Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 21 (1966)
Heft: 3

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.09.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

4. Zusammenfassung der Formeln

Wir weisen noch auf die Übergänge zwischen den einzelnen Formeln hin. Aus den sphärischen Formeln werden sofort die euklidischen, wenn der Kugelradius R unbegrenzt wächst. Nimmt man dagegen eine Kugel mit rein imaginärem Radius, ersetzt man also R durch $i\,R$, so gehen die sphärischen in die hyperbolischen Formeln über.

Meist wird die Längeneinheit so festgelegt, dass die Konstante R den Wert 1 hat. Für diesen Fall fassen wir die beiden Formeln für die drei Geometrien zu je einer einzigen zusammen.

Wir definieren ([5], S. 64):

$$S(a) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin\sqrt{K}\, a\,.$$

Damit lauten die Sätze:

I. PTOLEMÄUS:

$$S\left(\frac{e}{2}\right) S\left(\frac{f}{2}\right) = S\left(\frac{a_1}{2}\right) S\left(\frac{a_3}{2}\right) + S\left(\frac{a_2}{2}\right) S\left(\frac{a_4}{2}\right).$$

II. BRAHMAGUPTA:

$$\frac{S\left(\frac{e}{2}\right)}{S\left(\frac{f}{2}\right)} = \frac{S\left(\frac{a_1}{2}\right) S\left(\frac{a_2}{2}\right) + S\left(\frac{a_3}{2}\right) S\left(\frac{a_4}{2}\right)}{S\left(\frac{a_1}{2}\right) S\left(\frac{a_4}{2}\right) + S\left(\frac{a_2}{2}\right) S\left(\frac{a_3}{2}\right)}.$$

Für $k = 1$ sind dies die Formeln (I_S), (II_S), für $k = -1$ (I_H), (II_H) und für $k \to 0$ schliesslich (I_E), (II_E).

H. ZEITLER, Weiden, Deutschl.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] O. PERRON, *Der Satz von Ptolemäus in der hyperbolischen Geometrie*, Bayr. Akademie der Wissenschaften, 1963.
[2] O. PERRON, *Seiten und Diagonalen eines Kreisvierecks in der hyperbolischen Geometrie*, Math. Zeitschrift *84*, 1964.
[3] Praxis der Mathematik, 1965, P. *207*, S. 48.
[4] H. MESCHKOWSKI, *Nichteuklidische Geometrie*, Braunschweig 1954.
[5] K. FLADT, *Elementargeometrie III*, Stuttgart 1961.

Kleine Mitteilungen

Explizite Darstellungen der natürlichen Logarithmusfunktion

1. Problemstellung. Die natürliche Logarithmusfunktion ist gekennzeichnet als die einzige Lösung der Funktionalgleichung

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2) \qquad [f\colon P \to R]^{1}) \qquad \text{(H)}$$

mit der zusätzlichen Bedingung

$$f(x) \leq x - 1 \qquad [\text{alle } x \in P]^{2}). \qquad (1)$$

---

[1]) R bedeute durchwegs die Menge der reellen Zahlen, P diejenige der positiven reellen Zahlen.

[2]) Vergleiche [1], p. 114. Für andere zur Charakterisierung geeignete Eigenschaften vergleiche [8], Sätze 6 und 7.

Insbesondere erweist sich die Normierung

$$f(e) = 1 \tag{2}$$

als eine Folgerung von (H) und (1). Neben der bekannten für beliebige Basen a ($a > 0$, $a \neq 1$) gültigen expliziten Darstellung

$${}^a\log x = \sup_{a^\varrho < x} \varrho = \inf_{x < a^\sigma} \sigma \qquad [x \in P;\ \varrho,\ \sigma\ \textit{rational}]^3) \tag{3}$$

gibt es nun solche, die für die natürliche Logarithmusfunktion l in ihrer Art spezifisch sind:

$$l_1(x) = \lim_{n\to\infty} n\,(x^{1/n} - 1) \qquad [x > 0]^4), \tag{4}$$

$$l_2(x) = \lim_{n\to\infty} 2^n\,(1 - x^{-1/2^n}) \qquad [x > 0]^5), \tag{5}$$

$$l_3(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \qquad [x > 0]^6). \tag{6}$$

Damit erwächst natürlich die Aufgabe, zu zeigen, dass durch (4), (5), (6) wirklich dieselbe Funktion l dargestellt wird. Es ist nun bemerkenswert, dass sich bei geeignetem Vorgehen diese ganze Erörterung insofern auf einem Vorposten zur eigentlichen Infinitesimalrechnung abspielt, als selbst bei (6) die blosse Definition des bestimmten Riemannschen Integrals völlig ausreicht.

