(XIV) *f ist auf mindestens einem Intervall endlich und messbar.*
(XV) *f hat auf mindestens einem Intervall eine endliche und messbare Majorante.*
(XVI) *f hat auf mindestens einer Menge positiven Masses eine endliche und messbare Majorante.*
(XVII) *f ist auf mindestens einer Menge positiven Masses einseitig beschränkt.*
(XVIII) *Auf mindestens einer Menge positiven Masses meiden die f-Werte ein offenes Intervall.*

Beweis: Es bestehen die folgenden Schlussketten: (X) $\Rightarrow$ (XI) $\Rightarrow$ (XII) $\Rightarrow$ (XVIII); (XIII) $\Rightarrow$ (XIV) $\Rightarrow$ (XV) $\Rightarrow$ (XVI) $\Rightarrow$ (XVII) $\Rightarrow$ (XVIII). Die meisten Schlüsse liegen auf der Hand[12]. Bezeichnet (III) die Stetigkeit von f auf P, so besagt Satz 2 die für H-Funktionen bestehende Implikation (XVIII) $\Rightarrow$ (III), womit das Hinreichen von (X) bis (XVIII) erwiesen ist. Mit der Bemerkung (III) $\Rightarrow$ (X), (III) $\Rightarrow$ (XIII) ergibt sich auch die Notwendigkeit. JÜRG RÄTZ, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

[1] J. ACZÉL, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen* (Birkhäuser Basel–Stuttgart 1961).
[2] M. BARNER, *Differential- und Integralrechnung I* (de Gruyter Berlin 1961).
[3] J. W. GREEN and W. GUSTIN, *Quasiconvex Sets*, Canadian J. Math. *2*, 489–507 (1950).
[4] G. HAMEL, *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung* $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Math. Ann. *60*, 459–462 (1905).
[5] O. HAUPT und G. AUMANN, *Differential- und Integralrechnung III* (de Gruyter Berlin 1938).
[6] I. P. NATANSON, *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen* (2. Aufl.), (Akademie-Verlag Berlin 1961).
[7] A. OSTROWSKI, *Mathematische Miszellen XIV: Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und verwandte Funktionalgleichungen*, Jahresber. Deutsche Math.-Ver. *38*, 54–62 (1929).
[8] J. RÄTZ, *Begründung und Charakterisierung der reellen Logarithmusfunktionen.* El. Math. *20*, 122–128 (1965).
[9] G. S. YOUNG, *The Linear Functional Equation*, Amer. Math. Monthly *65*, 37–38 (1958).

[12]) Für (XIII) $\Rightarrow$ (XIV) verweisen wir etwa auf [6], p. 145.

Kleine Mitteilungen

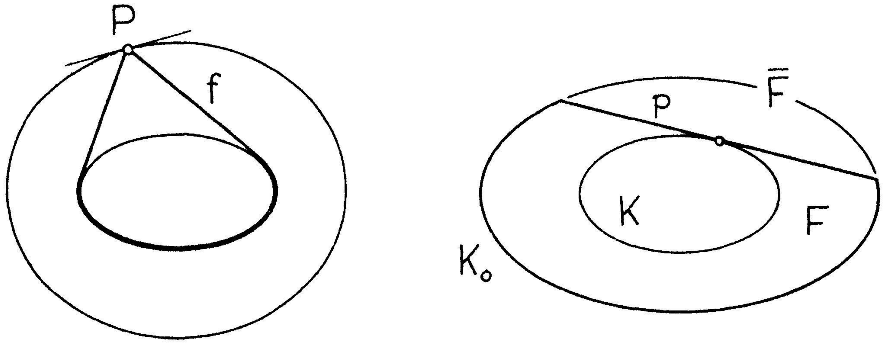
Über die Dualität bei der Konstruktion von Kegelschnitten

Der bekannten Fadenkonstruktion der Kegelschnitte aus den Brennpunkten steht in der nichteuklidischen Ebene dual die Konstruktion aus den Brennlinien gegenüber, wobei die Summe der Winkel, die eine Kegelschnittangente mit einem Brennlinienpaar bildet, konstant ist [1][1]). Wir wollen hier untersuchen, welche Konstruktion der allgemeineren Fadenkonstruktion von GRAVES [2] in der nichteuklidischen Ebene dual entspricht, und versuchen, die Betrachtungen in den Raum zu übertragen.

