nach [5], S. 867, «einförmig». Für diese fallen die Nullzykel mit Z zusammen, und die Nullgeraden inzidieren mit Z .

Extreme Systemlagen stellen sich genau dann ein, wenn der Abstand des Ursprungs U von einer nicht durch ihn gehenden Dreiecksseite, z.B. von DE , ein relatives Maximum oder Minimum annimmt. Ist Y' der Nullzykel der zu DE parallelen Nullgeraden, so muss DE also für $M \neq Y'$ eine zu $Y'M$ normale Lage einnehmen, was auf zweifache Weise möglich ist⁸⁾. Damit gilt zusammenfassend für nicht kreislinige und nicht starre Bewegungen \mathfrak{S} :

Bei einer ähnlich-veränderlichen Bewegung \mathfrak{S} eines drei Zykeln umschriebenen Speerdreiecks gibt es durch jede Ecke des Dreiecks genau eine Nullgerade; der von ihr umhüllte Nullzykel liegt im singulären Punkt der von der zugehörigen Ecke durchlaufenen Pascal-Schnecke. Diese drei Nullgeraden schneiden einander im Ursprung U des bewegten Systems, der im allgemeinen Fall auf dem Kreis p durch die singulären Punkte der Pascal-Schnecken läuft, im Sonderfall einer einförmigen Bewegung in den festen Momentanpol Z fällt. \mathfrak{S} besitzt zwei extreme Systemlagen, die dadurch festliegen, dass einer (und damit jeder) der bewegten Speere senkrecht auf der Verbindungsgeraden der Mitte seines Hüllzykels mit dem Nullzykel der zu ihm parallelen Nullgeraden steht.

7. Zur weiteren Untersuchung der nicht einförmigen Bewegung \mathfrak{S} wollen wir die Angabe der sie bestimmenden Zykel und Speere normieren. Zunächst können anstelle der Speere EF und FD und ihrer Hüllzykel um K bzw. L auch die zu DE normalen und parallelen Nullgeraden mit ihren Nullzykeln X' bzw. Y' vorgegeben sein (Fig. 4). Der Momentanpol von \mathfrak{S} ist jener eindeutig bestimmte Punkt Z , dessen Verbindungsstrahlen zu den Bahn- und Hüllbahnpunkten mit deren Bahn- bzw. Hüllbahntangenten gleiche Winkel bilden und liegt daher in dem von S'_F im allgemeinen verschiedenen Schnittpunkt des Kreises p mit dem Kreis durch A, B, F . Im Verlauf von \mathfrak{S} ändert Z

⁷⁾ Die Grundbegriffe der Kinematik ähnlich-veränderlicher Felder sind z. B. in [13], S. 132 ff. enthalten.

⁸⁾ Für $M = Y'$ liegt der im weiteren ausgeschlossene Sonderfall einer (starrten) Konchoidenbewegung vor, deren Eigenschaften z. B. in [20] hergeleitet wurden.

seine Lage auf dem festen Kreis p , und da p die zu Nullzykeln ausgearteten Geradenhüllkurven trägt, und da deren Tangentenspeere durch den Ursprung U weisen, gilt:

Bei der ähnlich-veränderlichen Bewegung \mathfrak{S} fungiert der Kreis p als Rastpolkurve und ist zugleich der Rückkehrkreis mit dem Ursprung U als Rückkehrpol.

Da auch die Gerade $Y'C$ durch den Momentanpol gehen muss, fällt Z für die beiden extremen Systemlagen in den von Y' im allgemeinen verschiedenen Schnittpunkt X von $Y'M$ mit p . Diesen ausgezeichneten Punkt X und seinen bezüglich p diametralen Punkt Y verwenden wir künftig zur normierten Angabe von \mathfrak{S} , wobei UX und UY als zugehörige Nullgeraden mit gegeben seien (Fig. 4).