Es ist ein Ziel dieser Note, der Liste (4), (5), (6) die Darstellung

$$l_4(x) = \lim_{n\to\infty} h\,(n, [x\,k(x)\,n]) - \lim_{n\to\infty} h\,(n, k(x)\,n) \qquad [x > 0]^7) \tag{7}$$

an die Seite zu stellen, worin $k(x) = -[-1/x]$ und $h(n, q) = 1/n + \cdots + 1/q$ $[0 < n \leq q$; n, q ganz] bedeuten sollen. (7) ist eine Verallgemeinerung der bekannten Beziehung

$$l_4(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n\,x}\right) \qquad [x > 0,\ \textit{ganz}]^8). \tag{7'}$$

Ferner begründen wir die Gleichwertigkeit der Darstellungen (4) bis (7) durch den folgenden

Satz: *Für alle $x > 0$ gilt $l_1(x) = l_2(x) = l_3(x) = l_4(x)$*[9]).

2. Beweis. Im Hinblick auf die anfangs eingeräumte Bemerkung[2]) genügt es, zu zeigen, dass die Funktionen l_1 bis l_4 die Eigenschaften (H) und (1) besitzen. – Für Existenz und Eigenschaften von l_2 verweisen wir auf [1], p. 117 ff. – l_1: Berücksichtigt man, dass für $c_n = n\,(x^{1/n} - 1)$ gilt $c_n \geq c_{n+1}$, $1 - 1/x \leq c_n \leq x - 1$ $[x > 0;\ n = 1, 2, \ldots]$, so ergibt sich

---

[3]) Vergleiche etwa [3], p. 81.

[4]) Vergleiche etwa [6], p. 252.

[5]) Vergleiche etwa [1], p. 118.

[6]) Diese Art der Einführung der natürlichen Logarithmusfunktion geht unseres Wissens auf Felix Klein [4], p. 323 ff, zurück. Vergleiche auch [2], p. 136; [6], p. 242 und für die Verwendung an der Mittelschule besonders [5], p. 23 ff; [9], p. 104 ff; [10], p. 33 ff; [11].

[7]) $[p]$ bedeute das Gauss'sche Klammersymbol. Für natürliche x wird $k(x) = 1$, und (7) geht über in (7'). Die Anregung zu dieser Verallgemeinerung verdanken wir Herrn F. Steiger, Bern.

[8]) Die Richtigkeit dieser Darstellung kann auch durch die Berufung auf einen bekannten Zusammenhang mit der Euler'schen Konstanten erschlossen werden. Andersartig wird (7') in [7], p. 89, Aufgabe 35, und p. 104, Aufgabe 31, gewonnen. Vergleiche auch [9], p. 107, Aufgabe 2.

[9]) Die Übereinstimmung mit der Darstellung (3) für $a = e$ ergibt sich etwa durch Satz 7 in [8].

die Existenz von l_1 und die Gültigkeit von $l_1(x) \leq x - 1$ $[x > 0]$, während (H) analog wie für l_2 nachgewiesen werden kann. — l_3: Für jedes $a > 0$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\tau_\nu} (t_{\nu+1} - t_\nu) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{a\,\tau_\nu} (a\,t_{\nu+1} - a\,t_\nu) ,$$

woraus bei $1 = t_0 < \cdots < t_n = x$ unmittelbar

$$l_3(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \int_a^{ax} \frac{ds}{s} \tag{8}$$

resultiert; die Erweiterung auf den Fall $0 < x \leq 1$ geschieht durch die bekannten Konventionen[10]), so dass also (8) für alle $x > 0$ gilt. Dann ist

$$l_3(x_1\,x_2) = \int_1^{x_1 x_2} \frac{dt}{t} = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} + \int_{x_1}^{x_1 x_2} \frac{dt}{t} = l_3(x_1) + l_3(x_2) .$$

Für $x > 1$ ist $1 \cdot (x - 1)$ eine zu $l_3(x)$ gehörige Riemannsche Obersumme und für $0 < x < 1$ ebenso $1 \cdot (1 - x)$ eine zu $-l_3(x)$ gehörige Untersumme. Dadurch ist auch die Gültigkeit der im Falle $x = 1$ trivialen Bedingung (1) sichergestellt.

Für l_4 bemerken wir, dass für $p > 1$ der Abschnitt $h\,(n, [p\,n])$ der harmonischen Reihe im wesentlichen mit der zu $l_3(p)$ und der Zerlegung $t_\nu = 1 + \nu/n$ $(\nu = 0, 1, \ldots, [p\,n] - n)$ gehörigen Riemannschen Obersumme s_n übereinstimmt; genauer: $h\,(n, [p\,n]) = s_n + ([p\,n] + 1 - p\,n)/[p\,n]$. Daraus resultiert $h\,(n, [p\,n]) \to l_3(p)$ $[n \to \infty]$. Im Falle $p = 1$ reduziert sich $h\,(n, [p\,n])$ auf $1/n$, und die soeben für $p > 1$ gemachte Konvergenzaussage gilt auch hier. Für alle $x > 0$ ist nun $k(x)$ eine natürliche Zahl und überdies $x\,k(x) \geq 1$. Somit gilt nach (7): $l_4(x) = l_3\,(x\,k(x)) - l_3\,(k(x))$, also, da l_3 die Eigenschaft (H) besitzt, $l_4(x) = l_3(x)$ für alle $x > 0$, womit alles bewiesen ist.