GRAVES hat gezeigt: *Schlingt man um eine Ellipse einen geschlossenen Faden f und spannt ihn über einen Punkt P, so ist P auf einer zur Ellipse konfokalen Ellipse beweglich.* Diese Konstruktion gilt auch in der nichteuklidischen Ebene [1].

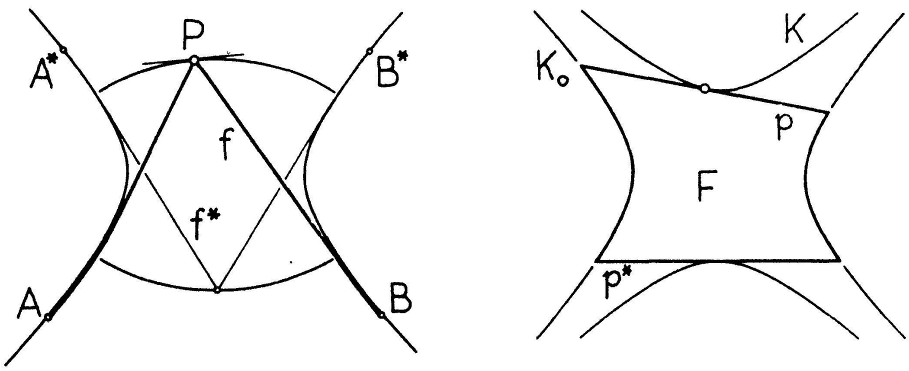
[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 15.
[2]) Die Überlegungen lassen sich aber auch in die hyperbolische Ebene übertragen, wenn man im Klein-Cayleyschen Modell die Fadenkonstruktion auch in das Äussere des absoluten Kegelschnittes ausdehnt.

Wir beschränken unsere Betrachtungen auf den elliptischen Fall[2]. Dual entsprechen den Punkten des Fadens die Stützgeraden eines Ellipsenabschnittes, einem Bogenelement des Fadens entspricht (bis auf einen Massfaktor) der Kontingenzwinkel der Stützgeraden und damit der festen Fadenlänge eine feste geodätische Gesamtkrümmung des Randes unseres Ellipsenabschnittes. Wenden wir hierauf den Satz von GAUSS-BONNET an, so folgt wegen der konstanten Krümmung der nichteuklidischen Ebene, dass der festen Länge des Fadens f dual ein fester Flächeninhalt des Ellipsenabschnittes F entspricht.



Figur 1

Den konfokalen Kegelschnitten, das sind solche, deren gemeinsame Tangenten isotrop sind, die also gemeinsame Brennpunkte haben, entsprechen dual homothetische Kegelschnitte, das sind solche, deren gemeinsame Punkte isotrop sind, die also gemeinsame Brennlinien haben.



Figur 2

Ganz ähnliche Überlegungen gelten, wenn man den Faden wie in der Figur 2 (links) am Kegelschnitt befestigt.

Um zur dualen Figur (rechts) zu gelangen, muss man zum zunächst nicht geschlossenen Faden f einen zweiten, festen Faden f^* hinzunehmen und von der Gesamtlänge die beiden Bogen AA^* und BB^* subtrahieren.

So folgt: *Schliessen eine feste Sehne p^* und eine bewegliche Sehne p eines Kegelschnittes K_0 mit diesem eine Fläche F festen Inhalts ein, so ist p bewegliche Tangente eines festen, zu K_0 homothetischen Kegelschnittes K.*

Da die beiden Fadenenden in P bekanntlich gleiche Winkel mit der Tangente bilden, wird die Sehne p vom Berührungspunkt mit K halbiert[3].