Ist S' der zweite Schnittpunkt von $X'M$ mit p (Fig. 4), so führt nach dem Peripheriewinkelsatz am Kreis p jene Bereissche Drehstreckung um S' , die den Nullzykel Y' in den Nullzykel Y bringt, die Geraden $S'X'$ und XY' in die Geraden $S'X$ und XY und daher den Punkt M in den ausgezeichneten Punkt X über. Der Speer auf DE geht dabei in einen zu UY parallelen Speer g , der Hüllzykel um M in die Hüllkurve von g , also einen Zykel k mit der Mitte X und einem gewissen von Null verschiedenen Radius r über. Da man die Orientierung eines Zyklus und seiner Tangentenspeere gleichzeitig umkehren darf, gilt:

Die ähnlich-veränderliche Bewegung \mathfrak{S} lässt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit in eindeutig normierter Weise dadurch vorgeben, dass die Schenkel eines rechten Winkels mit Scheitel U durch zwei feste Nullzykel X, Y gleiten und ein zum Schenkel UY paralleler Speer g einen positiv orientierten Zykel k um X mit Radius $r > 0$ ständig berührt (Fig. 4). Der Scheitel U ist dann der Ursprung des bewegten Systems, der Punkt X der Momentanpol für die beiden extremen Systemlagen und der Thaleskreis p über XY die Rastpolkurve.

Im Sonderfall einer einförmigen Bewegung \mathfrak{S} fallen X und Y in den festen Momentanpol Z , und als normierte Angabe von \mathfrak{S} kann Z und der Hüllzykel eines beliebigen Speeres dienen.

8. Der Berührungspunkt G von g und k (Fig. 4) ist als Schnitt der beiden Systemgeraden UX und g ein Punkt des bewegten Systems; seine Bahnkurve ist der Kreis k . Auch der Ursprung U durchläuft einen Kreis als Bahn, nämlich p . Man kann zeigen, dass G und U die einzigen Punkte mit Bahnkreisen sind und alle anderen Punkte PASCALSche Schnecken oder Kardioden durchlaufen⁹⁾: Zuerst folgt mittels der Drehstreckung von BEREIS, dass jede nicht durch U gehende Gerade einen Kreis umhüllt (vgl. auch [11], S. 126); jeder Punkt kann als Schnittpunkt von zwei solchen Geraden aufgefasst werden und beschreibt daher wie D, E, F im allgemeinen eine Kurve der genannten Art, deren singulärer Punkt auf p liegt. Der Punkt G ist dadurch ausgezeichnet, dass die durch ihn gehenden Geraden speziell konzentrische Hüllkreise um X besitzen, so dass seine Bahnkurve in den Kreis k und dessen (isotrope) Asymptoten zerfällt, während der Ursprung U dadurch charakterisiert ist, dass die durch ihn gehenden Geraden Nullzykel umhüllen, die auf seinem doppelt zu zählenden Bahnkreis p liegen.

In den beiden extremen Systemlagen fällt der Ursprung U nach Y und hat vom Speer g den orientierten Abstand $r \pm 2R$, wenn $R > 0$ der Radius von p ist. Wählt man

⁹⁾ Vgl. [11], S. 125; TH. HARTMANN hat in dieser Dissertation die Existenz von zwei solchen Punkten U, G durch aufwendige Rechnung ohne nähere Angaben über sie nachgewiesen. Dass unter den Bahnkurven speziell auch Kardioden auftreten (siehe Abschnitt 10), wurde dort nicht erwähnt.

die zum oberen Zeichen gehörige Extremlage als Ausgangslage für die Zählung des Drehwinkels φ , so legt $\varphi = \pi$ die andere Extremlage fest, und für beliebige Systemlagen hat U von g den orientierten Abstand (Fig. 4)

$$\overline{Ug} = r + 2R \cos \varphi, \quad (1)$$

dessen Verschwinden die Nullagen von \mathfrak{S} kennzeichnet. Es gibt daher in algebraischer Zählung genau zwei Nullagen, die getrennt reell, zusammenfallend oder konjugiert komplex sind, je nachdem $r < 2R$, $r = 2R$ oder $r > 2R$ ist; dieselben Realitätsverhältnisse zeigen die Schnittpunkte N_1 und N_2 von k und p , in denen sich mit \overline{U} und G alle Punkte des bewegten Systems in den Nullagen vereinen. Wegen $\overline{Yg} = \overline{Ug}$ weist die Grenzlage des Tangentenspeeres g von k in N_1 bzw. N_2 durch Y .

