Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 21 (1966)
Heft: 1

Artikel: Über Kegelschnitte mit gemeinsamem Krümmungselement
Autor: Hoschek, J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-24644

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

IV. Beispiel

Nach [6] ist im Ring G_2 der ganzzahligen quadratischen Matrizen der Ordnung 2

$$\alpha^* = \begin{pmatrix} 0 & 2rt \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^* = \begin{pmatrix} 0 & r^2 - t^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^* = \begin{pmatrix} 0 & r^2 + t^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit ganzzahligem r und t ein nichttriviales Lösungstripel für den Exponenten $n = 4$. Nach den obigen Überlegungen ist dann

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2rt \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & r^2 - t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & r^2 + t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ein nichttriviales Lösungstripel von (1) für $n = 2^3 = 8$ im Ring G_4 der ganzzahligen quadratischen Matrizen der Ordnung 4. Das kann man übrigens auch direkt durch Nachrechnung verifizieren.

R. Z. DOMIATY, Graz

LITERATUR

[1] A. AIGNER, *Über die Möglichkeit von $x^4 + y^4 = z^4$ in quadratischen Körpern.* Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. *43*, Heft 9/12, S. 226–229 (1934).

[2] A. AIGNER, *Weitere Ergebnisse über $x^3 + y^3 = z^3$ in quadratischen Körpern.* Monatsh. f. Math. *56*, 3. Heft, S. 240–252 (1952).

[3] A. AIGNER, *Ein zweiter Fall der Unmöglichkeit von $x^3 + y^3 = z^3$ in quadratischen Körpern mit durch 3 teilbarer Klassenzahl.* Monatsh. f. Math. *56*, 4. Heft, S. 335–338 (1952).

[4] A. AIGNER, *Die kubische Fermatgleichung in quadratischen Körpern.* J. f. reine u. angew. Math. *195*, Heft 1/2, S. 3–17 (1956).

[5] A. AIGNER, *Die Unmöglichkeit von $x^6 + y^6 = z^6$ und $x^9 + y^9 = z^9$ in quadratischen Körpern.* Monatsh. f. Math. *61*, Heft 2, S. 147–150 (1957).

[6] R. Z. DOMIATY, *Solutions of $x^4 + y^4 = z^4$ in 2×2 Integral Matrices* (Erscheint im American Mathematical Monthly).

Über Kegelschnitte mit gemeinsamem Krümmungselement

F. LAURENTI hat in zwei Untersuchungen [2][1]), [3] gezeigt, dass die Achsen von Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement eine *Steiner-Zykloide* einhüllen. W. KICKINGER [1] hat dem analytischen Beweis von LAURENTI einen synthetischen gegenübergestellt und ausserdem noch nachgewiesen, dass sich die Brennpunkte von Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement auf Kreisen bewegen. In der vorliegenden Untersuchung sollen die gleichen Fragen für allgemeine Kegelschnitte g (*Ellipsen und Hyperbeln*) diskutiert werden.

Es sei K der Krümmungsmittelpunkt eines beliebigen Punktes P des Kegelschnitts g und t die Kurventangente in P. Wir wählen ein kartesisches Bezugskreuz so, dass t mit der x-Achse und P mit O zusammenfallen, wodurch K im Abstand R von O

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 10.

auf die y-Achse zu liegen kommt. Der Krümmungsradius einer Kurve $y = f(x)$ in O ist daher durch

$$R = \frac{1}{y''} \tag{1}$$

bestimmt.

Wir gehen von der Gleichung eines Kegelschnitts g in der Form

$$\lambda^2 \xi^2 + \eta^2 = 2\, p\, \xi \qquad (\lambda^2,\ p = \text{const}) \tag{2}$$

aus. Dabei treten für $\lambda^2 \neq 1$, $\lambda^2 > 0$ Ellipsen, für $\lambda^2 = 0$ Parabeln, für $\lambda^2 < 0$ Hyperbeln und für $\lambda^2 = 1$ Kreise auf. Durch die Transformation

$$\xi = x \cos\alpha + y \sin\alpha + C_1\,, \qquad \eta = -x \sin\alpha + y \cos\alpha + C_2 \tag{3}$$

wird (2) in eine allgemeine Kegelschnittgleichung verwandelt. Die Konstanten C_1 und C_2 in der Transformation (3) sind durch die Bedingungen

$$y = 0 \text{ für } x = 0\,, \qquad y' = 0 \text{ für } x = y = 0\,, \qquad y'' = \frac{1}{R} \text{ für } y' = x = y = 0 \tag{4}$$

bestimmt, so dass die Gleichung von g mit (3) und den Bedingungen (4) die Form annimmt

$$\lambda^2 (x \cos\alpha + y \sin\alpha)^2 + (x \sin\alpha - y \cos\alpha)^2 = 2\, R\, y\, (\lambda^2 \cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\,, \tag{5}$$

wobei R der Krümmungsradius ist und α der Winkel zwischen einer Hauptachse von g und der x-Achse. λ^2 entspricht dem Achsenverhältnis.

