Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 20 (1965)
Heft: 5

Artikel: Axiomatischer Aufbau der sphärisch-elliptischen Geometrie
Autor: Mall, J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23930

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

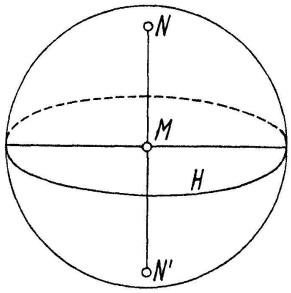
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XX Heft 5 Seiten 97–120 10. September 1965

Axiomatischer Aufbau der sphärisch-elliptischen Geometrie

Unter der sphärisch-elliptischen Geometrie wird hier eine Geometrie verstanden, die sich auf der Oberfläche der euklidischen Vollkugel und im elliptischen Kreisbündel als Modell realisieren lässt. Den Zusammenhang zwischen der Kugeloberfläche und dem elliptischen Kreisbündel erkennt man sofort, wenn man die Kugeloberfläche vom Punkt N aus stereographisch auf den zu $N\,N'$ senkrechten Hauptkreis H der Kugel projiziert (Figur 1).



Figur 1

Dabei entspricht ein grösster Kugelkreis immer einem Kreis in der Ebene des Kreises H, der diesen Hauptkreis H diametral schneidet. Die im folgenden axiomatisch aufgebaute sphärisch-elliptische Geometrie unterscheidet sich verschiedentlich von der in der Literatur als ebene elliptische Geometrie bezeichneten Geometrie, die am zweckmässigsten durch das räumliche Geraden- und Ebenenbündel durch einen Punkt M realisiert wird. Die Gesamtheit der Geraden durch M stellt bei diesem Modell der elliptischen Geometrie die Punkte der elliptischen Ebene, die Gesamtheit der Ebenen durch M die Gesamtheit der Geraden der elliptischen Ebene dar. Projiziert man dieses Geraden- und Ebenenbündel durch M auf die Oberfläche einer Kugel mit M als Mittelpunkt und deutet die beiden Endpunkte eines Kugeldurchmessers als einen elliptischen Punkt und ebenso die grössten Kugelkreise als Geraden, so erhält man ein weiteres Modell der elliptischen Geometrie. Die elliptische Geometrie ist daher mit der hier wegen der beiden Realisierungsmöglichkeiten als sphärisch-elliptische Geometrie bezeichneten Geometrie, die hier axiomatisch begründet werden soll, verwandt.

1. Teil

Das Axiomensystem der sphärisch-elliptischen Geometrie

Genau wie in der euklidischen Geometrie werden in der sphärisch-elliptischen Geometrie die Grundbegriffe dieser mathematischen Disziplin «Punkt und Gerade» auf der sphärisch-elliptischen Ebene implizit definiert. Die Beschreibung der Beziehungen zwischen den Punkten und Geraden der sphärisch-elliptischen Geometrie erfolgt durch die Axiome dieser Geometrie. Mit Hilfe der Grundbegriffe hier Punkt, Gegenpunkt und Gerade werde weiter in den Definitionen neue Begriffe (zum Beispiel Strecke, Winkel...) eingeführt und diese durch weitere Axiome miteinander in Beziehung gebracht. Die Grundbegriffe und die aus ihnen abgeleiteten Begriffe werden durch die Axiomengruppen der Verknüpfung, der Anordnung, der Kongruenz und der Stetigkeit miteinander verknüpft.

Axiomgruppe I. Die Axiome der Verknüpfung

I, 1. Zu zwei Punkten A und B gibt es stets eine Gerade, die durch die beiden Punkte hindurchgeht.

I, 2. Zu jedem Punkt P gibt es genau einen von P verschiedenen Punkt $\overline{P}$, der speziell dem Punkt P zugeordnet ist. $\overline{P}$ heisst der Gegenpunkt des Punktes P. Der Gegenpunkt eines Gegenpunktes ist wieder der ursprüngliche Punkt, also $\overline{\overline{P}} = P$.

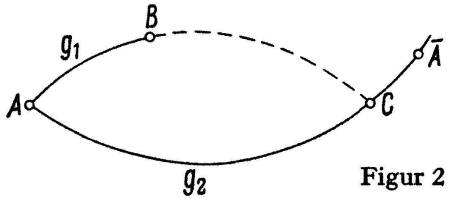
I, 3. Zu zwei Punkten, die nicht Gegenpunkte sind, gibt es nicht mehr als eine Gerade, die durch diese Punkte hindurchgeht. Zu zwei Gegenpunkten gibt es mehr als eine solche Gerade.

