

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 20 (1965)  
**Heft:** 5  
  
**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Pareillement on obtient que  $q \mid M_p M_q - 1$ . On a donc  $p q \mid M_p M_q - 1$ . Or, on a

$$(2^p - 1)(2^q - 1) - 1 \equiv 2^q - 2 \pmod{p},$$

donc

$$p \mid 2^q - 2. \quad (2)$$

Pareillement on trouve

$$q \mid 2^p - 2. \quad (3)$$

Il n'est pas  $p = 2$ , puisqu'alors, d'après (3), on aurait  $q = 2$ , contrairement à l'hypothèse que  $q > p$ . Les formules (2) et (3) donnent donc  $p \mid 2^{q-1} - 1$  et  $q \mid 2^{p-1} - 1$  et, vu que (d'après le théorème de FERMAT)  $p \mid 2^{p-1} - 1$  et  $q \mid 2^{q-1} - 1$  et que  $q > p$ , on trouve

$$p q \mid 2^{p-1} - 1 \quad \text{et} \quad p q \mid 2^{q-1} - 1. \quad (4)$$

Vu l'égalité

$$2^{pq-1} - 1 = 2^{p(q-1)+p-1} - 1 = (2^{p(q-1)} - 1) 2^{p-1} + (2^{p-1} - 1)$$

on obtient de (4)  $p q \mid 2^{pq-1} - 1 \mid 2^{pq} - 2$ , ce qui prouve que le nombre  $p q$  est pseudopremier. Le théorème 1 est ainsi démontré.

*Démonstration* du théorème 2. Pour tout nombre premier  $p$ , tel que  $7 < p \neq 13$  il existe un nombre premier  $q > p$ , tel que le nombre  $p q$  est pseudopremier (voir [1]) et, en vertu du théorème 1, le nombre  $M_p M_q$  est pseudopremier. Si  $p = 2, 3, 5, 7$  ou  $13$ , il n'existe aucun nombre premier  $q$  pour lequel le nombre  $p q$  soit pseudopremier et, en vertu du théorème 1 il n'existe aucun nombre premier  $q$  pour lequel le nombre  $M_p M_q$  soit pseudopremier.

A. ROTKIEWICZ (Varsovie)

#### TRAVAIL CITÉ

- [1] A. ROTKIEWICZ, *Sur les nombres premiers  $p$  et  $q$  tels que  $p q \mid 2^{pq} - 2$* . Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 11, 280–282 (1962).

