

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 21 (1966)
Heft: 2

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Kleine Mitteilungen

Mehrfache Kreisunterdeckungen und Kreisüberdeckungen auf der Kugel

Eine Menge in der Ebene liegender offener Kreisscheiben wird eine *k-fache Kreisunterdeckung* genannt, wenn jeder Punkt der Ebene zu höchstens k Scheiben gehört. In ähnlicher Weise definieren wir eine *k-fache Kreisüberdeckung* als eine Menge abgeschlossener Kreisscheiben mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt der Ebene zu wenigstens k Scheiben gehört. Es erheben sich die Probleme: aus kongruenten Kreisen möglichst dichte k -fache Unterdeckungen und möglichst dünne k -fache Überdeckungen zu konstruieren.

Im folgenden betrachten wir stets kongruente Kreise enthaltende Anordnungen. Die Dichte einer k -fachen Unterdeckung oder Überdeckung geteilt durch k nennen wir die *reduzierte Dichte*.

Die Dichten der dichtesten einfachen Kreisunterdeckung und der dünnsten einfachen Kreisüberdeckung betragen $\pi/\sqrt{12} = 0,906 \dots$ bzw. $2\pi/\sqrt{27} = 1,209 \dots$ [6] [9]. HEPPE [7] [8] hat 2-, 3- und 4fache Kreisunterdeckungen mit einer reduzierten Dichte $\approx 0,927$ und eine 5fache Kreisunterdeckung mit einer reduzierten Dichte $\approx 0,950$ angegeben. Ferner hat DANZER [5] eine 2fache Kreisüberdeckung und BLUNDON [1] 3- und 4fache Kreisüberdeckungen mit den reduzierten Dichten $\approx 1,174, 1,146, 1,089$ konstruiert. Weitere Ergebnisse in dieser Richtung finden sich in [3], [4], [8].

Bekanntlich lässt sich die Kugel durch mehr als zwei Kreise weder so dicht einfach unterdecken noch so dünn einfach überdecken wie die Ebene [6]. Gelten analoge Sätze auch für mehrfache Kreisanordnungen? Um diese Frage zu präzisieren, formulieren wir folgende

Aussagen. Die Kugel lässt sich durch mehr als $2k$ Kreise nicht so dicht (dünn) k -fach unterdecken (überdecken) wie die Ebene.

Die Frage ist, für welche Werte von k diese Aussagen richtig sind.

Da in der Ebene für die reduzierte Dichte mehr als einfacher Kreisunterdeckungen und Kreisüberdeckungen nur die triviale obere bzw. untere Schranke 1 bekannt ist, können wir diese Frage zur Zeit für keinen Wert von $k > 1$ entscheiden. Wir beschränken uns nur auf zwei einfache Beispiele, die die Richtigkeit der obigen Aussagen für $k = 3$ fraglich machen. Für $k = 2$ sind mir derartige Beispiele nicht bekannt.

Wir betrachten eine Fläche ABD eines der Einheitskugel einbeschriebenen regulären Ikosaeders. C sei der Mittelpunkt der sphärischen Strecke BD . Die fraglichen Kreisanordnungen bestehen aus den um die Ecken des Ikosaeders mit dem Radius $b = AC$ bzw. mit dem Radius $c = AB$ geschlagenen Kreisen. Da im ersten Fall in das sphärische Dreieck ABD nur die Kreise mit den Mittelpunkten A, B und D hineingreifen, bilden diese Kreise eine dreifache Kreisunterdeckung. Im zweiten Fall wird dagegen das Dreieck ABD durch jeden der drei Kreise mit den Mittelpunkten A, B und D überdeckt. Deshalb bilden die Kreise eine dreifache Überdeckung.

Diese Kreisanordnungen lassen sich noch einfacher kennzeichnen. Wir ordnen jeder Ecke eines Ikosaeders $\{3, 5\}$ das durch die benachbarten Ecken bestimmte sphärische Fünfeck zu [6]. Diese zwölf Fünfecke bilden das durch KEPLER entdeckte Sternmosaik $\{5, 5/2\}$. Es handelt sich um die Flächeninkreise und Flächenumkreise dieses Mosaiks.