JÜRG RÄTZ, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

[1] M. BARNER, *Differential- und Integralrechnung I* (de Gruyter Berlin 1961).

[2] R. COURANT, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung I* (Springer Berlin 1927).

[3] J. DIEUDONNÉ, *Foundations of Modern Analysis* (Acad. Press New York–London 1960).

[4] F. KLEIN, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Teil I (2. Aufl.), (Teubner Leipzig 1911).

[5] A. I. MARKUSCHEWITSCH, *Flächeninhalte und Logarithmen* (Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1955).

[6] A. OSTROWSKI, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung I* (Birkhäuser Basel 1945).

[7] A. OSTROWSKI, *Aufgabensammlung zur Infinitesimalrechnung I* (Birkhäuser Basel–Stuttgart 1964).

[8] J. RÄTZ, *Begründung und Charakterisierung der reellen Logarithmusfunktionen*, El. Math. *20*, 122–128 (1965).

[9] B. REIMANN, *Hyperbelfunktionen*. Der Mathematikunterricht *3*, Heft 4, 102–123 (1957).

[10] W. G. SCHERWATOW, *Hyperbelfunktionen* (Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1956).

[11] B. L. VAN DER WAERDEN, *Über die Einführung des Logarithmus im Schulunterricht*, El. Math. *12*, 1–8 (1957)

[10]) Vergleiche etwa [6], p. 150.

Gruppenähnliche Strukturen

Im folgenden sollen Strukturen S^0 angegeben werden, die zwar Halbgruppen sind und Linkseinselemente sowie Rechtsinverse besitzen, aber keine Gruppen sind. Solche Strukturen definieren wir in Mengen S, deren Elemente singuläre Matrizen sind. Als Verknüpfung wird dabei die Matrizenmultiplikation im üblichen Sinn verwendet. Es zeigt sich, dass es in diesen Strukturen unendlich viele Linkseinselemente und zu jedem Element und zu jeder Linkseinheit genau ein Rechtsinverses gibt. Es sei

$$S^0 = \left\{ \ldots \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \ldots \right\}, \qquad a_i \text{ reell}, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j \neq 0 .$$

Eine Linkseinheit ist

$$\varepsilon_L = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \in S^0 , \qquad \text{mit beliebigen } x_i \text{ und } \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 . \tag{1}$$

Es sei ε_L ein Linkseinselement und

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \in S^0$$

ein Element aus S^0. Ein rechtsinverses Element α_R^{-1} von α bezüglich der Linkseinheit ε_L ist von der Form

$$\alpha_R^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_n \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ b_1 & \ldots & b_n \end{pmatrix}, \qquad b_i = \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} a_j}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Dann ist

$$\alpha \, \alpha_R^{-1} = \varepsilon_L .$$

Aus (1) folgt, dass es in S^0 unendlich viele Linkseinselemente gibt. Daraus ergibt sich, dass S^0 keine Gruppe sein kann. Dass S^0 keine Rechtseinselemente besitzt, folgt unmittelbar aus dem bekannten Satz, dass eine Halbgruppe mit Einselement kein weiteres Linkseinselement hat und dass in einer Halbgruppe ohne Einselement von der Menge der Links- bzw. Rechtseinselemente mindestens eine die leere Menge ist. (Vergleiche zum Beispiel L. RÉDEI, Algebra, Teil 1, 1959, S. 45).

Betrachtet man die Menge S^T, deren Elemente die transponierten Elemente von S sind, so erhält man bei Einführung der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung eine ähnliche Struktur S^{To}. In dieser gibt es dann unendlich viele Rechtseinselemente und zu jedem Element und zu jeder Rechtseinheit gibt es genau ein Linksinverses. S^{To} ist aus analogen Gründen wiederum keine Gruppe.

Übrigens haben die Matrizen α der Menge S die Eigenwerte

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0 , \quad \lambda_n = \sum_{1}^{n} a_i .$$

Die charakteristische Determinante lässt sich nämlich durch elementare Umformungen in die Gestalt

$$D = \det(\alpha - \lambda I) = (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\left(\sum_1^n a_j - \lambda\right)$$

bringen. α hat also genau einen von Null verschiedenen Eigenwert λ_n, und die Rechtsinverse bezüglich einer bestimmten Linkseinheit mit den Elementen $x_1, \ldots, x_n$ hat die Elemente $b_i = x_i \lambda_n^{-1}$, $i = 1, \ldots, n$.

R. Z. DOMIATY und H. FLORIAN, Graz

Note on Fermat Numbers

It is known that if $F_n = 2^{2^n} + 1$, then the numbers

$$M_1 = F_n F_{n+1}, \qquad n > 1,$$

and

$$M_2 = F_n F_{n+1} F_{n+2}, \quad n > 2,$$

are pseudoprimes, i.e. they are composite (clearly) and $M_i \mid 2^{M_i} - 2$, $(i = 1, 2)$. The fact, that the number M_2 is pseudoprime was also recently stated in these Elemente [2]. These results follow immediately from the following theorem, proved by M. CIPOLLA [1]:

If $M = F_m F_n \ldots F_s$, $m > n > \ldots > s$, then M is a pseudoprime if and only if $m < 2^s$.