## Kleine Mitteilungen

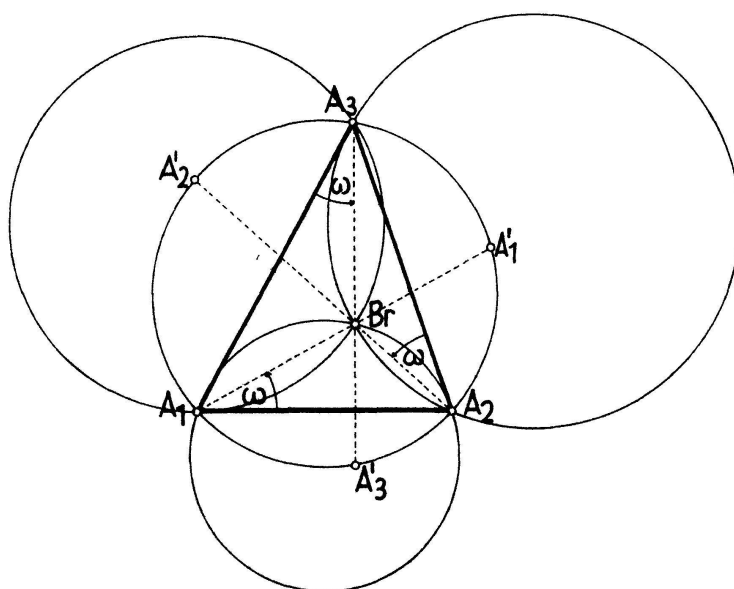
### Dreiblatt und Brocardsche Punkte

Trifolium, also Dreiblatt, heisst nach einem Vorschlag von Jos. E. HOFMANN die Figur von 3 Kreisen durch einen Punkt  $S$ , den Pol des Dreiblatts. Die Punkte  $A_1, A_2, A_3$ , in denen sich je 2 der 3 Kreise schneiden, heissen Ecken des Dreiblatts. Herr W. K. B. HOLZ, Ing. für Vermessungstechnik und Stadtarchivar in Hagen (Westfalen) hat zuerst die Frage nach den euklidischen Eigenschaften des Dreiblatts gestellt. In Math. Ann. 130, 46–86 (1955) habe ich unter anderem die von HOLZ vermuteten Kongruenzsätze des Dreiblatts bewiesen. Ich nannte in dieser Arbeit die Dreiblätter Inversdreiecke, weil ein Dreiblatt durch Inversion aus einem geradlinigen Dreieck hervorgeht. Nimmt man in der Tat den Einheitskreis  $|z| = 1$  einer Gausschen  $z$ -Ebene als Umkreis des Dreiblatts – das ist der Kreis durch die 3 Ecken – so führt

$$z' = \frac{S \bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{S}} \quad (1)$$

ein Dreieck mit den Ecken  $z' = A'_1, A'_2, A'_3$  in ein Dreiblatt mit den Ecken  $z = A_1, A_2, A_3$  über. Dabei geht  $|z| = 1$  in  $|z'| = 1$  über und stimmt die Abbildung (1) auf  $|z| = 1$  mit

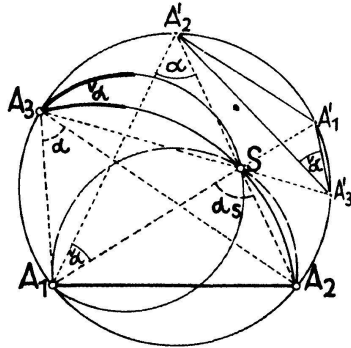
der Zentralprojektion aus  $S$  überein. Für  $|S| < 1$  geht  $|z| < 1$  in  $|z'| > 1$  über. Die Dreiecke  $A'_1, A'_2, A'_3$  und  $A_1, A_2, A_3$ , deren Ecken sich bei dieser Abbildung entsprechen, heissen Gegendreiecke. Da beide – bei  $|S| < 1$  – gleichsinnig orientiert sind, kann man fragen, für welche Lagen von  $S$  beide Dreiecke gleichsinnig kongruent sind. In einer nicht zur Veröffentlichung bestimmten Niederschrift hat Hr. HOLZ festgestellt, dass dies genau dann der Fall ist, wenn entweder  $S$  der Mittelpunkt des Umkreises ist oder wenn  $S$  mit einem der beiden gemeinsamen Brocardschen Punkte von Dreieck und Gegendreieck zusammenfällt. In der Tat gibt es drei Fälle gleichsinniger Kongruenz beider Dreiecke, je nachdem wie die beiden Eckentripel bei der Deckbewegung aufeinander fallen. Da überdies die beiden Dreiecke den Umkreis gemein haben, ist die Deckbewegung stets eine Drehung um den Mittelpunkt des Umkreises, das heisst um  $z = 0$ . Kommt zum Beispiel  $A'_1$  mit  $A_1$ ,  $A'_2$  mit  $A_2$ ,  $A'_3$  mit  $A_3$  nach der Drehung zur Deckung, so handelt es sich um die Spiegelung an  $z = 0$ . Das sieht man aus (1), wenn man die Bedingung  $A'_1/A_1 = A'_2/A_2 = A'_3/A_3$  anschreibt und diskutiert. Das führt nach kurzer Rechnung zu  $S = 0$  als notwendiger und hinreichender Bedingung für diese erste Art gleichsinniger Kongruenz von Dreieck und Gegendreieck. Analog kann man auch verfahren, wenn bei der Drehung  $A'_1$  in  $A_2$ ,  $A'_2$  in  $A_3$  und  $A'_3$  in  $A_1$  übergeht. Es ist aber bequemer, auf die folgende Figur 1 zu verweisen. Eine analoge Figur gibt auch im dritten, noch übrigen Fall gleichsinniger Kongruenz beider Dreiecke Auskunft. Zum Verständnis sei noch an folgende bekannten Tatsachen über Brocardsche Punkte erinnert. Man kann die beiden Brocardschen Punkte den beiden möglichen Orientierungen eines Dreiecks zuordnen. Ist es zum Beispiel durch die Eckenfolge  $A_1, A_2, A_3$  positiv orientiert – Inneres zur Linken des Umlaufs –, so erhält man den positiven Brocardschen Punkt, indem man die von den Ecken je im Sinn der Orientierung auslaufenden Seiten um den durch  $\operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{ctg} \alpha_3$  bestimmten Brocardschen Winkel  $\omega$  im positiven Sinn dreht. Die gedrehten Seiten gehen dann durch den positiven Brocardschen Punkt. In ihm schneiden sich auch die 3 Kreise, die je durch 2 Ecken  $A_k$  und  $A_{k+1}$  gehen und zudem in  $A_{k+1}$  die Seite  $a_k$  berühren. (Dabei ist  $A_{j+3} = A_j$  gesetzt.) Beachtet man dies, so liest man die Behauptung über die Rolle der Brocardschen Punkte für die gleichsinnige Kongruenz von Dreieck und Gegendreieck aus dieser Figur 1 und der der anderen Orientierung entsprechenden Figur ohne Mühe ab.