Wir berechnen jetzt die entsprechenden reduzierten Dichten d und D . Da im sphärischen Dreieck ABC die Winkel bei A, B und C $36^\circ, 72^\circ$ und 90° sind, haben wir

$$\cos b = \frac{\cos 72^\circ}{\sin 36^\circ}, \quad \cos c = \frac{\operatorname{ctg} 72^\circ}{\operatorname{tg} 36^\circ}.$$

Hieraus ergibt sich

$$d = \frac{12}{3} \frac{2\pi(1 - \cos b)}{4\pi} = 2 \left(1 - \frac{\cos 72^\circ}{\sin 36^\circ}\right) = 0,9485\dots$$

und

$$D = \frac{12}{3} \frac{2\pi(1 - \cos c)}{4\pi} = 2 \left(1 - \frac{\operatorname{ctg} 72^\circ}{\operatorname{tg} 36^\circ}\right) = 1,1055\dots$$

Diese Werte zeigen, dass unsere Kreisanordnungen dichter bzw. dünner sind als die uns bekannten dreifachen ebenen Kreissysteme.

Für grössere Werte von k erhalten wir ziemlich günstige Anordnungen auf folgende triviale Weise. Wir betrachten auf einem Grosskreis $2k + 1$ äquidistante Punkte und schlagen um jeden Punkt einen Kreis vom Radius $\pi k / (2k + 1)$. Für die reduzierte Dichte d_k der so konstruierten k -fachen Kreisunterdeckung ergibt sich

$$d_k = \frac{2k+1}{k} \frac{2\pi \left(1 - \cos \frac{\pi k}{2k+1}\right)}{4\pi} = \frac{2k+1}{2k} \left(1 - \sin \frac{\pi}{4k+2}\right).$$

Wir betrachten ferner k Paare antipodischer Halbkugeln und eine weitere beliebige Halbkugel. Es entsteht eine k -fache Kreisüberdeckung mit einer reduzierten Dichte

$$D_k = \frac{2k+1}{2k}.$$

L. FEJES TÓTH, Budapest

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. J. BLUNDON, *Multiple coverings of the plane by circles*. Mathematika 4, 7–16 (1957).
- [2] W. J. BLUNDON, *Multiple packing of circles in the plane*. J. London Math. Soc. 38, 176–182 (1963).
- [3] W. J. BLUNDON, Note on a paper of HEPPE. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 14, 317 (1963).
- [4] W. J. BLUNDON, Some lower bounds for density of multiple packing. Canad. Math. Bull. 7, 565–572 (1964).
- [5] L. DANZER, *Drei Beispiele zu Lagerungsproblemen*. Archiv Math. 11, 159–165 (1960).
- [6] L. FEJES TÓTH, *Reguläre Figuren*. Budapest-Leipzig 1965.
- [7] A. HEPPE, *Über mehrfache Kreislagerungen*. El. Math. 10, 125–127 (1955).
- [8] A. HEPPE, *Mehrzahl gitterförmige Kreislagerungen in der Ebene*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 10, 141–148 (1959).
- [9] C. A. ROGERS, *Packing and covering*, Cambridge 1964.

Eine Bemerkung zum Artikel: Wissenswertes um das Dreieck

(BERNSTEIN und STEINIG, El. Math. 19, 8–10 (1964))

In dem obengenannten Artikel haben BERNSTEIN und STEINIG zwei Gruppen von Ungleichungen bewiesen. Dabei benutzten sie Beziehungen zwischen den Radien des Umkreises und Inkreises und verwandte Längen. Ich möchte hiermit einen Beweis mitteilen, der die erste Gruppe dieser Ungleichungen mit den einfachsten elementaren Mitteln beweist und eine Möglichkeit zu anderen ähnlichen Resultaten bietet. Dabei scheint dieser Beweis nichts zur zweiten Gruppe von Ungleichungen beizutragen.

Wie BERNSTEIN und STEINIG es getan haben, beschränken wir uns auf das spitzwinklige Dreieck ABC . Es bezeichne durchwegs $\not A$ den grössten, $\not C$ den kleinsten Winkel, und ΣQ die Summe der Abstände eines beliebigen Punktes Q von den drei Dreiecksseiten. Wie gewöhnlich bedeuten O, I, S, H den Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt, Schwerpunkt und Höhenschnittpunkt. Dann ist zu beweisen, dass

$$\Sigma H \leq \Sigma I \leq \Sigma S \leq \Sigma O,$$

wobei Gleichheit durchwegs nur für das gleichseitige Dreieck gilt.