Sämtliche Bahnkurven von \mathfrak{S} müssen durch N_1 und N_2 hindurchgehen; da sie *bizirkuläre Quartiken* sind (vgl. [9], S. 284), haben sie mit dem Kreis p acht Schnittpunkte gemeinsam, von denen vier in die absoluten Kreispunkte fallen. Weiters liegt der doppelt zu zählende singuläre Punkt der Bahnkurven auf p , so dass mit N_1 und N_2 die restlichen beiden Schnittpunkte bestimmt sind.

9. Zur analytischen Behandlung von \mathfrak{S} führt die nach 7 normierte Vorgabe zu einer besonders einfachen Bauart der Bewegungsgleichungen, die man als ihre *Normalform* anzusprechen hat. Die feste Ebene sei auf das kartesische Koordinatensystem (x, y) bezogen, dessen Ursprung in der Mitte O des Rastpolkreises p liegt und dessen x -Achse durch den Punkt $X(R, 0)$ weist (Fig. 4). Das bewegte System sei durch das kartesische Koordinatensystem (ξ, η) festgelegt, dessen Anfangspunkt im Ursprung U liegt und dessen ξ - bzw. η -Achse in den Nullstrahl UX bzw. UY fällt. Die Einheitsstrecke des (ξ, η) -Systems sei so gewählt, dass g die Gleichung

$$\xi = 1 \quad (2)$$

besitzt, so dass der vom Drehwinkel φ abhängige Ähnlichkeitsfaktor λ nach (1) den Wert

$$\lambda = r + 2R \cos \varphi \quad (3)$$

annimmt. Fasst man die Koordinaten (x, y) und (ξ, η) zu komplexen Zahlen $z = x + iy$ bzw. $\zeta = \xi + i\eta$ zusammen, wie es in der gewöhnlichen Kinematik R. MEHMKE [14] und in neuerer Zeit W. WUNDERLICH [22], R. BEREIS [3] und H. R. MÜLLER [17] vorgeführt haben, so lautet die Normalform¹⁰⁾ von \mathfrak{S} :

$$z = -R e^{2i\varphi} + (r + 2R \cos \varphi) \zeta e^{i\varphi}; \quad (4)$$

die feste und die ähnlich-veränderliche Ebene können dabei jeweils als Gaußsche Zahlenebenen aufgefasst werden.

Die Bewegungsgleichung (4) geht für $c = R$ aus der nicht bis zur Normalform spezialisierten Gleichung

$$z = -R e^{2i\varphi} + [r + (R + c) \cos \varphi] \zeta e^{i\varphi}, \quad c \text{ reell} \quad (5)$$

¹⁰⁾ Bei den in [11] und [1] durchgeführten Koordinatenrechnungen gehen 6 bzw. 5 willkürliche Konstanten ein; in (4) könnte man durch geeignete Wahl der Einheitsstrecke des festen Systems $R = 1$ setzen, so dass nur noch eine willkürliche Konstante auftritt.

hervor, in welcher statt X der Punkt $(c, 0)$ als Mitte des gegebenen Hüllzykels gewählt ist. Durch (5) werden alle möglichen *Sonderfälle* erfasst:

- a) $R = 0, r^2 + c^2 \neq 0$: *Einförmige Bewegung mit festem Momentanpol $Z = O = U$,*
- b) $R + c \neq 0, r = 0$: *Spezielle kreislinige Bewegung (vgl. 2) mit $Z(R, 0)$,*
- c) $R + c = 0, r \neq 0$: *(Starre) Konchoidenbewegung mit Momentanpol $z = R e^{2i\varphi}$,*
- d) $R = c = 0, r \neq 0$: *Reine Drehung um O (Sonderfall von a und c).*