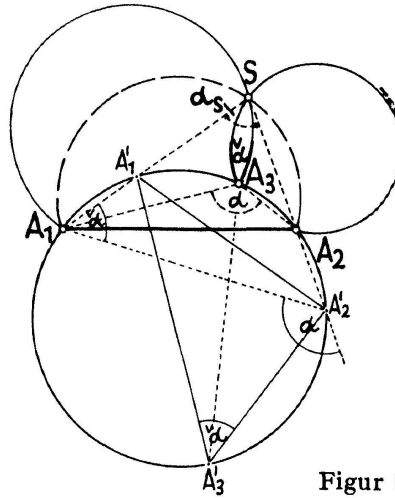
Figur 1

Hr. HOLZ hat in seiner erwähnten Niederschrift die Inversion (1) nicht benutzt, sondern sich ausschliesslich planimetrischer Schlüsse bedient. Dabei ist er noch zu einigen anderen Beziehungen zwischen Dreieck, Gegendreieck und Dreiblatt gelangt. Insbesondere ergibt sich aus der Tatsache, dass Dreiblatt und Gegendreieck nach (1) an entsprechenden Ecken – bis auf den Drehsinn – gleiche Winkel haben, durch mehrmalige Anwendung des

Peripheriewinkelsatzes der folgende schöne Satz von HOLZ: Alle diejenigen Dreiblätter haben an der Ecke  $A_3$  den gleichen Winkel, die in den Ecken  $A_1, A_2$  übereinstimmen, die den gleichen Umkreis haben, und deren Pol auf dem gleichen Kreis durch die Ecken  $A_1$  und  $A_2$  liegt.



Figur 2



Figur 3

Laut Figur 2 ( $|S| < 1$ ), bzw. Figur 3 ( $|S| > 1$ ), gilt für diesen Dreiblattwinkel bei  $A_3$ :

$$\forall \alpha = \alpha_S - \alpha, \quad \text{bzw.} \quad \forall \alpha = \alpha - \alpha_S.$$

Hr. HOLZ nennt diesen Satz Polrandwinkelsatz. Man könnte auch sagen Polperipheriewinkelsatz. Diese Benennung soll die Analogie zum Peripheriewinkelsatz der Planimetrie betonen. Letzterer erscheint, wenn  $S$  ins Unendliche rückt. Beim Holzschen Polrandwinkelsatz wird  $A_3$  mit  $A_1$  und  $A_2$  über den Pol  $S$  mit Kreisbogen verbunden. Die Winkelgleichheit bei  $A_3$  erscheint aber nicht nur wie beim Peripheriewinkelsatz für alle Lagen von  $A_3$  auf einem Kreis durch  $A_1$  und  $A_2$  sondern auch für alle Lagen des Pols  $S$  auf einem weiteren Kreis durch  $A_1$  und  $A_2$ .

Ist  $|S| > 1$ , so sind Dreieck und Gegendreieck spiegelbildlich kongruent für zwei nach einem oben angedeuteten rechnerischen Verfahren sich ergebende Lagen von  $S$ . Ein Zusammenhang dieser Punkte mit anderweit bekannten merkwürdigen Punkten des Dreiecks hat sich bisher nicht ergeben.