Der Beweis beruht auf zwei Tatsachen:

I. Die betreffenden Geraden, aus einer Ecke des spitzwinkligen Dreiecks gezeichnet, haben stets folgende Reihenfolge: kürzere Seite, Höhe, Winkelhalbierende, Schwerlinie, Umkreisradius, längere Seite. Dies ist wohlbekannt und der Beweis ganz elementar.

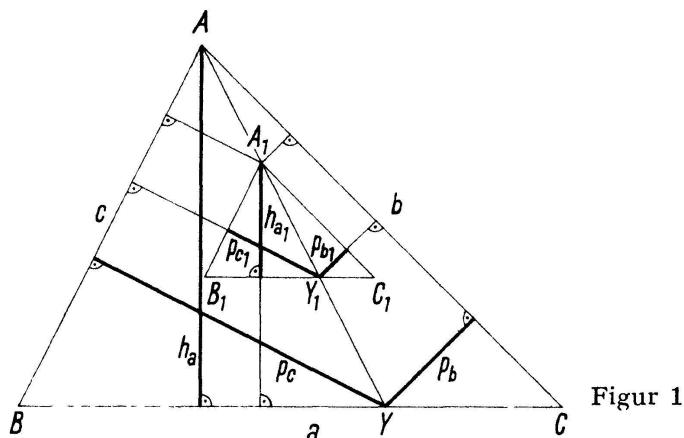
II. Der Punkt P soll eine Gerade XY beschreiben, wo X ein beliebiger Punkt auf der kürzesten Dreiecksseite AB und Y ein beliebiger Punkt auf der längsten Dreiecksseite BC bedeutet. Läuft der Punkt nun von X nach Y , so nimmt ΣP ständig zu.

Zum Beweis betrachten wir zuerst den speziellen Fall, wenn X in die Ecke A fällt. Bezeichnen wir die zwei Senkrechten von Y zu den Seiten AB , AC mit p_c , p_b und die Höhe von der Ecke A mit h_a , dann ist

und folglich

$$a h_a = c p_c + b p_b \leq a (p_c + p_b)$$

$$h_a \leq p_c + p_b . \quad (1)$$



Figur 1

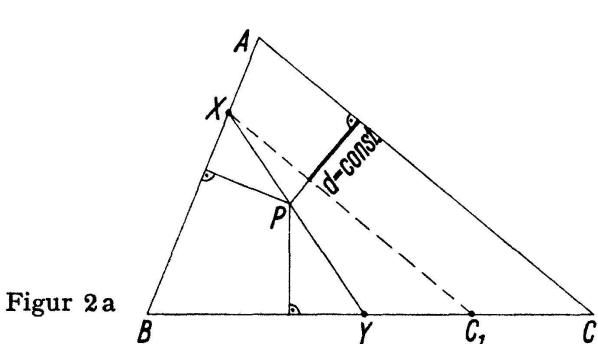
Es seien nun A_1 , Y_1 irgend zwei Punkte auf der Geraden AY . Wir zeichnen ein zum Dreieck ABC ähnliches und ähnlich gelegenes Dreieck $A_1B_1C_1$, so dass A_1 dem Punkte A , Y_1 dem Punkte Y entspricht, dann ist, wie aus Figur 1 ersichtlich, nach (1)

$$\sum Y_1 - \sum A_1 = p_{c_1} + p_{b_1} - h_{a_1} \geq 0 .$$

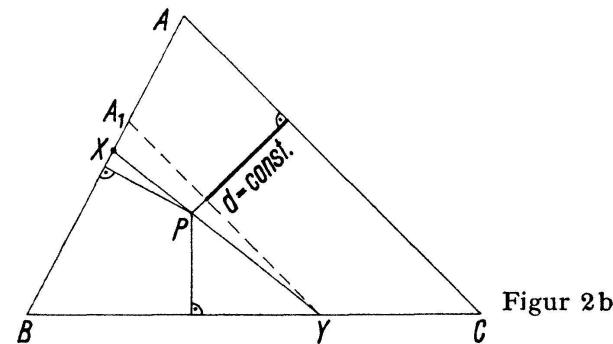
Damit wächst die Abstandsumme ständig wenn der Punkt sich von der Ecke zur längsten Seite hin bewegt.