Der Mittelpunkt von g hat die Koordinaten

$$x = \frac{R}{\lambda^2} (1 - \lambda^2) \frac{\sin 2\alpha}{2} (\lambda^2 \cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\,, \qquad y = \frac{R}{\lambda^2} (\lambda^2 \cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2\,, \tag{6}$$

so dass sich folgende Gleichungen der Kegelschnittachsen ergeben

$$a_1\colon \quad y \cos\alpha - x \sin\alpha = R \cos\alpha\, (\lambda^2 \cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\,, \tag{7a}$$

$$a_2\colon \quad y\, \lambda^2 \sin\alpha + x\, \lambda^2 \cos\alpha = R \sin\alpha\, (\lambda^2 \cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\,. \tag{7b}$$

Durch Differentiation der Gleichungen von a_1 und a_2 nach dem Parameter α sowie Elimination von x bzw. y erhalten wir als Gleichungen der Hüllkurven h_1 und h_2 von a_1 und a_2:

$$h_1\colon \quad \left.\begin{aligned} x &= -R\,(1 - \lambda^2) \left[\frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\sin 4\alpha}{4}\right] \\ y &= \frac{R}{4} (3\,\lambda^2 + 1) - R\,(1 - \lambda^2) \left[\frac{\cos 2\alpha}{2} - \frac{\cos 4\alpha}{4}\right], \end{aligned}\right\} \tag{8a}$$

$$h_2\colon \quad \left.\begin{aligned} x &= -R \left(\frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2}\right) \left[\frac{\sin 2\alpha}{2} - \frac{\sin 4\alpha}{4}\right] \\ y &= \frac{R}{4} \left(\frac{\lambda^2 + 3}{\lambda^2}\right) - R \left(\frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2}\right) \left[\frac{\cos 2\alpha}{2} + \frac{\cos 4\alpha}{4}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8b}$$

Beide Kurven sind wieder *Steiner-Zykloiden*, wobei jeweils eine Spitze im Krümmungszentrum K liegt (s. Abb. 1, 2). Als Erweiterung des Ergebnisses von LAURENTI ergibt sich daher folgender

Satz: Die Hüllkurven der Achsen von Ellipsen und Hyperbeln mit gemeinsamem Krümmungselement und konstantem Achsenverhältnis sind zwei Steiner-Zyklo-

iden. Sie haben die gemeinsame Hauptnormale der Kurvenschar zur Symmetrieachse, eine Spitze jeder Kurve liegt im gemeinsamen Krümmungszentrum.

Von Interesse sind auch die Ortskurven ausgezeichneter Punkte der betrachteten Kegelschnittscharen. Die Bahnkurve der Mittelpunkte der Kegelschnitte folgt aus Gleichung (6). Durch elementare Umformungen lässt sich (6) auf folgende Form bringen:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{R}{\lambda^2}\left[\left(\frac{3}{8}\lambda^4 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{3}{8}\right) + \frac{\lambda^4 - 1}{2}\cos 2\alpha + \frac{(1-\lambda^2)^2}{8}\cos 4\alpha\right] \\ x &= \frac{R}{\lambda^2}\left[-\frac{1-\lambda^4}{4}\sin 2\alpha - \frac{(1-\lambda^2)^2}{8}\sin 4\alpha\right]. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

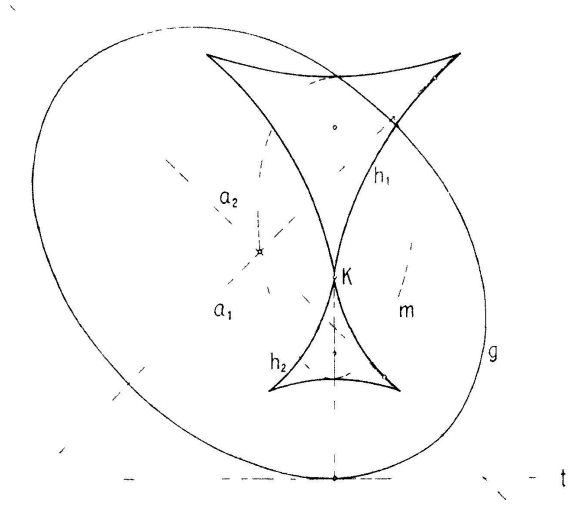

Abbildung 1
Ellipsen mit gemeinsamem Krümmungselement.