Hr. Holz fragt aber in seiner erwähnten Niederschrift weiter nach Verallgemeinerungen der Brocardschen Punkte. Man erhält seine Punkte, die ich im folgenden kurz Holzsche Punkte nennen will, wenn man um alle Ecken eines orientierten Dreiecks die jeweils im Sinn der Orientierung auslaufenden Seiten um absolut gleiche Winkel dreht, jedoch so, dass man um zwei Ecken im positiven Sinn, um die dritte (ausgezeichnete) Einzelecke aber im negativen Sinn dreht. Es wird gefragt, für welche Winkel die 3 gedrehten Seiten durch einen Punkt laufen. Hr. HOLZ hat durch eine elementargeometrische Stetigkeitsbetrachtung sich von der Existenz solcher Winkel überzeugt. Es leuchtet indessen ein, dass die Bestimmung der Holzschen Punkte eine Aufgabe dritten Grades ist. Hat man nämlich über die Orientierung und die Einzelecke verfügt, so ergeben sich die Holzschen Punkte als Schnitt eines Kreises mit einer gleichseitigen Hyperbel, wobei diese Kurven bereits eine Ecke des Dreiecks als Schnittpunkt gemein haben. Zur Ermittlung der Gleichung dritten Grades für die Drehwinkel der Holzschen Aufgabe gelangt man bequemer durch eine Betrachtung der analytischen Geometrie in der Gausschen Ebene. Ich schreibe statt der Ecken  $A_k, A_{k+1}, A_{k+2}$  kurz  $A, B, C$  und bezeichne mit diesen Buchstaben gleich auch die komplexen Koordinaten der 3 Ecken. Es wird nach Winkeln  $\eta$  gefragt, für die die 3 Geraden

$$z = A + e^{i\eta} t (B - A), \quad z = B + e^{i\eta} t (C - B), \quad z = C + e^{-i\eta} t (A - C)$$

durch einen Punkt gehen. Hier bedeutet jedes  $t$  einen reellen Parameter. Elimination der  $t$  führt zu 3 linearen Gleichungen für  $z$  und  $\bar{z}$  (Überstreichen kennzeichnet den konjugiert

komplexen Wert.) Man wird so auf das Verschwinden einer Determinante geführt, als Bedingung dafür, dass die 3 Geraden durch einen Punkt gehen. Ausrechnen der Determinante führt zu einer Gleichung

$$\kappa e^{i\eta} + \bar{\kappa} e^{-i\eta} + \lambda e^{3i\eta} + \bar{\lambda} e^{-3i\eta} = 0 \quad \text{mit} \quad \kappa = \sin \alpha e^{-i\alpha} + \sin \beta e^{-i\beta}, \quad \lambda = -\sin \gamma e^{-i\gamma}.$$

Geht man durch  $e^{2i\eta} = (\tau + i)/(\tau - i)$  zu dem  $\text{ctg } \eta = \tau$  über, so erhält man eine Gleichung dritten Grades

$$\tau^3 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \tau^2 (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 3 \sin^2 \gamma) + \tau (\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta - 3 \sin \gamma \cos \gamma) + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 0$$

für den  $\text{ctg}$  der Winkel, die zu Holzschens Punkten führen. Bei dieser Überlegung wurde um  $A$  und  $B$  im positiven, um  $C$  im negativen Sinn gedreht. Da jede Ecke die Rolle von  $C$  übernehmen kann, so erhält man zwei weitere Gleichungen dritten Grades, immer bei Beibehaltung der Orientierung des Dreiecks. Die Zahl der reellen Lösungen kann sich mit Dreieck und ausgezeichneter Ecke ändern. Änderung der Orientierung des Dreiecks führt nochmals zu den gleichen Winkeln. Alles in allem erkennt man, dass die Zahl der (reellen) Holzschens Punkte bei gegebener Orientierung des Dreiecks zwischen 3 und 9 liegt. Diese Punkte verteilen sich auf 3 Kreise, die durch den der betr. Orientierung zugehörigen Brocardschen Punkt gehen. Die Minimalzahl der Holzschens Punkte tritt zum Beispiel beim gleichseitigen Dreieck auf, die Maximalzahl beim gleichschenkligen Dreieck mit dem Basiswinkel  $\pi/24$ . Hr. HOLZ hat hier wohl einen interessanten Fragenkreis der Elementargeometrie in Angriff genommen. Weitere Untersuchungen sind im Gang.