Als *Beispiel* zur analytischen Behandlungsweise diskutieren wir im allgemeinen Fall $R = c \neq 0, r \neq 0$ die *Abbildung der Speere der ξ, η -Ebene auf ihre Hüllzykel in der x, y -Ebene*. Unter Verwendung orientierter Speerkoordinaten (α, ρ) besitzt ein Speer des Systems (ξ, η) die Gleichung

$$\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha = \rho, \quad (6)$$

die durch die zu (4) inverse Transformation

$$\zeta = (r + 2 R \cos \varphi)^{-1} (z + R e^{2i\varphi}) e^{-i\varphi} \quad (7)$$

übergeht in

$$x \cos(\varphi + \alpha) + y \sin(\varphi + \alpha) = \rho r + 2 \rho R \cos \varphi - R \cos(\varphi - \alpha). \quad (8)$$

Die Ableitung nach dem Scharparameter φ bringt

$$-x \sin(\varphi + \alpha) + y \cos(\varphi + \alpha) = -2 \rho R \sin \varphi + R \sin(\varphi - \alpha). \quad (9)$$

Der Hüllzykel des Speeres (α, ρ) folgt aus (8) und (9) zu

$$z = \rho r e^{i(\varphi + \alpha)} + 2 \rho R e^{i\alpha} - R e^{2i\alpha}, \quad (10)$$

wobei die Mitte z_h und der Radius r_h des Zyklus durch

$$z_h = 2 \rho R e^{i\alpha} - R e^{2i\alpha}, \quad r_h = \rho r \quad (11)$$

festliegen.

Da r_h nur von ρ abhängt, besitzen die Hüllzykel jener Speere, die im System (ξ, η) den Zykel um U mit Radius ρ berühren, im System (x, y) alle *denselben Radius ρr* , und ihre *Mitten z_h* liegen nach (11) auf jener Pascal-Schnecke oder Kardioide, die durch *konchoidale Erzeugung mittels des Rastpolkreises und einer durch den festen Punkt X gleitenden Strecke der Länge $2 \rho R$* entsteht.

Das zyklographische Bild (vgl. [15], S.9) der zweiparametrischen Schar der Hüllzykel ist eine zur x, y -Ebene symmetrische *Strahlfläche Φ* mit der Parameterdarstellung (11), in der z_h *den Grundriss* und r_h *die Koten* der Flächenpunkte festlegen und α, ρ die Parameter sind. Die Erzeugenden $\alpha = \text{konst.}$ haben konstante Böschung $r : 2 R$ und treffen die vertikale Leitgerade $x = R, y = 0$, die mithin die *Striktionslinie* von Φ ist. Da der Rastpolkreis und der Fernkreis des Richtdrehkegels als zwei weitere Leitkurven fungieren, ist Φ nach [16], S. 36, 33 *algebraisch vom 4. Grad*, und da die Doppelkurve von Φ in den Rastpolkreis und die ihn schneidende Leitgerade zerfällt, *von V. Art* nach der Sturmschen Einteilung (vgl. [16], S. 260). *Striktion und konische Krümmung von Φ sind konstant* und ergeben sich unmittelbar aus der Böschung der Erzeugenden.

Den Parallelspeerbüscheln $\alpha = \text{konst.}$ der ξ, η -Ebene entsprechen die Erzeugenden von Φ und daher in der x, y -Ebene *lineare Zykelreihen mit gemeinsamem Modul $2 R : r$*

(vgl. [15], S. 31), der gleich dem Kehrwert der konischen Krümmung von Φ ist. Diese Zykelreihen sind also hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch, je nachdem $r < 2R$, $= 2R$ oder $> 2R$ ist, also je nachdem die Schnittpunkte N_1, N_2 der Kreise p und k reell getrennt, zusammenfallend oder konjugiert komplex sind, und die Nullzykel der Reihen liegen nach (11) auf dem Kreis p in Übereinstimmung mit 6.