I, 4. Auf einer Geraden gibt es wenigstens zwei Punkte, die nicht Gegenpunkte sind. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

I, 5. Zwei Gerade haben stets genau zwei Punkte gemeinsam. (Dieses Axiom besagt, dass es in der sphärisch-elliptischen Geometrie keine Parallelen geben kann. Die beiden gemeinsamen Punkte müssen nach Axiom I, 3 Gegenpunkte sein.)

Im Anschluss an diese Axiome der Verknüpfung wird folgender Satz bewiesen:

Satz 1. Die eindeutig bestimmte Gerade durch zwei Punkte A und B, die selbst nicht Gegenpunkte sind, geht auch durch die Gegenpunkte $\overline{A}$ und $\overline{B}$ von A und B.



Figur 2

Beweis: Zunächst gibt es nach Axiom I, 3 genau eine Gerade g_1 durch die Punkte A und B. $\overline{A}$ sei nach Axiom I, 2 der Gegenpunkt zu A. Nach Axiom I, 3 gibt es wenigstens eine von g_1 verschiedene Gerade g_2, die durch die Punkte A und $\overline{A}$ hindurchgeht (Figur 2). Nach Axiom I, 5 schneiden sich die Geraden g_1 und g_2 ausser in A nochmals in einem Punkt C. Nach Axiom I, 3 müssen daher A und C Gegenpunkte sein und C muss mit $\overline{A}$ zusammenfallen. $\overline{A}$ liegt daher auf der Geraden durch die Punkte A und B. Analog zeigt man, dass auch $\overline{B}$ auf dieser Geraden liegt.

Satz 1 lässt sich noch anders formulieren. Da er in dieser Form später verschiedentlich verwendet wird, wird dieselbe als Satz 1a hier noch angegeben.

Satz 1a. 3 Punkte, von denen irgend zwei Gegenpunkte sind, liegen auf einer Geraden.

Axiomgruppe II. Axiome der Anordnung

In diesen Axiomen werden über die Beziehungen von Punkten zueinander auf einer Geraden Aussagen gemacht.

II, 1. Zwei Punkte auf einer Geraden zerlegen dieselbe in genau zwei von diesen Punkten begrenzte Teile. Die beiden Teile haben keine gemeinsamen Punkte und bilden zusammen mit den Begrenzungspunkten die Gerade. Im Hinblick auf dieses Axiom gelangt man zu folgender Definition:

Definition 1: Ein Punkt und ein Gegenpunkt zerlegen jede durch sie hindurchgehende Gerade in zwei Halbgeraden.

II, 2. Zu zwei Punkten A und B einer Geraden gibt es wenigstens zwei Punkte P und Q so, dass der Punkt P in einem Teil der durch die Punkte A und B zerlegten Geraden und der Punkt Q im anderen Teil der durch die Punkte A und B zerlegten Geraden liegt.

Definition 2: Liegt Punkt P in einem Teil, Punkt Q aber im anderen Teil einer durch die Punkte A und B bestimmten und nach II, 1 zerlegten Geraden, so werden die Punkte P und Q durch die Punkte A und B getrennt.

II, 3. Werden zwei Punkte A und B einer Geraden durch die Punkte P und Q getrennt, so werden auch die Punkte P und Q durch die Punkte A und B getrennt.

II, 4. Vier Punkte einer Geraden A, B, P und Q zerfallen stets in zwei Paare etwa $A\ B$ und $P\ Q$ so, dass sich die Punkte $A\ B$ und $P\ Q$ trennen. Die anderen Punktepaare also $A\ P$, $B\ Q$, ebenso $A\ Q$, $B\ P$ trennen sich dann nicht.

II, 5. Paare von Gegenpunkten auf einer Geraden trennen sich immer.

Unter Berücksichtigung von Axiom I, 1 und I, 3, sowie Satz 1 kann nunmehr der Begriff der Strecke definiert werden.

