Kleine Mitteilung

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **20 (1965)**

Heft 6

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

dische Geometrie in der Kugelebene» befasst. Das von ihm benützte Axiomensystem weicht jedoch von dem in der vorliegenden Arbeit aufgestellten Axiomensystem in wesentlichen Punkten ab. Beim Aufbau der nichteuklidischen Geometrie in der Kugelebene selbst bedient sich DIECK verschiedentlich, wohl zur Abkürzung mancher Beweise, auch anschaulicher Vorstellungen aus der bekannten Kugelgeometrie. In der hier nun entwickelten Gestalt eignet sich die sphärisch-elliptische Geometrie durchaus für die Behandlung in speziellen Kursen (Arbeitsgemeinschaften) für mathematisch besonders interessierte Schüler der Oberstufe. Bei der Aufstellung des Axiomensystems wurde, wie bereits erwähnt, nicht darauf geachtet, unbedingt ein völlig unabhängiges System zu gewinnen, um den Aufbau der sphärisch-elliptischen Geometrie nicht zu kompliziert und unübersichtlich zu gestalten.

J. MALL, Weiden/BRD.

Kleine Mitteilung

Über eine Ungleichung von S. S. WAGNER

S. S. WAGNER kündigt in den Notices of the American Mathematical Society, vol. *12* (1965), p. 220 folgende Ungleichung an:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\Sigma a_i b_i + x \sum_{i \neq j} a_i b_j\right)^2 \leqq \left(\Sigma a_i^2 + 2x \sum_{i<j} a_i a_j\right)\left(\Sigma b_i^2 + 2x \sum_{i<j} b_i b_j\right)\\ &\qquad\qquad (a_i,\ b_i \ \text{reell},\quad 0 \leq x \leq 1)\,.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Für diese Ungleichung wird ein komplizierter Induktionsbeweis angedeutet, der anscheinend mehrere hundert einzelne Rechnungen erfordert. Doch lässt sich (1) auf folgende Weise ganz einfach beweisen:
Man forme die Ungleichung mittels der Identitäten

$$\sum_{i \neq j} a_i b_j = \Sigma a_i \Sigma b_i - \Sigma a_i b_i$$

$$2 \sum_{i<j} a_i a_j = (\Sigma a_i)^2 - \Sigma a_i^2$$

$$2 \sum_{i<j} b_i b_j = (\Sigma b_i)^2 - \Sigma b_i^2$$

um und setze dabei $1 - x = y$. Es gilt $x \geqq 0$, $y \geqq 0$.
Man erhält

$$[x\, \Sigma a_i\, \Sigma b_i + y\, \Sigma a_i b_i]^2 \leqq [x(\Sigma a_i)^2 + y\, \Sigma a_i^2]\, [x(\Sigma b_i)^2 + y\, \Sigma b_i^2]\,. \tag{2}$$

Ausmultipliziert ergibt das

$$x y\, [(\Sigma a_i)^2\, \Sigma b_j^2 + (\Sigma b_i)^2\, \Sigma a_j^2 - 2\, \Sigma a_i\, \Sigma b_i\, \Sigma a_j b_j] + y^2\, [\Sigma a_i^2\, \Sigma b_i^2 - (\Sigma a_i b_i)^2] \geqq 0\,. \tag{3}$$

Der Koeffizient von xy ist $\sum_j (b_j\, \Sigma a_i - a_j\, \Sigma b_i)^2$ und daher nicht negativ; der Koeffizient von y^2 ist nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ebenfalls nicht negativ. Da $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, ist damit die Ungleichung von WAGNER bewiesen.

P. FLOR, Wien