Bei einem Grenzübergang zur euklidischen Ebene bleibt der Satz erhalten [3]. Aus den homothetischen Kegelschnitten werden konzentrische, (im Sinne von CHASLES) ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte oder kongruente Parabeln gleicher Achse. Für den Fall, dass K_0 dazu in ein Geradenpaar zerfällt, hat man die schon ARCHIMEDES bekannte Konstruktion der Hyperbeltangenten [6].

Wir wollen beide Konstruktionen noch unter einem anderen Gesichtspunkt betrachten: In der Integralgeometrie [4] wird der Inhalt eines Flächenstückes F bestimmt durch die «Anzahl» oder das «Mass aller Punkte» von F, und der Umfang einer Eilinie f durch das

[3]) Damit kann ein einfacher Beweis unserer Konstruktion gegeben werden [2].

«Mass aller Geraden», die f treffen, wobei die «Dichte» der Punkte oder Geraden natürlich vom absoluten Kegelschnitt abhängt [5]. Beide Masse stehen sich dual gegenüber.

Wir beschränken uns auf Eilinien in der elliptischen Ebene. Allen Geraden, die die Eilinie f der Figur 1 treffen, entsprechen dual alle Punkte des Äusseren der dualen Figur. Gehen wir von der Konstruktion homothetischer Kegelschnitte aus, so ist mit dem Inhalt von F auch der endliche Inhalt des Äusseren $\bar{F}$ von F, also das Mass der Punkte von $\bar{F}$, damit das Mass der dualen Geraden, die f treffen, und somit die Länge von f fest.

Diese integralgeometrischen Überlegungen lassen sich in den nichteuklidischen Raum übertragen. Dort heissen zwei Quadriken konfokal, wenn sie die gleichen ∞^1 isotropen Tangentialebenen, und homothetisch, wenn sie die gleichen ∞^1 isotropen Punkte gemein haben. Es gilt die folgende Konstruktion homothetischer Quadriken:

Schneiden eine bewegliche Ebene ε und eine feste Ebene ε^* aus einer Quadrik Q_0 ein Stück vom festen Volumen V aus, so ist ε bewegliche Tangentialebene einer festen, zu Q_0 homothetischen Quadrik Q.

Dieser Satz, der im euklidischen Raum bei der Untersuchung schwimmender Flächen zweiter Ordnung Anwendung findet [3], ist auch im nichteuklidischen Raum leicht mit Hilfe der Tatsache zu beweisen, dass jede Sehne von Q_0, die gleichzeitig Tangente von Q ist, vom Berührungspunkt halbiert wird [1][4]).

Wir beschränken uns auch hier auf Eiflächen im elliptischen Raum, dann entspricht dem endlichen Mass der äusseren Punkte einer Eifläche das Mass der Ebenen, die die duale Eifläche treffen. Insbesondere entspricht einem Ellipsoidabschnitt dual der Kappenkörper eines Ellipsoides (vgl. Figur 1).

So folgt: *Ist M das Mass aller Ebenen, die die konvexe Hülle H eines Ellipsoides E_0 und eines im Äusseren von E_0 gelegenen Punktes P treffen, so ist bei festgehaltenem M der Punkt P auf einem festen, zu E_0 konfokalen Ellipsoid E beweglich.*

Führen wir auch hier den Grenzübergang zur euklidischen Metrik durch, so ist nach einem Ergebnis von CROFTON [4] das Mass M gleich dem Integral der mittleren Krümmung von H, und es folgt die bekannte Übertragung der Fadenkonstruktion der Kegelschnitte nach GRAVES auf Quadriken im Raum [6].

W. BÖHM, Technische Universität Berlin-Charlottenburg

LITERATUR

[1] J. L. COOLIDGE, *The Elements of Non-Euclidean Geometry*, p. 86 und 142–168 (Oxford 1908).

[2] CH. GRAVES, *Two Geometrical Memoirs*, p. 77 (Dublin 1841).

[3] A. G. GREENHILL, *A Treatise on Hydrostatics*, p. 189 ff. (London 1894).