Definition 3: Die Strecke. Zwei Punkte A und B, die nicht Gegenpunkte sind, bestimmen eine Strecke AB, nämlich die Menge der Punkte C auf der durch A und B festgelegten Geraden (nach Axiom I, 1 und I, 3), die so beschaffen sind, dass die Punkte $C\ \overline{A}$ und $A\ B$ sich trennen. Alle Punkte C dieser Menge heissen Punkte der Strecke. A und B sind die Eckpunkte der Strecke. Alle anderen Punkte der Geraden liegen ausserhalb der Strecke.

Weil (nach Axiom II, 5) die Punkte $A\ \overline{A}$ und $B\ \overline{B}$ sich trennen, sind (nach Axiom II, 4) die Punkte $\overline{A}\ \overline{B}$ und $A\ B$ nicht getrennt. Die Gegenpunkte $\overline{A}\ \overline{B}$ liegen also in demselben Teil der durch A und B geteilten Geraden.

Daraus folgt, dass die Punkte $C\ \overline{B}$ ebenfalls von A und B getrennt liegen. Zur Definition der Strecke AB kann also entweder der Gegenpunkt von A oder aber der von B verwendet werden.

Zusatz: Diese Definition gilt nicht, wenn A und B Gegenpunkte sind. In diesem Entartungsfall ist es sinnvoll – so zeigt sich später (Fig. 9) –, je nach Bedarf eine der durch A und B festgelegten Halbgeraden als Strecke AB zu wählen. Wir wollen diese Halbgeraden auch als entartete Strecken bezeichnen.

Definition 4: Das «Zwischen». Von allen Punkten C der Strecke AB sagen wir, dass sie «zwischen» A und B liegen. In Zeichen $(A\ C\ B)$.

Die Punkte A und B liegen dabei bezüglich des Punktes C auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A, B und C.

Als 6. Anordnungsaxiom verwenden wir wörtlich das Axiom von PASCH. Zu diesem Zweck definieren wir hier zunächst das sphärisch-elliptische Dreieck.

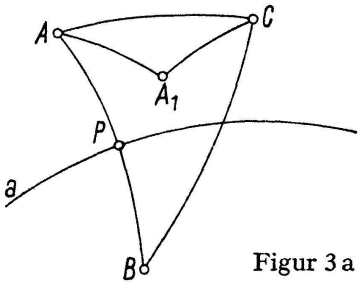
Definition 5: Ein Dreieck wird gebildet von drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten A, B und C mit den zu diesen Punkten gehörigen Strecken als Seiten.

II, 6. Es seien $A\ B\ C$ die Eckpunkte eines Dreiecks und a eine Gerade, die keinen der Punkte A, B, C trifft. Wenn dann die Gerade a durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiss auch entweder durch einen Punkt der Strecke AC *oder* durch einen Punkt der Strecke BC.

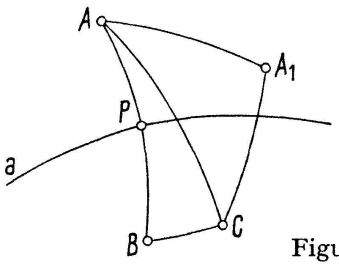
Die Definitionen für die Halbebene, den Winkel, den Nebenwinkel, den Scheitelwinkel und rechten Winkel können nunmehr wörtlich aus der absoluten Geometrie übernommen werden. Auch die Definition des Innern und Äussern eines Winkels kann aus der absoluten Geometrie übernommen werden (siehe HILBERT, Grundlagen der Geometrie § 5, 1956). Die in diesen Definitionen vorkommenden Strecken sind dabei natürlich wiederum Strecken im Sinn der Definition 3. Im Hinblick auf die Axiomgruppe III wird hier noch auf den Begriff der Teilung der Ebene durch eine Gerade eingegangen.

Definition 6: Gegeben sei eine Gerade a und zwei Punkte A und B. Enthält dann die Strecke AB keinen Punkt der Geraden a, so liegen A und B auf derselben Seite der Geraden a. Enthält AB aber einen Punkt der Geraden a, so liegen die Punkte A und B auf verschiedenen Seiten der Geraden.

Satz 2. Jede Gerade teilt die sphärisch-elliptische Ebene in zwei Halbebenen.