A composite number N which has the property, that for every divisor d of N,

$$d \mid 2^d - 2 \tag{1}$$

holds, is called a super-pseudoprime number.

In this note we shall prove the following

Theorem. The number M_1 is a super-pseudoprime.

We denote by $\Delta(m)$ the smallest natural number Δ such that $m \mid 2^\Delta - 1$. To prove our Theorem we require the following known lemmas ([3], p. 343 and [1]).

Lemma 1. If $d \mid F_n$, then $\Delta(d) = 2^{n+1}$.

Lemma 2. If p is a prime and $p \mid F_n$, then $p = 2^{n+2}k + 1$.

Lemma 3. If m and n are relatively prime, then

$$\Delta(mn) = [\Delta(m), \Delta(n)],$$

where $[a, b]$ denotes the least common multiple of a and b.

Proof of the Theorem. It is enough to show that for every divisor d of M_1, we have

$$\Delta(d) \mid d - 1. \tag{2}$$

Let $d \mid M_1$, thus $d = d_1 d_2$, where $d_1 \mid F_n$, $d_2 \mid F_{n+1}$ and it is well known that $(d_1, d_2) = 1$. From Lemma 2 we get $d_1 = 2^{n+2}k_1 + 1$, $d_2 = 2^{n+3}k_2 + 1$, and thus

$$d = d_1 d_2 = 2^{n+2}k + 1. \tag{3}$$

On the other hand, by Lemma 1, $\Delta(d_1) = 2^{n+1}$, $\Delta(d_2) = 2^{n+2}$, and by Lemma 3,

$$\Delta(d) = [\Delta(d_1), \Delta(d_2)] = 2^{n+2}. \tag{4}$$

From (4) and (3) we get (2), which implies (1), and the Theorem is proved.

Remark. The question, whether there exist infinitely many super-pseudoprime numbers M_2 seems to be difficult. Namely, it may be observed, that the number M_2 is a super-pseudoprime if and only if every divisor of the number F_n is of the form $2^{n+3}k + 1$. We are unable to decide if there exist infinitely many of such Fermat numbers.

K. SZYMICZEK, Katowice, Poland

REFERENCES

[1] M. CIPOLLA, *Sui numeri composti che verificano la congruenza di Fermat* $a^{P-1} \equiv 1 \pmod P$, Annali di Matematica (3), *9*, 139–160, 1904.

[2] A. ROTKIEWICZ, Aufgabe 471, El. Math. *19*, 17 (1964); *20*, 15 (1965).

[3] W. SIERPIŃSKI, *Elementary Theory of Numbers*, PWN, Warszawa 1964.

A Variation on a Problem in Number Theory of H. Steinhaus

Throughout this paper N will denote the natural numbers. Let $n \in N$ and suppose that the digits in the decimal expansion for n are $a_1, \ldots, a_j$. Define a function s by

$$s(n) = \sum a_i^2 .$$

It is known [3] that for each $n \in N$ there is a k such that $s^k(n) = s(s^{k-1}(n)) = 1$ (in which case $s^{k+i}(n) = 1$ for all i) or there is a k such that $s^k(n) = 4$ (in which case $s^{k+8i}(n) = 4$ for all i). We shall say that a natural number n is of type A in the first case and of type B in the second case. In this paper the following theorem is proved.

Theorem 1. There exist arbitrarily long gaps between consecutive numbers of type A (*type* B).

The proof of this result is in two parts. First it is shown that if there exists a number n such that $n + k$ is of type B (type A) for $k = 1, 4, 16, 20, 37, 42, 58, 89, 145$, then there are arbitrarily long gaps between consecutive numbers of type A (type B). Then it is shown that, for each type, such a n exists.

The three facts contained in the following lemma are easily established and will be helpful in the sequel.

Lemma 1. (a) *If* $j < 10^k$ *and* $n = m \cdot 10^k$ *then* $s(n + j) = s(m) + s(j)$; (b) n *and* $s(n)$ *are of the same type;* (c) *If* $n \in N$ *then there is a number* m *such that* $s(m) = n$.

The proofs of the following three lemmas are quite similar and only the first and last will be proved.

Lemma 2. If there exists $n \in N$ *such that* $n + k$ *is of type* A (*type* B) *for* $1 \leqslant k \leqslant 243$ *then there exists* $p \in N$ *such that* $p + k$ *is of type* A (*type* B) *for* $1 \leqslant k \leqslant 10^3$.

To see this let $p = q \cdot 10^3$ where $s(q) = n$. If $k \leqslant 1000$, $s(k) \leqslant 81 + 81 + 81 \leqslant 243$. Thus $n + 1 \leqslant s(p + k) = s(q) + s(k) \leqslant n + 243$ and hence $p + k$ is of type A (type B).

Lemma 3. Let $m \in N$ *where* $m \geqslant 3$. *If there exists* $n \in N$ *such that* $n + k$ *is of type* A (*type* B) *for* $1 \leqslant k \leqslant 10^m$ *then there exists* $p \in N$ *such that* $p + k$ *is of type* A (*type* B) *for* $1 \leqslant k \leqslant 10^{10^{m-2}}$.