L. BIEBERBACH, (D 8183) Rottach-Egern

### Über den Wilsonschen Satz

Dieser wohlbekannte Satz lautet: Für jede Primzahl  $p$  ist  $(p-1)! + 1$  durch  $p$  teilbar. Er wurde zuerst von LAGRANGE bewiesen, im Jahre 1771, und nachher sind viele verschiedene Beweise gegeben worden. In keinem von diesen ist jedoch, scheint es, die folgende Formel verwendet:

$$n! = \sum \frac{n!}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_r^{k_r} k_1! \dots k_r!} \quad (1)$$

Die Summation ist über alle Partitionen

$$n = k_1 n_1 + \dots + k_r n_r, \quad 0 < n_1 < n_2 < \dots < n_r,$$

zu erstrecken. Diese Formel, die man CAUCHY verdankt, hat in der Theorie der Permutationsgruppen ihre natürliche Bedeutung. Der Leser mag jedoch von dieser Bedeutung absehen und selbst die Formel mit Induktion nach  $n$  beweisen. Jedes Glied in (1) zerfällt in  $r$  Glieder, von denen das  $s$ -te

$$(n-1)(n-2)\dots(n-n_s+1) \frac{(n-n_s)!}{n_1^{k_1} \dots n_s^{k_s-1} \dots n_r^{k_r} k_1! \dots (k_s-1)! \dots k_r!}$$

ist. Das Induktionsverfahren ergibt sich sofort, und es folgt auch, dass die Summanden in (1) ganze Zahlen sind.

Sei nun  $n$  eine Primzahl. Dann sieht man ohne weiteres ein, dass  $n$  nur in zwei Gliedern der Summe (1) als Faktor im Nenner vorkommt. Alle übrigen Glieder sind also ganze, durch  $n$  teilbare Zahlen. Daher muss auch die Summe dieser zwei ausgezeichneten Glieder durch  $n$  teilbar sein, und man bekommt

$$\frac{n!}{n^1 1!} + \frac{n!}{1^n n!} = (n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}.$$

H. TVERBERG (Bergen)

### Ein Beweis des Wilsonschen Satzes

Sei  $p$  eine ungerade Primzahl. Die Vandermondesche Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 4 & \dots & 2^{p-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & p-1 & (p-1)^2 & \dots & (p-1)^{p-2} \end{vmatrix}$$

ist nicht durch  $p$  teilbar. Multipliziert man die Zeilen der Reihe nach mit  $1, 2, \dots, p-1$ , so bekommt man nach dem Fermatschen Satz

$$\begin{aligned} (p-1)! D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 4 & 8 & \dots & 2^{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p-1 & (p-1)^2 & (p-1)^3 & \dots & (p-1)^{p-1} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & \dots & 2^{p-2} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p-1 & (p-1)^2 & (p-1)^3 & \dots & (p-1)^{p-2} & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{p-2} D = -D \pmod{p}, \quad \text{also} \quad (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

JÁNOS SURÁNYI, Eötvös-Loránd Universität, Budapest

## Aufgaben

**Aufgabe 485.** Die Treffwahrscheinlichkeit eines Schusses sei  $w$  und  $w_s$  bedeute die Wahrscheinlichkeit, dass von total  $n$  unter gleichbleibenden Bedingungen abgegebenen Schüssen mindestens  $s$  Treffer sind. Man beweise die Beziehung

$$w \frac{dw_s}{dw} = s (w_s - w_{s+1}).$$

H. BRÄNDLI, Zürich

*Lösung:* Es gibt  $\binom{n}{s}$  verschiedene Möglichkeiten, dass in einer Serie von  $n$  Schüssen  $s$  Treffer und  $n-s$  Nichttreffer auftreten, da sich die möglichen Ausfälle in der Reihenfolge des Auftretens von Treffern und Nichttreffern unterscheiden. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Serie von  $n$  Schüssen genau  $s$  Treffer zu erzielen

$$z_s = \binom{n}{s} w^s (1-w)^{n-s} \quad (s = 0, 1, \dots, n),$$

und somit die Wahrscheinlichkeit, in einer Serie von  $n$  Schüssen mindestens  $s$  Treffer zu erzielen

$$w_s = \sum_{k=s}^n z_k = \sum_{k=s}^n \binom{n}{k} w^k (1-w)^{n-k} \quad (s = 0, 1, \dots, n).$$

Aus dieser Darstellung von  $w_s$  folgt

$$\begin{aligned} w \frac{dw_s}{dw} &= w \sum_{k=s}^n k \binom{n}{k} w^{k-1} (1-w)^{n-k} - w \sum_{k=s}^{n-1} (n-k) \binom{n}{k} w^k (1-w)^{n-k-1} \\ &= s \binom{n}{s} w^s (1-w)^{n-s} + \sum_{k=s+1}^n k \binom{n}{k} w^k (1-w)^{n-k} \\ &\quad - \sum_{k=s+1}^n (n-k+1) \binom{n}{k-1} w^k (1-w)^{n-k} \end{aligned}$$