Figur 3a



Figur 3b

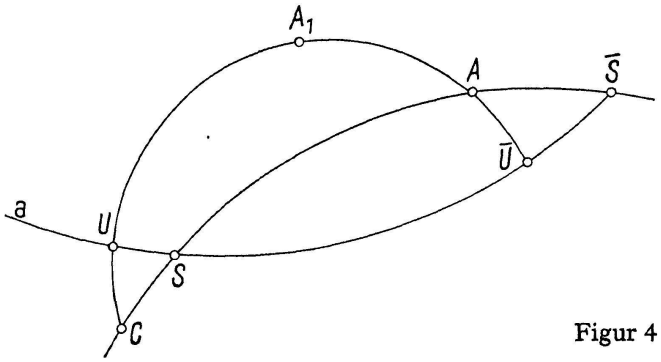
Beweis: Gegeben sei die Gerade a und ein Punkt A ausserhalb derselben (Axiom I, 4). P sei ein Punkt der Geraden derart (Axiom I, 4), dass A und P nicht Gegenpunkte sind. Auf der durch $A\ P$ bestimmten Geraden wählt man B so, dass (A, P, B) gilt (Axiom II, 2) und A und B bzw. B und P nicht Gegenpunkte sind. A und B liegen dann auf verschiedenen Seiten der Geraden a (Figur 3a und 3b).

C sei ein weiterer beliebiger Punkt der sphärisch-elliptischen Ebene nur mit der Einschränkung, dass er nicht Gegenpunkt zu A oder B ist. Dann muss nach Axiom II, 6 die Gerade a entweder die Strecke BC oder die Strecke AC in einem Punkt innerhalb dieser Strecken treffen. Trifft a die Strecke BC (Fall der Figur 3a), so liegt C auf der gleichen Seite der Geraden wie der Punkt A. Trifft a dagegen die Strecke AC (Fall der Figur 3b), so liegen C und A auf verschiedenen Seiten von a. Es ist jetzt noch zu zeigen, dass diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, die Halbebenen,

unabhängig von der Wahl von A ist. Wir wählen zu diesem Zweck einen Punkt A_1, der nicht Gegenpunkt zu A und C ist (Axiom I, 4 und Satz 1), derart, dass die Strecke AA_1 keinen Punkt mit der Geraden a gemein hat. Ein solcher Punkt lässt sich immer finden. Würde nun die Gerade a im Fall der Figur 3a die Strecke A_1C schneiden, so müsste sie nach Axiom II, 6 auch entweder die Strecke AC oder die Strecke AA_1 schneiden. Nun schneidet die Gerade a in diesem Fall weder die Strecke AC noch die Strecke AA_1. Also kann sie auch die Strecke A_1C nicht schneiden. Die Punkte A_1A und C liegen daher auf der gleichen Seite der Geraden a. Man hätte also in diesem Fall mit dem gleichen Ergebnis statt vom Punkt A auch vom Punkt A_1 ausgehen können.

Im Fall der Figur 3b trifft a die Strecke AC. Da die Gerade a die Strecke AA_1 nicht treffen kann, muss sie in diesem Fall die Strecke A_1C treffen. A_1 und C liegen daher genau wie A und C auf verschiedenen Seiten der Geraden. Man hätte daher wiederum mit dem gleichen Ergebnis statt vom Punkt A auch vom Punkt A_1 ausgehen können.

Nunmehr werde angenommen, der Punkt C sei Gegenpunkt zu einem der Punkte A oder B, etwa zum Punkt A. Eine der durch die Punkte A und C gehenden Geraden möge die Gerade a in den Punkten S und $\bar{S}$ (Figur 4), die ja Gegenpunkte sind, treffen (Axiom I, 3 und I, 5)



Figur 4

Nachdem A und C ebenfalls Gegenpunkte sind, müssen sich die Punktepaare gemäss Axiom II, 5 trennen. A und C liegen in diesem Fall auf verschiedenen Seiten der Geraden a. Es sei nun A_1 wieder ein Punkt derart, dass die Strecke AA_1 keinen Punkt mit a gemein hat. Die durch A_1 und A bestimmte Gerade geht dann wiederum durch den Gegenpunkt C von A und schneidet a in den Gegenpunkten U und $\bar{U}$, wobei U derjenige von diesen zwei Punkten sei, für welchen (AA_1U) gilt. Nach der Streckendefinition für die Strecke AU müssen sich jetzt die Punktepaare AU und A_1C trennen. A_1 und C liegen also wieder auf verschiedenen Seiten der Geraden a. Man hätte also wieder vom Punkt A_1 ausgehen können, der auf derselben Seite der Geraden liegt wie A. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Axiomgruppe III. Axiome der Kongruenz

Die Strecken und Winkel der sphärisch-elliptischen Geometrie stehen in gewissen Beziehungen zueinander, zu deren Beschreibung die Worte «kongruent» oder «gleich» dienen. Diese Beziehungen werden in den Kongruenzaxiomen festgelegt. Gegenüber den Hilbertschen Kongruenzaxiomen ergeben sich einige Abweichungen.