Auf ähnliche Weise kann man beweisen, dass auf der Geraden CX , wo X ein Punkt auf der kürzesten Seite ist, die Abstandsumme ständig abnimmt, wenn der Punkt sich von C nach X bewegt.

Aus dem Bewiesenen folgt leicht, dass auf der allgemeinen Geraden XY die Abstandsumme zunimmt, wenn der Punkt sich von X nach Y bewegt. Die Figuren 2a und 2b sollen den Beweis für die zwei verschiedenen möglichen Lagen der Geraden andeuten.



Figur 2a



Figur 2b

Die drei Punkte H , S , O liegen, in dieser Reihenfolge, auf der Eulerschen Geraden. Betrachtet man die Reihenfolge der Verbindungslien mit der Ecke A bzw. C , dann ist mit Hilfe von I leicht zu sehen, dass die Schnittpunkte der Eulerschen Geraden mit dem Dreieck auf der kürzesten und längsten Seite liegen. Damit sind, nach II, die Ungleichungen

$$\Sigma H \leq \Sigma S \leq \Sigma O$$

bewiesen. Um auch ΣI einzureihen, könnten wir leicht zeigen, dass auch die Geraden HI und IS die obige Eigenschaft besitzen. Es ist aber auskunftsreicher, hier einen Satz von PRIMROSE [1] über die Abstandsummen anzuwenden. PRIMROSE hat bewiesen, dass alle Punkte, die gleiche Abstandsummen von den drei Dreiecksseiten aufzeigen, auf einer

Geraden liegen, die senkrecht zur Geraden OI ist. Wie oben, lässt sich leicht einsehen, dass OI das Dreieck in zwei Punkten, X und Y , schneidet, die auf der kürzesten, bzw. auf der längsten Seite sich befinden. Bewegt sich nun der Punkt P in irgendeiner Weise so, dass seine senkrechte Projektion auf OI sich von X nach Y bewegt, so folgt nach PRIMROSE, dass die Abstandsumme sich ständig vergrößert. Die Punkte H, I, S, O reihen sich nun ganz unmittelbar in der gewünschten Reihenfolge ein.

Offenbar könnten wir andere bemerkenswerte Punkte in diese Ungleichungen einreihen. Insbesondere liegt auch F , der Mittelpunkt des Feuerbachkreises, auf der Euler-schen Geraden. Unmittelbar ergibt sich

$$\Sigma H < \Sigma F < \Sigma S.$$

Allgemein kann man aber nichts über die Größenbeziehung von ΣI und ΣF aussagen. Nimmt man nämlich ein gleichschenkliges Dreieck ($AB = AC$), dann liegen alle unsere Punkte auf der Höhe zur Seite BC . Die Reihenfolge hängt aber von der Größe des Winkels A ab. Man findet durch elementare Betrachtungen, dass für $\not A > 60^\circ$ (BC die längste Seite) die Punkte sich in der Reihenfolge A, H, F, I, S, O befinden. Ist aber $\not A < 60^\circ$ (BC die kürzeste Seite), dann ist die Reihenfolge A, O, S, F, I, H . Also gilt $\Sigma F < \Sigma I$ für $\not A > 60^\circ$ und $\Sigma F > \Sigma I$ für $\not A < 60^\circ$. Dabei bleibt die Frage, welche Faktoren im allgemeinen Dreieck die Größenbeziehung von ΣF und ΣI bestimmen, unbeantwortet.

ESTHER SZEKERES, University of Sydney, Sydney, Australien

LITERATUR

- [1] E. J. F. PRIMROSE, *A Triangle Property*, Math. Gazette 45, note 2967 (1961).