[4] W. BLASCHKE, *Integralgeometrie I, II*, p. 5, 11, 64, 72 (New York 1949).

[5] A. MÜLLER, *Integralgeometrie 16: Dichten linearer Mannigfaltigkeiten*, Math. Z. *42*, 101–124, insb. 107 (1936).

[6] W. BLASCHKE, *Analytische Geometrie*, p. 128, 150 (Basel–Stuttgart 1954).

A Theorem concerning SODDY-Circles

1. Introduction. Let Γ_0 be the inscribed circle (center J_0) of $\Delta A_1 A_2 A_3$. We denote by Γ_k $(k = 1, 2, 3)$ the escribed circle (center J_k) touching $A_l A_m$ *between* A_l and A_m, klm being a permutation of the indices 1, 2, 3. The point of contact of Γ_j with $A_l A_m$ will be denoted by A_{jk} $(j = 0, 1, 2, 3)$. It is well known that the three lines $A_k A_{jk}$ $(k = 1, 2, 3)$ have a common point of intersection L_j. There are three circles Γ_{j1}, Γ_{j2}, Γ_{j3} orthogonal to Γ_j and having A_1, A_2, A_3 as their centers respectively. Moreover there exist *two* circles σ_j and σ'_j touching the triplet $(\Gamma_{j1}, \Gamma_{j2}, \Gamma_{j3})$; these two circles form a pair of SODDY-*circles* [1][1]); evidently there are four of these pairs.

---

[4]) Damit lassen sich etwa für eine sehr kleine Bewegung von ε leicht gleich grosse Volumenelemente verschiedenen Vorzeichens, die sich gegenseitig aufheben, angeben.

[1]) Numbers in brackets refer to References, page 16.

Let S_j and S'_j be the centers of σ_j and σ'_j respectively. In the present note we want to make some remarks concerning the following theorem proved by A. VANDEGHEN [2]: *The four lines $S_j S'_j$ ($j = 0, 1, 2, 3$) are concurrent their common point of intersection being the reflection L of the orthocenter H of $\Delta\ A_1 A_2 A_3$ with respect to the circumcenter O of this triangle.*

It is easy to prove

Theorem 1. The two centers of similitude of the pair (σ_j, σ'_j) are J_j and L_j.

The theorem of VANDEGHEN is now clearly equivalent to

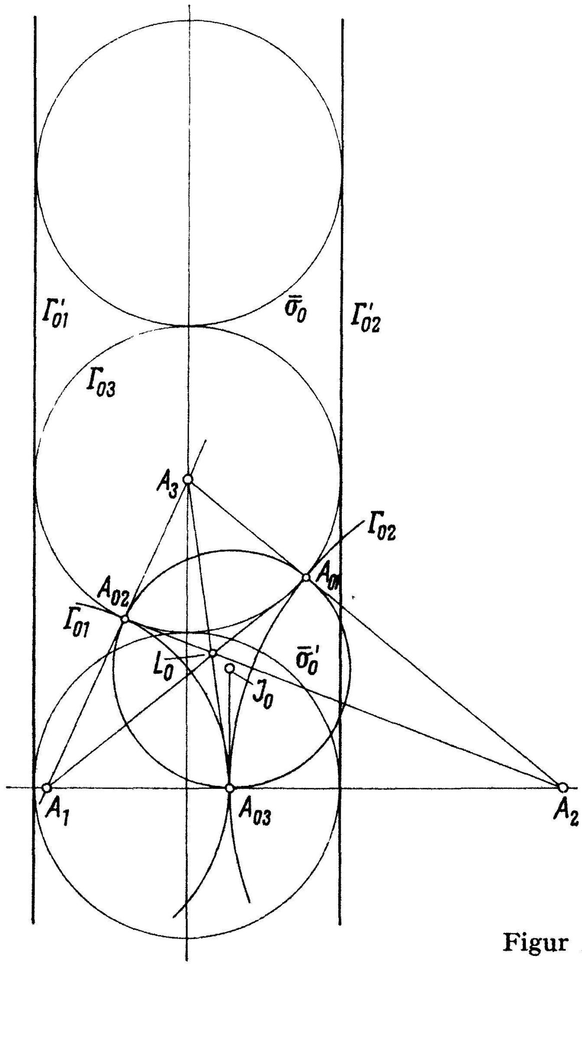
Theorem 2. The four lines $J_j L_j$ ($j = 0, 1, 2, 3$) are concurrent their common point L being the reflection of H with respect to O.