Lemma 4. If there exists a n_0 *such that* $n_0 + k$ *is of type* A (*type* B) *for* $k \in \{1, 4, 16, 20, 37, 42, 58, 89, 145\}$ *then there exists a* p *such that* $p + k$ *is of type* A (*type* B) *for* $1 \leqslant k \leqslant 243$.

Suppose n_0 satisfies the hypothesis of the lemma, that q_1 is such that $s(q_1) = n_0$ and for $i \geqslant 1$, q_i and n_i are defined inductively as $n_i = q_i \cdot 10^3$, where q_i is such that $s(q_i) = n_{i-1}$. Let $p = n_{10}$ then for $1 \leqslant k \leqslant 243$, $s^{10}(p + k) = s^9(s(n_{10}) + s(k)) = s^9(s(q_{10}) + s(k)) = s^9(n_9 + s(k)) = \ldots = n_0 + s^{10}(k)$. But it can be shown that if $1 \leqslant k \leqslant 243$ then $s^{10}(k) \in \{1, 4, 16, 20, 37, 42, 58, 89, 145\}$ thus the lemma is true and we have the following theorem:

Theorem 2. If there exists $n \in N$ *such that* $n + k$ *is of the type* A (*type* B) *for* $k \in \{1, 4, 16, 20, 37, 42, 58, 89, 145\}$ *then for all* $m \in N$ *there exists* $p \in N$ *such that* $p + k$ *is of type* A (*type* B) *for* $k \leqslant m$.

To prove theorem 1 we observe that in theorem 2, $n = 1$ works for numbers of type B. In finding a number n that works for numbers of type A an *IBM* 1620 at the statistical laboratory and computing center, University of Oregon, was employed in part. Calculations showed that the following numbers were of type A: 3293, 3296, 3301, 3308, 3436. Let $L_0 = 3291$, L_1 be such that $s(L_1) = 3291$, $k_1 = L_1 \cdot 10^3 + 3$, L_2 be such that $s(L_2) = k_1$, $k_2 = L_2 \cdot 10^3 + 76$, L_3 be such that $s(L_3) = k_2$, $k_3 = L_3 \cdot 10^3 + 62$, L_4 be such that $s(L_4) = k_3$ and $k_4 = L_4 \cdot 10^3 + 122$. Then if $i \in \{1, 4, 16, 20, 37, 42, 58, 89, 145\}$ then $s^4(k_4 + i) \in \{3293, 3296, 3301, 3308, 3436\}$. Hence $k_4 + i$ is of type A and $n = k_4$ works for the n in theorem 2 and theorem 1 is proved.

Richard B. Crittenden and J. Kenneth Harris,
Oregon State University, Corvallis, USA
and Portland State College, Portland, USA

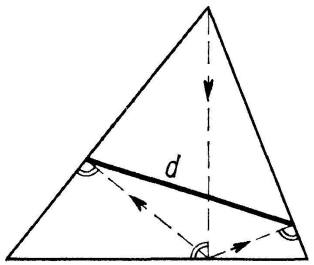
BIBLIOGRAPHY

[1] K. Chikawa and K. Iseka, *Unsolved Problems of Number Theory Steinhaus Problem.* Proc. Japan Acad. *38*, 271 (1962).
[2] K. Iseka, *A Problem of Number Theory,* Proc. Japan Acad. *36*, 578–583 (1960).
[3] H. Steinhaus, *Sto Zadan,* [Wyd. 1 Warszawa], panstwowe wydawn. Naukowe (1958).

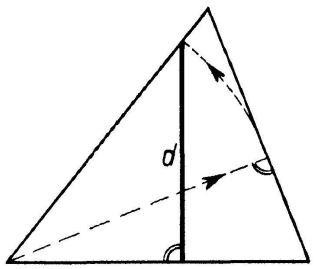
sin-tan-Transformation, Polarisation und Pseudopolarisation

Über die Äquivalenz von je 12 Formeln in der Theorie vierter Dreiecksstücke

Seien $a\,b\,c\,d$ die Seiten, $h_a\,h_b\,h_c\,h$ die Höhen, $\varrho_a\,\varrho_b\,\varrho_c\,\varrho$ die Berührradien und $s_a\,s_b\,s_c\,s$ (oft s-a, s-b, s-c, s genannt) die Berührstrecken eines ebenen Dreiecks mit Innenwinkeln $A\,B\,C$ und Flächeninhalt F. Bekanntlich ist die 4. Höhe h der Umkreisdurchmesser, und die 4. Seite $d = 2\,F/h$ eine Taylorkreissehne = 6-Punktekreissehne.



d als Taylorkreissehne



d höhenparallel

Wegen

$$\sin A = \frac{d}{h_a} = \frac{h_b}{c} = \frac{h_c}{b} = \frac{a}{h} \qquad 2\,F = a\,h_a = d\,h \tag{1}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{\varrho}{s_a} = \frac{s_b}{\varrho_c} = \frac{s_c}{\varrho_b} = \frac{\varrho_a}{s} \qquad F = \varrho_a\,s_a = \varrho\,s \tag{1'}$$

nebst zyklischer Vertauschung $\xrightarrow[A\,B\,C\,A]{a\,b\,c\,a}$ gilt folgender