Integration of Multiple – Valued Functions by Residues

Elementary texts on complex variable theory usually include, as illustrations of the evaluation of real integrals by residues, integrals of the type $\int_0^\infty x^\alpha f(x) dx$ where α is a suitably restricted real number. The contour required in this evaluation (Figure 1) consists of a cut along the real axis and circles of radii r and R . The purpose of this note is to point out that if $f(z)$ is restricted to be a function of x^n ($n =$ positive integer ≥ 2) the contour of Figure 1 can be replaced by a wedge bounded by the rays $\theta = 0$, $\theta = 2\pi/n$ and arcs C_r, C_R of circles of radii r and R (Figure 2). Thus it is not necessary to consider all the singular points of $f(z)$ but only those lying in this wedge. A particular case appears in a problem in CARTAN [1; p. 115, § 23 (ii)]¹⁾ where $f(x) = 1/(1+x^n)$.

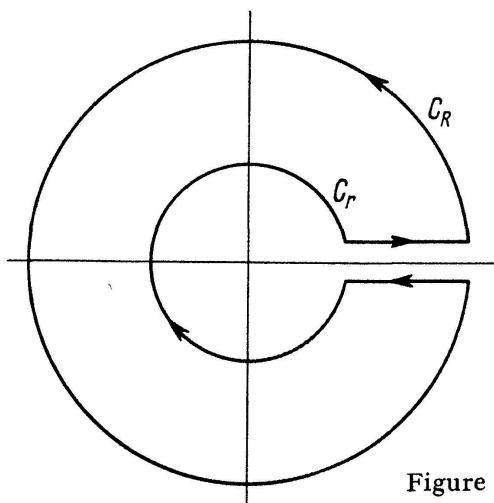


Figure 1

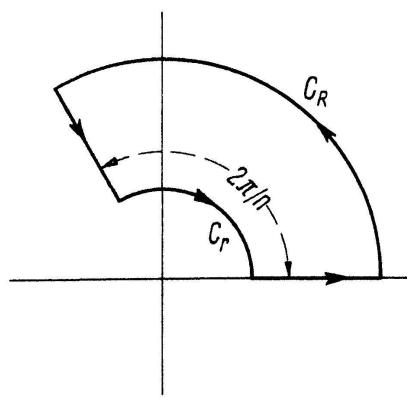


Figure 2

¹⁾ Numbers in brackets refer to References, page 39.

More precisely we have the following theorem, which paraphrases the standard case as stated in PENNISI [2; p. 268].

Theorem. Let f be a function satisfying the following conditions:

- (i) f is a meromorphic function;
- (ii) f is a function of z^n : $f(z) = F(z^n)$, $n = \text{positive integer} \geq 2$;
- (iii) f has no poles on the positive real axis;
- (iv) $\lim_{z \rightarrow \infty} |z|^{\alpha+1} |f(z)| = 0$ and $\lim_{z \rightarrow 0} |z|^{\alpha+1} |f(z)| = 0$,

where α is a real number such that $\alpha + 1$ is not a multiple of n .

Then

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x) dx = -\frac{\pi e^{-\pi i(\alpha+1)/n}}{\sin(\pi(\alpha+1)/n)} S$$

where S is the sum of the residues at those poles of $z^\alpha f(z)$ which lie in the wedge $0 < \theta < 2\pi/n$.

A single-valued branch of the multiple-valued function z^α is taken by defining z^α as $\exp(\alpha \log z)$ where

$$\log z = \log|z| + i\theta, \quad \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi.$$

The ray θ_0 which produces a cut in the plane can be any ray lying outside the given wedge and need not be along the positive real axis.

With the above modifications the proof proceeds along the same lines as in PENNISI. We note in passing that (iii) and (ii) imply that f has no poles on the ray $\theta = 2\pi/n$.

Example

$$f(z) = \frac{1}{1+z^n}.$$

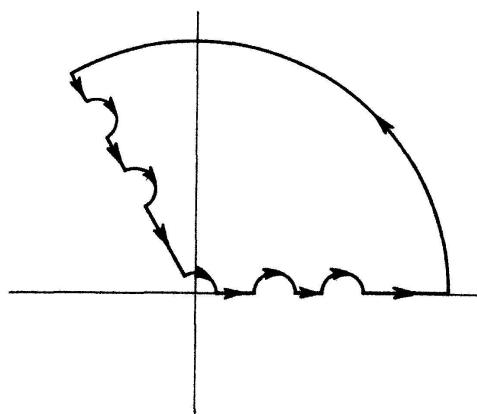
Condition (iv) implies that $0 < \alpha + 1 < n$. The function f has a pole within the wedge at $z = e^{\pi i/n}$ with residue $-n^{-1} e^{\pi i(\alpha+1)/n}$ so that by the theorem

$$\int_0^\infty x^\alpha \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi(\alpha+1)/n)}.$$