10. Die kinematische Umkehrung der ähnlich-veränderlichen Bewegung \mathfrak{S} mit dem Drehwinkel φ und dem Modul $\lambda = \lambda(\varphi)$ ist eine ähnlich-veränderliche Bewegung $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}^{-1}$ mit dem Drehwinkel $-\varphi$, dem Modul λ^{-1} und der Bewegungsgleichung (7), die aus der zu (5) inversen Gleichung

$$\zeta = [r + (R + c) \cos \varphi]^{-1} (z + R e^{2i\varphi}) e^{-i\varphi} \quad (12)$$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit für $c = R$ hervorgeht. Es können die folgenden Sonderfälle auftreten, die jeweils die Umkehrbewegungen der in 9 aufgetretenen Sonderfälle von \mathfrak{S} sind:

- a) $R = 0, r^2 + c^2 \neq 0$: Einförmige Bewegung mit festem Momentanpol $Z = U = O$,
- b) $R + c \neq 0, r = 0$: Geradlinige Bewegung (vgl. 3) mit $Z[R/(R + c), 0]$,
- c) $R + c = 0, r \neq 0$: (Starre) Kardanbewegung (Ellipsenbewegung) mit dem Momentanpol $\zeta = 2Rr^{-1} e^{i\varphi}$,
- d) $R = c = 0, r \neq 0$: Reine Drehung um U .

Im allgemeinen Fall $R = c \neq 0$ sind ζ und das Konjugium $\bar{\zeta}$ linear gebrochene Funktionen von $e^{i\varphi}$ und $e^{-i\varphi}$, so dass die Bahnkurven der Punkte z Kegelschnitte sind. Die Punkte des Kreises p , der nun die Rolle der Gangpolkurve übernimmt, laufen speziell auf den in 6 hergeleiteten Nullgeraden durch U .

Die Bahnkurve des Anfangspunktes $z = 0$ lässt sich besonders einfach beschreiben, wenn man im System (ξ, η) in üblicher Weise Polarkoordinaten ϱ, φ einführt, wobei φ zugleich der bisher verwendete Drehwinkel ist. Aus (7) folgt dann die bekannte Gleichung

$$\varrho = \frac{R}{r + 2R \cos \varphi} \quad (13)$$

eines zur ξ -Achse symmetrischen Kegelschnittes mit Brennpunkt U , Parameter R/r und Exzentrizität $\varepsilon = 2R/r$; man hat eine Hyperbel (Fig. 4), eine Parabel oder eine Ellipse, je nachdem $r < 2R$, $= 2R$ oder $> 2R$ ist. Die Halbachsen der Mittelpunktskegelschnitte sind $a = Rr : |4R^2 - r^2|$ und $b = R : \sqrt{|4R^2 - r^2|}$, ihre lineare Exzentrizität beträgt $e = 2R^2 : |4R^2 - r^2|$.

Dieser von der Mitte O des Gangpolkreises p im Verlauf von \mathfrak{T} beschriebene Kegelschnitt führt zu einer elementaren Bestimmung der Rastpolkurve q von \mathfrak{T} : Da p in allen Lagen auch durch den Brennpunkt U geht, umhüllen diese den Leitkreis des Kegelschnittes (13) um den zweiten Brennpunkt V mit den ξ, η -Koordinaten $4R^2 : |4R^2 - r^2|, 0$ bzw. im Fall $r = 2R$ die Leitlinie $\xi = 1/2$, die als Mittelparallele der η -Achse und des vorgegebenen Speeres g auftritt. Dieser Leitkreis bzw. diese Leitgerade ist mithin die Rastpolkurve q , und es gilt¹¹⁾:

¹¹⁾ H. ALT hat in seiner Dissertation [1] zwar Parameterdarstellungen der Polkurve q für verschiedene Bewegungsfälle hergeleitet, doch nicht bemerkt, dass im vorliegenden Fall q ein Kreis bzw. eine Gerade ist; demzufolge sind auch die obigen Resultate dort nicht enthalten.

Die Rastpolkurve q der Bewegung \mathfrak{I} ist der Leitkreis bzw. die Leitgerade des vom Mittelpunkt O des Gangpolkreises p durchlaufenen Bahnkegelschnittes (13) mit Brennpunkt U (Fig. 4).