It may be pointed out that this theorem is not new; it was already known to E. LEMOINE [3]. In § 3 we give a geometrical proof (believed to be new) of this theorem.

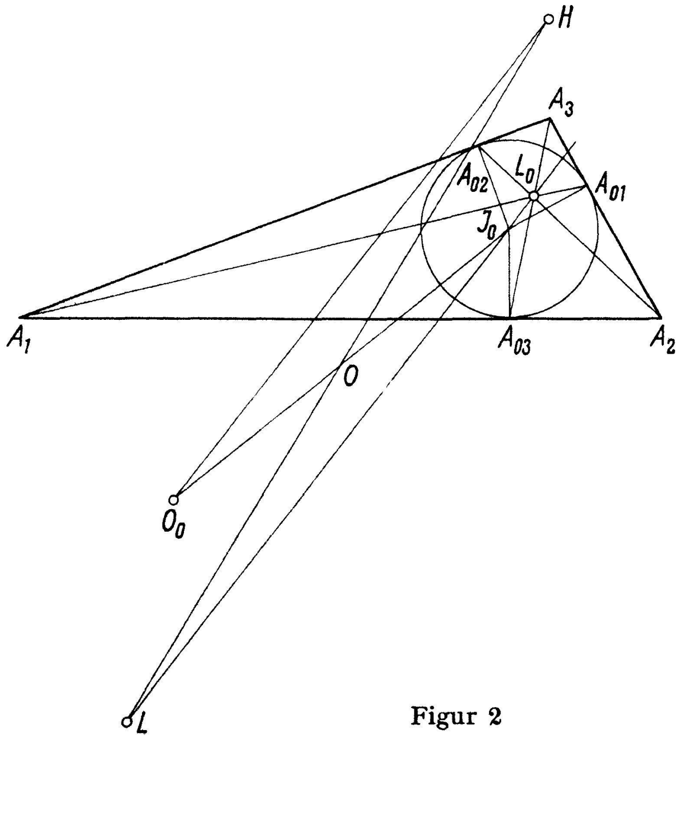
2. Proof of Theorem 1 (Fig. 1; $j = 0$, $k = 3$). The inversion which has A_{jk} as its center and lets Γ_{jk} invariant transforms Γ_{jl} and Γ_{jm} into the tangent-lines Γ'_{jl} and Γ'_{jm} to Γ_{jk} perpendicular to $A_l A_m$. The circles σ_j and σ'_j are therefore transformed into two equal circles $\bar{\sigma}_j$ and $\bar{\sigma}'_j$ each of which is tangent to Γ_{jk}, Γ'_{jl} and Γ'_{jm}. The centers of similitude of the pair $(\bar{\sigma}_j, \bar{\sigma}'_j)$ are A_k and the point at infinity of the line through A_k perpendicular to $A_l A_m$. This leads to the conclusion that the centers of similitude of the pair (σ_j, σ'_j) are on the lines $A_{jk} A_k$ and $A_{jk} J_j$ ($k = 1, 2, 3$) and so theorem 1 is proved.

Remark. Additionnally we have proved in this way that the lines $A_k A_{jk}$ ($k = 1, 2, 3$) have in fact a point L_j in common.