The extension to the case where f has simple poles on the positive real axis is immediate. Noting that f then also has simple poles on the ray $\theta = 2\pi/n$, and indenting the contour so that the poles on the bounding rays lie outside the contour (Figure 3) we obtain for the principal value of the integral

$$\text{P.V. } \int_0^\infty x^\alpha f(x) dx = -\frac{\pi e^{-i\pi(\alpha+1)/n}}{\sin(\pi(\alpha+1)/n)} \left(S + \frac{1}{2} S' \right)$$

where S is the sum of the residues at all the poles in the wedge $0 < \theta < 2\pi/n$ and S' is the sum of the residues at all the simple poles on the rays $\theta = 0, \theta = 2\pi/n$.



Figur 3

Remark. Since, for $n \geq 2$, $\alpha = 0$ is an admissible value the result of this note can be used for the evaluation of many integrals of the form $\int_0^\infty f(x) dx$. A discussion of integrals of this type using a contour similar to that in Figure 2 can be found in [3].

H. KAUFMAN and S. MELAMED, McGill University, Montreal

REFERENCES

- [1] H. CARTAN, *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables* (Addison-Wesley, 1963).
- [2] L. L. PENNISI, *Elements of Complex Variables* (Holt, Rinehart and Winston, 1963).
- [3] S. MELAMED and H. KAUFMAN, *Evaluation of Certain Improper Integrals by Residues*, (accepted for publication in American Mathematical Monthly.)

Aufgaben

Aufgabe 497. In einem Dreieck mit gegebenen Seiten a und b stehe die Verbindungsgerade von In- und Umkreismittelpunkt normal auf der Schwerlinie m_c . Man konstruiere das Dreieck.

F. LEUENBERGER, Küschnacht

1. Lösung: Die Dreiecksseite c ist das harmonische Mittel der Seiten a und b . Demnach ist c eindeutig aus a und b und somit das Dreieck eindeutig aus den drei Seiten konstruierbar¹⁾. Zum Nachweis obiger Eigenschaft von c seien die Ecken des Dreiecks durch die auf den Umkreismittelpunkt M bezogenen Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} dargestellt. Dann ist $\mathbf{m}_c = (\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c})/2$ und, wenn I der Inkreismittelpunkt ist, $\mathbf{MI} = (a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + c\mathbf{c})/(a + b + c)$. Aus der Bedingung $\mathbf{m}_c \perp \mathbf{MI}$ folgt

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c})(a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + c\mathbf{c}) = 0.$$

Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung von $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = r^2$ (r = Umkreisradius) und $\mathbf{a}\mathbf{b} = r^2 - c^2/2$ usw. die von r unabhängige Gleichung

$$c^2 + \frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}{a + b} c - 2ab = 0$$

mit der einzigen positiven Lösung $c = 2ab/(a + b)$ (die zweite Lösung $c = -(a + b)$ ist negativ).

O. REUTTER, Ochsenhausen

Eine ähnliche Lösung sandte W. JÄNICHEN (Berlin).

2nd Solution: Let h_a , h_b , h_c denote the triangle's altitudes. The median m_c passes through the triangle's center of gravity G , and the distances from G to the triangle's sides have the sum $(h_a + h_b + h_c)/3$.

Now it is known²⁾ that the locus of all points in a triangle whose distances from the three sides have the same sum is a line perpendicular to the line joining the triangle's incenter and circumcenter. Since m_c also passes through vertex C , we have $(h_a + h_b + h_c)/3 = h_c$, or equivalently

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Thus we can construct c and hence the required triangle.

J. STEINIG, Zürich

¹⁾ Determination: Ist etwa $a \leq b$, dann genügt c als harmonisches Mittel von a und b der Ungleichung $a \leq c \leq b$. Da zudem $a + c > b$ sein muss (Dreiecksungleichung), folgt $a > (\sqrt{2} - 1)b$ als notwendige Bedingung für die Konstruierbarkeit des Dreiecks.

²⁾ E. J. F. PRIMROSE, *A Triangle Property*, note 2967, Math. Gaz. 45, 231–232 (1961).