Äquivalenzsatz: *Jede richtige bzw. falsche multiplikative Identität in Stücken aus irgendeiner der folgenden 12 Zeilen der Tabelle bleibt richtig bzw. falsch, wenn die Stücke durch die entsprechenden irgendeiner anderen Zeile ersetzt werden:*

1)	a	b	c	d	h_a	h_b	h_c	h	$\sin A$	$\sin B$	$\sin C$	2.
2)	$\sin A$	$\sin B$	$\sin C$	$2\,F$	h_a	h_b	h_c	h^{-1}	a	b	c	d
3)	$1/\sin A$	$1/\sin B$	$1/\sin C$	$2\,F$	a	b	c	d^{-1}	h_a	h_b	h_c	h
4)	a^{-1}	b^{-1}	c^{-1}	d	$\sin A$	$\sin B$	$\sin C$	$(2\,F)^{-1}$	h_a	h_b	h_c	h^-
5)	h_a	h_b	h_c	h^{-1}	$\sin A$	$\sin B$	$\sin C$	$2\,F$	a^{-1}	b^{-1}	c^{-1}	d
6)	h_a	h_b	h_c	h	a	b	c	d	$1/\sin A$	$1/\sin B$	$1/\sin C$	2.
1')	ϱ_a	ϱ_b	ϱ_c	ϱ	s_a	s_b	s_c	s	$\tan A/2$[1]	$\tan B/2$	$\tan C/2$	F
2')	$\tan A/2$	$\tan B/2$	$\tan C/2$	F	s_a	s_b	s_c	s^{-1}	ϱ_a	ϱ_b	ϱ_c	ϱ
3')	$1/\tan A/2$	$1/\tan B/2$	$1/\tan C/2$	F	ϱ_a	ϱ_b	ϱ_c	ϱ^{-1}	s_a	s_b	s_c	s
4')	ϱ_a^{-1}	ϱ_b^{-1}	ϱ_c^{-1}	ϱ	$\tan A/2$	$\tan B/2$	$\tan C/2$	F^{-1}	s_a	s_b	s_c	s^-
5')	s_a	s_b	s_c	s^{-1}	$\tan A/2$	$\tan B/2$	$\tan C/2$	F	ϱ_a^{-1}	ϱ_b^{-1}	ϱ_c^{-1}	ϱ
6')	s_a	s_b	s_c	s	ϱ_a	ϱ_b	ϱ_c	ϱ	$1/\tan A/2$	$1/\tan B/2$	$1/\tan C/2$	F

Beispiel: Es gilt

$$1 = \frac{a\,b\,c\,d}{(2\,F)^2} = \frac{\sin A\,\sin B\,\sin C\cdot 2\,F}{d^2} = \frac{(\sin A\,\sin B\,\sin C)^{-1}\cdot 2\,F}{h^2} = \frac{a^{-1}\,b^{-1}\,c^{-1}\,d}{h^{-2}}$$

$$= \frac{h_a\,h_b\,h_c\,h^{-1}}{d^2} = \frac{h_a\,h_b\,h_c\,h}{(2\,F)^2} = \frac{\varrho_a\,\varrho_b\,\varrho_c\,\varrho}{F^2} = \frac{\tan(A/2)\,\tan(B/2)\,\tan(C/2)\cdot F}{\varrho^2}$$

$$= \frac{[\tan(A/2)\,\tan(B/2)\,\tan(C/2)]^{-1}\cdot F}{s^2} = \frac{\varrho_a^{-1}\,\varrho_b^{-1}\,\varrho_c^{-1}\,\varrho}{s^{-2}} = \frac{s_a\,s_b\,s_c\,s^{-1}}{\varrho^2} = \frac{s_a\,s_b\,s_c\,s}{F^2}\,.$$

Beweis: Zeile 1 lässt sich mittels (1) multiplikativ durch höchstens 4 Stücke darstellen, zum Beispiel durch a, b, c, $\sin A$:

[1]) $\tan A/2 = \tan(A/2)$ etc.

$a, b, c, a^{-1}bc\sin^2 A, \quad a^{-1}bc\sin A, c\sin A, b\sin A, a/\sin A,$

$\sin A, a^{-1}b\sin A, a^{-1}c\sin A, bc\sin A.$

Analog lässt sich Zeile 1′ mittels (1′) multiplikativ durch $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c, \tan A/2$ darstellen. Jede multiplikative Identität $1 = \Phi$ mit Stücken nur aus Zeile 1 lässt sich also in die Gestalt