3. Proof of Theorem 2 (Fig. 2; $j = 0$). In this section we make use of the fact that the line joining the isodynamic points (the *isodynamic join* for short) of a triangle contains the orthocentre of the pedal triangle (of the orthocentre) of the given triangle. Clearly L_j is the LEMOINE-point of $\Delta\ A_{j1} A_{j2} A_{j3}$. Theorem 2 is therefore equivalent to the assertion



Figur 1



Figur 2

that LJ_j is the isodynamic join of $\Delta\, A_{j_1}A_{j_2}A_{j_3}$ or, somewhat more sophisticated, that LJ_j is parallel to this isodynamic join. To establish this fact we observe that J_j is the orthocenter of $\Delta\, J_k J_l J_m$, $jklm$ being a permutation of the indices 0, 1, 2, 3, whereas $\Delta\, A_1A_2A_3$ is the pedal triangle of J_j with respect to $\Delta\, J_k J_l J_m$. Moreover the triangles $J_k J_l J_m$ and $A_{j_1}A_{j_2}A_{j_3}$ are homothetic. Their isodynamic joins are therefore parallel. Denoting by O_j the circumcenter of $\Delta\, J_k J_l J_m$ we see by the above theorem that O_jH is the isodynamic join of $\Delta\, J_k J_l J_m$. As O_j is the reflection of J_j with respect to O, we have $LJ_j \parallel O_jH$, which proves the assertion.

G. R. VELDKAMP, Technological University Eindhoven, Netherlands

REFERENCES

[1] COXETER, H. S. M., *Introduction to Geometry*, p. 13–16. New York–London 1961.
[2] Amer. Math. Monthly, vol. *71*, 176 (1964).
[3] Mathesis, p. 88, 1890.

Aufgaben

Aufgabe 493. Es seien $f(t)$, $g(t)$ zwei stetige periodische Funktionen mit der Periode $2\,\pi$, deren erste Fourier-Koeffizienten verschwinden:

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{2\pi} g(t)\cos t\,dt = \int_0^{2\pi} g(t)\sin t\,dt = 0\,.$$

Ausserdem sei $g(t) > 0$. Dann hat $f(t)/g(t)$ wenigstens vier Extrema in $0 \leqq t < 2\,\pi$.

Dieser Satz enthält alle bekannten Sätze aus der Verwandtschaft des Vierscheitelsatzes. Man beweise ihn und finde neue Anwendungen.

H. GUGGENHEIMER, Minneapolis (USA)

Lösung des Aufgabenstellers: 1. Eine stetige Funktion ist dann und nur dann der Krümmungsradius eines C^2-Ovals als Funktion des Stützwinkels t (Winkel zwischen x-Achse und orientierter Tangente), wenn sie die Bedingungen für $g(t)$ erfüllt. In diesem Fall ist nämlich, wenn s die Bogenlänge und $\boldsymbol{x}(s)$ die Vektorgleichung bedeutet,

$$\boldsymbol{x}(2\,\pi) - \boldsymbol{x}(0) = \oint d\boldsymbol{x} = \oint \boldsymbol{x}'\,ds \equiv \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} g(t)\,dt = 0\,.$$

Die Kurve $\boldsymbol{x}(s)$ ist lokal konvex, sternförmig und geschlossen, also einfach geschlossen und (z.B. nach Satz 1, p. 115 in STRUBECKER, *Differentialgeometrie I*, 3. Aufl. Sammlung Göschen 1113/1113a) konvex.

2. Der behauptete Satz folgt nun nach dem HERGLOTZschen (indirekten) Beweis des Vierscheitelsatzes (l.c. p. 119). Wir nehmen an, dass $d(f/g)$ nur zwei Nullstellen besitze, die den Punkten A, B auf $\boldsymbol{x}(s)$ entsprechen. $h(x, y) \equiv a\,x + b\,y + c = 0$ sei die Verbindungsgerade von A und B. $h(x, y)\; d(f/g)$ hat dann in allen von A und B verschiedenen Punkten dasselbe Vorzeichen. Andererseits ist

$$\int_0^{2\pi} d(f/g) = 0 \text{ und} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{x}\; d(f/g) = -\int_0^{2\pi} f\,g^{-1}\,\boldsymbol{x}'\,ds = -\int_0^{2\pi} f(t) \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} dt = 0\,.$$

Man erhält also den Widerspruch

$$\int_0^{2\pi} (a\,x + b\,y + c)\; d(f/g) = 0\,.$$