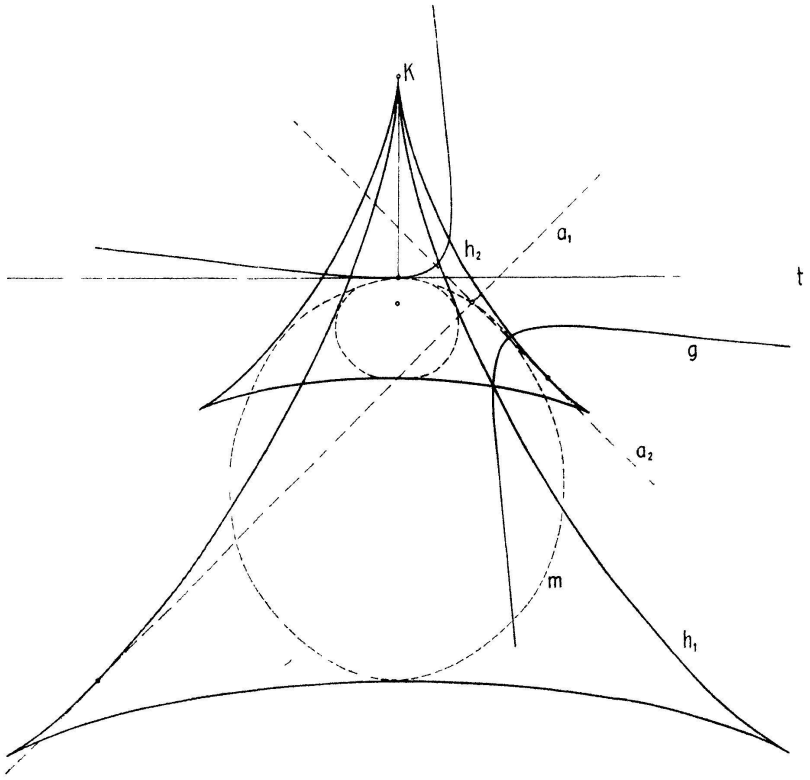

Abbildung 2
Hyperbeln mit gemeinsamem Krümmungselement.

Überträgt man (9) in die komplexe Schreibweise (vgl. [4]), so ergibt sich die Gleichung

$$\mathfrak{m} = i\,\frac{R}{\lambda^2}\left[\left(\frac{3}{8}\lambda^4 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{3}{8}\right) + \frac{3}{8}(\lambda^4 - 1)\,e^{2i\alpha} + \frac{\lambda^4 - 1}{8}\,e^{-2i\alpha} + \frac{(1-\lambda^2)^2}{8}\,e^{4i\alpha}\right]. \tag{9a}$$

Die Bahnkurve des Mittelpunktes der betrachteten Kegelschnittschar ist also eine *Radlinie 3. Stufe.*

Die Ortskurven der Brennpunkte und Scheitel der Scharkurven liegen allgemein nicht mehr auf Radlinien, da die Bestimmung der Hauptachsen der Scharkurven auf algebraische Formen führt.

Eine Ausnahme bildet lediglich der Fall $\lambda^2 = 0$, also Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement. Der Scheitel aller Scharkurven liegt dann auf einer *Radlinie 3. Stufe,* ausserdem bewegen sich alle Punkte der Parabelachsen, die vom jeweiligen Scheitel einen konstanten Abstand haben, auf *Radlinien 4. Stufe.* Ebenfalls *Radlinien 4. Stufe* sind die Bahnkurven aller der Punkte der Achsen von Hyperbeln und Ellipsen, die von den Mittelpunkten der Scharkurven konstanten Abstand haben.

In den beiden Abbildungen sind Ellipsen und Hyperbeln mit gemeinsamem Krümmungselement dargestellt. Als Achsenverhältnis wurde $\lambda^2 = \pm 2$, als Krümmungsradius $R = 2\,|\lambda^2|$ gewählt. Die eingezeichneten Scharkurven g entsprechen dem Parameterwert $\alpha = \pi/4$, a_1 und a_2 sind die jeweiligen Achsen, h_1 und h_2 die zugehörigen Hüllkurven. $\mathfrak{m}$ ist die Bahnkurve der Mittelpunkte der Scharkurven.

J. HOSCHEK, TH Darmstadt

LITERATURVERZEICHNIS

[1] W. KICKINGER, *Einfacher Beweis eines Satzes von* F. LAURENTI *über Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement,* El. Math. *18,* 28–29 (1963).
[2] F. LAURENTI, *Sopra una proprietà dell'ipocicloide tricuspidata,* Periodico Mat. IV. Ser. *38,* 155–158 (1960).
[3] F. LAURENTI, *Sopra una proprietà dell'ipocicloide tricuspidata,* Archimede *12,* 253–256 (1960).
[4] W. WUNDERLICH, *Höhere Radlinien,* Österr. Ing. Archiv *1,* 277–296 (1947).

Zur Theorie der Funktionalgleichung $f(xy) = f(x) + f(y)$

1. Einleitung. Eine auf der Menge $P = \{x \in R \mid x > 0\}$ erklärte reellwertige Lösung der Funktionalgleichung

$$f(x\,y) = f(x) + f(y) \qquad [f\colon P \to R] \tag{H}$$

nennen wir im folgenden eine *H-Funktion.* Im Hinblick auf die zentrale Problemstellung bei jeder Funktionalgleichung befassen wir uns hier mit der Frage, ob es ausser den Logarithmusfunktionen noch weitere H-Funktionen gebe. Diese Frage ist positiv zu beantworten (Korollar zu Satz 1). Ein weiteres Ziel dieser Note ist es, den bekanntesten Bedingungen, die die Logarithmusfunktionen unter allen H-Funktionen auszuzeichnen gestatten[1]), einige weitere grösstenteils scheinbar schwächere an die

[1]) Solche wurden in [8], Satz 6, zusammengestellt.