Im Sonderfall c) sind p und q die bekannten Polkreise mit dem Radienverhältnis 1:2. Im allgemeinen Fall hat q den Radius $2a = 2Rr : |4R^2 - r^2|$, gemessen in der Einheit des ξ, η -Systems.

Da Z im Berührungspunkt von p und q liegt, ist der zweite Brennpunkt V ein Punkt der Geraden OZ .

Die Kenntnis der Polkurven p, q ermöglicht abschliessend noch einige *Folgerungen*: Für die zunächst betrachtete Bewegung \mathfrak{S} vertauschen p und q ihre Rollen, so dass zur Rastpolkurve p mit q die Gangpolkurve von \mathfrak{S} bestimmt ist. Da nach 8 die Punkte jeder Nullgeraden im Verlauf von \mathfrak{S} in den zugehörigen Nullzykel als dem singulären Bahnkurvenpunkt gelangen, werden jene Punkte der Polkurven, die im Verlauf von \mathfrak{S} bzw. \mathfrak{I} zu Momentanpolen Z vereinigt werden, durch die Nullgeraden aus U in einer (1, 2)-Korrespondenz einander zugeordnet. Insbesondere schneiden die von U an q gelegten Tangenten auf p die Nullagen N_1 und N_2 von Z als Verzweigungspunkte der Korrespondenz aus. Im Fall reell getrennter Nullagen von \mathfrak{S} werden die Momentanpole Z reeller Systemlagen jenen doppelt überdeckten Bogen auf p zwischen N_1 und N_2 durchlaufen, auf den q aus U projiziert wird.

Da die Punkte von q wie im Fall starrer Bewegungen Bahnkurven durchlaufen, die im allgemeinen mit einer Spitze auf p aufsetzen und nur Punkte von q Bahnkurven mit Spitzen aufweisen können, so gilt ergänzend zu 8:

Die Punkte der Gangpolkurve q von \mathfrak{S} haben die kennzeichnende Eigenschaft, dass ihre Bahnkurven Kardioden sind.

H. SCHAAL, Stuttgart

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] ALT, H., *Zur Theorie der Geschwindigkeits- und Beschleunigungspläne einer komplizierten bewegten Ebene*, Dissertation Dresden (1914).
- [2] ARTZT, A., *Untersuchungen über ähnliche Dreiecke, die einem festen Dreieck umschrieben sind, nebst einer Anwendung auf die Gerade der zwölf harmonischen Punktreihen und ihre beiden Gegenbilder, die Ellipse und den Kreis der zwölf harmonischen Punktsysteme (Kreis Brocard's)*, 56. Jahresbericht des Gymnasiums Recklinghausen (1885–86), S. 1–28.
- [3] BEREIS, R., *Aufbau einer Theorie der ebenen Bewegung mit Verwendung komplexer Zahlen*, Öst. Ing.-Arch. 5, 246–266 (1951).
- [4] BEREIS, R., *Adjungierte Geraden eines Kreiszwillinges*, *El. Math.* 18, 87–89 (1963).
- [5] BURMESTER, L., *Lehrbuch der Kinematik* (Leipzig 1888).
- [6] CÖXETER, H. S. M., *Unvergängliche Geometrie* (Birkhäuser, Basel und Stuttgart 1963).
- [7] ENGELBRECHT, E., *Planimetrischer Lehrsatz*, *Arch. Math. Phys.* 60, 447–448 (1877).
- [8] FASBENDER, E., *Über die gleichseitigen Dreiecke, welche um ein gegebenes Dreieck gelegt werden können*, *J. reine angew. Math.* 30, 230–231 (1846).
- [9] FLADT, K., *Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven* (Frankfurt a.M. 1962).
- [10] GÖTZ, W., *Systematische Ausweitung einer Einbeschreibungsaufgabe*, *Der Math.-Unterr.* 6, H. 1: *Vom Problem zum System*, 57–66 (1960).
- [11] HARTMANN, TH., *Zur Theorie der Momentanbewegung eines ebenen ähnlich veränderlichen Systems*, Dissertation Rostock (1912).
- [12] HOFMANN, J. E., *Elementare Lösung einer Minimumsaufgabe*, *Z. math. naturw. Unterr.* 60, 22–23 (1929).
- [13] KRAUSE, M., *Analysis der ebenen Bewegung* (Berlin und Leipzig 1920).