$$1 = a^x b^y c^z (\sin A)^t \quad \text{mit} \quad x + y + z = 0 \tag{2}$$

setzen, woraus mittels (1) durch Ausübung der inversen Substitutionen wiederum $1 = \Phi$ folgt. Da (2) für alle Dreiecke gelten soll, ist b mit c vertauschbar, also $y = z$. Und weil in (2) für $x \neq 0$ bei konstantem Produkt bc und konstantem Winkel A auch a konstant würde, was aus bekannten geometrischen Gründen nicht zutrifft, so folgt $x = 0$, also auch $y = z = 0$. Dann ist aber auch $t = 0$, und (2) reduziert sich auf die formale Identität $1 = 1$. Jede multiplikative Identität $1 = \Phi$ mit Stücken nur aus Zeile 1 lässt sich also allein mittels (1) beweisen. Dann lässt sich aber die zu $1 = \Phi$ isomorphe Identität $1 = \Phi'$ mit Stücken nur aus Zeile 1′ allein mittels (1′) beweisen, was ja zu (1) isomorph ist. Daher ist der Übergang von einer der Zeilen 1 bis 6 zu der entsprechenden Zeile aus 1′ bis 6′ legitim, desgleichen der umgekehrte Übergang. Diese Übergänge werden sin-tan-Transformation und tan-sin-Transformation genannt. Den vorstehenden Teilbeweis des Äquivalenzsatzes verdankt man E. Trost.

Wegen der Isomorphie von (1) und (1′) bleibt nur noch zweierlei zu beweisen:
I. Der Übergang zwischen Zeile 1 und Zeile 2 – kurz 1)2) –, genannt Polarisation. Er ist nämlich äquivalent mit dem Übergang 3)4) bzw. 5)6) und folgt aus der zu (1) isomorphen Formelgruppe

$$a = \frac{2F}{h_a} = \frac{h_b}{\sin C} = \frac{h_c}{\sin B} = \frac{\sin A}{h^{-1}} \qquad d = \sin A \cdot h_a = 2F\,h^{-1}. \tag{3}$$

Der zu 1)2) isomorphe Übergang 1′)2′) werde Pseudopolarisation genannt.
II. Der Übergang 2)3) nebst den äquivalenten Zeilenübergängen 4)5) und 6)1). Er kann Seiten-Höhen-Vertauschung genannt werden (den isomorphen Übergang 2′)3′) kann man als Berührradien-Berührstrecken-Vertauschung bezeichnen). Er folgt aus der zu (3) isomorphen Formelgruppe

$$h_a = \frac{2F}{a} = \frac{b}{1/\sin C} = \frac{c}{1/\sin B} = \frac{1/\sin A}{d^{-1}} \qquad h = (1/\sin A) \cdot a = 2F\,d^{-1}. \tag{4}$$

Weil hiermit sämtliche Zeilenübergänge als legitim erkannt sind, ist der Äquivalenzsatz bewiesen.

Mit (1) (3) (4) und den isomorphen Formeln (1′) (3′) (4′), die man leicht vollständig hinschreibt, ist bereits gezeigt, dass durch Anwendung der 12-Zeilen-Tabelle nicht immer 12 verschiedene Beziehungen entstehen, sondern mitunter nur 6 (oder noch weniger). Das ist auch der Fall bei

$$\begin{aligned}
2F &= & & & & (a & b & c & d)^{1/2} \\
&= (a & b & c & h^{-1})^{1/1} &= (h_a^{-1} & b & c & d)^{1/1} \\
&= (a & b & h_c^{-1} & h^{-1})^{1/0} &= (h_a^{-1} & h_b^{-1} & c & d)^{1/0} = 1^{\infty} \\
&= (a & h_b^{-1} & h_c^{-1} & h^{-1})^{1/-1} &= (h_a^{-1} & h_b^{-1} & h_c^{-1} & d)^{1/-1} \\
&= (h_a^{-1} & h_b^{-1} & h_c^{-1} & h^{-1})^{1/-2}.
\end{aligned}$$

Dieser Formelgruppe gesellen sich durch Anwendung des Äquivalenzsatzes genau 5 isomorphe Formelgruppen hinzu: $d = \ldots, h = \ldots, F = \ldots, \varrho = \ldots, s = \ldots$.

Zur Erklärung der Bezeichnungen Polarisation und Pseudopolarisation sei auf Folgendes hingewiesen: $2F$ und d sind beim ebenen Dreieck analog dem Eckensinus und Polareckensinus des sphärischen Dreiecks definierbar. h ist das ebene Analogon des Moduls, beim ebenen Polarisieren geht $h = 2F/d$ in $h^{-1} = d/2F$ über. Auf der Kugel sind die Höhen (zum Beispiel h_a und h_a') von Dreieck und zugehörigem Polardreieck supplementär, weil sie gemäss $h_a + 90° + h_a' + 90° = 360°$ auf einem Grosskreis verteilt liegen. Analog $\sin h_a = \sin h_a'$ geht in der Ebene beim Polarisieren h_a in h_a (also in sich selbst) über. Schliesslich tauschen in der Ebene a und $\sin A$ beim Polarisieren die Rollen, wie auf der Kugel $\sin a$ und $\sin A$. Der zum Polarisieren im sin-Bereich isomorphe Vorgang im tan-Bereich wird durch die Vorsilbe Pseudo kenntlich gemacht. – Durch Einführung einer ehemals uneigentlichen Zahl i wird ein isomorpher Zerfall in Linearfaktoren zum Beispiel

bei den Polynomen $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ und $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ erzielt, durch Einführung einer uneigentlichen Seite d und Höhe h ein isomorpher Zerfall von sin- und tan-Bereich in Stücke und Formeln.