- [14] MEHMKE, R., *Über die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene*, Z. Math. Phys. 35, 1–24, 65–81 (1890).
- [15] MÜLLER, E., und J. L. KRAMES, *Vorlesungen über Darstellende Geometrie*, Bd. 2: *Die Zyklographie* (Leipzig und Wien 1929).
- [16] MÜLLER, E., und J. L. KRAMES, *Vorlesungen über Darstellende Geometrie*, Bd. 2: *Konstruktive Behandlung der Regelflächen* (Leipzig und Wien 1931).
- [17] MÜLLER, H. R., *Kinematik* (Berlin 1963 [Sammlung Göschen]).
- [18] MÜLLER, P. H., *Adjungierte Sekanten und Tangenten zweier Kreise*, El. Math. 18, 11–13 (1963).
- [19] NEUBERG, J., *Sur les figures semblablement variables*, Proc. Lond. math. Soc. 16, 185–188 (1885).
- [20] SCHAAL, H., *Von der Bewegungsgeometrie zur konstruktiven Kinematik*, Der Math.-Unterr. 10, H. 3: *Vom Problem zum System II*, 48–72 (1964).
- [21] SIEBER, H., *Über Drehungen um 60°*, Der Math.-Unterr. 11, H. 3: *Abbildungsgeometrie*, V, 24–38 (1965).
- [22] WUNDERLICH, W., *Höhere Radlinien*, Öst. Ing.-Arch. 1, 277–296 (1947).
- [23] ZACHARIAS, M., *Elementargeometrie und elementare nichteuklidische Geometrie in synthetischer Behandlung*, in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. 3, AB 9 (Leipzig 1914–1931), S. 859–1172.
- [24] BERKHAHN, G., und W. FR. MEYER, *Neuere Dreiecksgeometrie*, in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. 3, AB 10 (Leipzig 1914–1931), S. 1173–1276.
- [25] SCHOENFLIES, A., *Kinematik*, in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. 4, 1 B I 3 (Leipzig 1901–1908), S. 190–278.
- [26] HOHENBERG, F. und J. TSCHUPIK, *Grundzüge der Darstellenden Geometrie*, in *Grundzüge der Mathematik*, Bd. II Kap. 11, S. 454–459 (Göttingen 1960).

Kleine Mitteilungen

Einige elementare kombinatorische Identitäten mit alternierenden Summen

1. Einleitung

Im Zentrum unserer Betrachtung steht die Identität

$$\sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} [x + (n - \nu)h]^m = \delta_{mn} h^n n! \quad [0 \leq m \leq n; \quad h \in R; \quad x \in R]^1), \quad (1)$$

der man ohne weiteres auch die Gestalten

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x + kh)^m = \delta_{mn} (-1)^n h^n n! \quad [0 \leq m \leq n; \quad h \in R; \quad x \in R], \quad (1')$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x - kh)^m = \delta_{mn} h^n n! \quad [0 \leq m \leq n; \quad h \in R; \quad x \in R] \quad (1'')$$

geben kann²⁾. Im Hinblick auf den bemerkenswerten Spezialfall

$$\sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n - \nu)^n = n! \quad [n \geq 0] \quad (2)$$

¹⁾ R bezeichne die Menge der reellen Zahlen und δ_{mn} das KRONECKERSCHE Symbol. Für die ganze Betrachtung verabreden wir $0^0 = 1$.

²⁾ Für Spezialfälle vergleiche zum Beispiel [3], Seite 97, Lemma 2.1; [7], (1) und (2); [8], S. 249, (17); [9], S. 496, zwischen (45) und (46); [10], S. 28, (4.14).