Der Beweis des Äquivalenzsatzes vereinfacht sich erheblich, wenn man Zeile 1) oder 1') in der allgemeinen Gestalt $e^x\, e^y\, e^z\, e^t\, e^X\, e^Y\, e^Z\, e^T\, e^\xi\, e^\eta\, e^\zeta\, e^\vartheta$ etwa mit unbestimmten $x\, y\, z\, t$ schreibt. Unter Zuhilfenahme der beiden orthogonalen Matrizen

$$M = M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad N = N^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

stösst man nämlich auf die beiden Sechserzyklen

$$\begin{array}{l}
(x\ \ y\ \ z\ \ t)\, M = (X\ \ Y\ \ Z\ \ T) \\
(X\ \ Y\ \ Z\ -T)\, M = (\xi\ \ \eta\ \ \zeta\ \ \vartheta) \\
(\xi\ \ \eta\ \ \zeta\ -\vartheta)\, M = (-x\ -y\ -z\ \ t) \\
\\
(-x\ -y\ -z\ -t)\, M = (-X-Y-Z-T) \\
(-X-Y-Z\ \ T)\, M = (-\xi-\eta-\zeta-\vartheta) \\
(-\xi-\eta-\zeta\ \ \vartheta)\, M = (x\ \ y\ \ z\ -t) \\
\\
(x\ \ y\ \ z\ \ t)\, N = (\xi\ \ \eta\ \ \zeta\ \ \vartheta) \\
(-\xi-\eta-\zeta\ \ \vartheta)\, N = (X\ \ Y\ \ Z\ \ T) \\
(-X-Y-Z\ \ T)\, N = (x\ \ y\ \ z\ -t) \\
\\
(-x\ -y\ -z\ -t)\, N = (-\xi-\eta-\zeta-\vartheta) \\
(\xi\ \ \eta\ \ \zeta\ -\vartheta)\, N = (-X-Y-Z-T) \\
(X\ \ Y\ \ Z\ -T)\, N = (-x\ -y\ -z\ \ t)\,,
\end{array}$$

und hierin stellen bereits die ersten 3 Zeilen den Beweis des Äquivalenzsatzes dar. – Offenbar gibt es beliebig viele additive und multiplikative Beispiele $x\, y\, z\, t\, X\, Y\, Z\, T\, \xi\, \eta\, \zeta\, \vartheta$ allein in der Dreieckslehre. Wir wählten 2 naheliegende multiplikative: den sin-Bereich und den tan-Bereich.

I. Paasche, München

Aufgaben

Aufgabe 501. Man bestimme den geometrischen Ort für das Zentrum einer räumlichen Inversion, welche drei gegebene Punkte in die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks abbildet.

C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung: Es seien P_1, P_2, P_3 die gegebenen Punkte, P_1^*, P_2^*, P_3^* deren Bilder bei einer Inversion mit Zentrum M und Inversionsradius r, ferner $\overline{MP_i} = \varrho_i$, $\overline{MP_i^*} = \varrho_i^*$. Dann ist

$$\varrho_i^* = r^2\, \varrho_i^{-1}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke P_1MP_2 und $P_2^*\, MP_1^*$ folgt

$$\overline{P_1^*P_2^*} : \overline{P_1P_2} = \varrho_2^* : \varrho_1 = r^2 : \varrho_1\varrho_2\,. \tag{2}$$

Wegen der Forderung $\overline{P_1^*P_2^*} = \overline{P_2^*P_3^*} = \overline{P_3^*P_1^*}$ ergibt sich aus (2) $\overline{P_1P_2} : \varrho_1\varrho_2 = \overline{P_1P_3} : \varrho_1\varrho_3$ oder

$$\varrho_2 : \varrho_3 = \overline{P_1P_2} : \overline{P_1P_3} \text{ und entsprechend } \varrho_3 : \varrho_1 = \overline{P_2P_3} : \overline{P_2P_1},\ \varrho_1 : \varrho_2 = \overline{P_3P_1} : \overline{P_3P_2}. \tag{3}$$

Die Verhältnisse der Entfernungen des Inversionszentrums M von den Ecken des Dreiecks $P_1P_2P_3$ sind also gegeben; M liegt auf drei «Apollonischen Kugeln». Da aus zwei der Bedingungen (3) die dritte folgt, haben diese drei Kugeln einen gemeinsamen Schnittkreis und damit auch eine gemeinsame Zentrale. Dieser Kreis, dessen Mittelpunkt auf jener Zentralen liegt und dessen Ebene zu ihr senkrecht steht, ist der gesuchte geometrische Ort.

W. Jänichen, Berlin-Zehlendorf

Weitere Lösungen sandten G. Geise (Dresden), K. Schuler (Rottweil). und K. Zacharias, (Berlin)