III, 1. Wenn A und B zwei Punkte auf einer Geraden sind, derart, dass sie keine Gegenpunkte sind und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a bzw. a'

zu A' stets einen Punkt B' finden, so dass die Strecke AB der Strecke $A'B'$ kongruent oder gleich ist, in Zeichen

$$AB = A'B' .$$

III, 2. Wenn eine Strecke $A'B'$ und eine Strecke $A''B''$ derselben Strecke AB kongruent sind, so ist auch die Strecke $A'B'$ der Strecke $A''B''$ kongruent. (Gegenüber der Hilbertschen Formulierung ergibt sich hier keine Änderung.)

III, 3. Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner $A'B'$, $B'C'$ zwei Strecken auf derselben oder einer anderen Geraden a' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte.
Wenn dann für die durch die Punkte $A\ B\ C$ und $A'\ B'\ C'$ bestimmten Strecken AB, BC und $A'B'$, $B'C'$ gilt:

$$AB = A'B' \text{ und } BC = B'C', \quad \text{so gilt auch} \quad AC = A'C' .$$

Falls AC und $A'C'$ die Punkte B und B' enthalten, gilt auch

$$AB + BC = AC \quad \text{bzw.} \quad A'B' + B'C' = A'C' .$$

III, 4. Es sei ein Winkel $\sphericalangle\,(h\,k)$ und eine Gerade a', sowie eine bestimmte Seite von a' gegeben. h' bedeute eine Halbgerade der Geraden a', die von A' ausgeht. Dann gibt es einen und nur einen Halbstrahl k' so, dass der Winkel $\sphericalangle\,(h\,k)$ kongruent oder gleich dem Winkel $\sphericalangle\,(h'\,k')$ ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels $\sphericalangle\,(h'\,k')$ auf der gegebenen Seite von a' liegen. In Zeichen:

$$\sphericalangle\,(h\,k) = \sphericalangle\,(h'\,k')$$

Jeder Winkel ist sich selbst gleich, das heisst es ist stets

$$\sphericalangle\,(h\,k) = \sphericalangle\,(h\,k) .$$

III, 5. Wenn für zwei Dreiecke $A\ B\ C$ und $A'\ B'\ C'$ die Kongruenzen

$$AB = A'B' , \quad AC = A'C' , \quad \sphericalangle\, B\,A\,C = \sphericalangle\, B'\,A'\,C'$$

gelten, so ist auch stets die Kongruenz $\sphericalangle\, A\ B\ C = \sphericalangle\, A'\ B'\ C'$ erfüllt.
Mit Hilfe der Kongruenzaxiome III lassen sich genau so wie in der absoluten Geometrie die Begriffe grösser und kleiner bei Strecken und Winkeln definieren. Hier sei noch die Definition für die Begriffe grösser und kleiner bei Strecken angegeben.

Definition 7: Es seien zwei Strecken AB und $A'B'$ auf einer Geraden a und einer Geraden a', oder nur auf einer Geraden a gegeben. Trägt man dann von A aus auf der Halbgeraden von a, die B enthält, die Strecke $A'B'' = A'B'$ ab, so sagt man, $A'B'$ ist kleiner als AB ($A'B' < AB$), wenn B'' zwischen A und B liegt. Liegt B zwischen A und B'', so ist umgekehrt $AB < A'B'$. Analog ergibt sich die Definition der Begriffe grösser und kleiner bei den Winkeln.

Axiomgruppe IV. Axiome der Stetigkeit

IV, 1. Gegeben ist irgendeine Strecke AB_1. Es werden an diese Strecke auf der Geraden AB_1 kongruente Strecken B_1B_2, B_2B_3... angetragen. Dann existiert stets eine natürliche Zahl n derart, dass entweder B_n mit dem Gegenpunkt $\bar{A}$ von A zusammenfällt oder aber die Punktepaare $A\ \bar{A}$ und $B_1\ B_n$ sich trennen.

IV, 2. Cantorsches Axiom. Gegeben ist eine Strecke AB. Es gebe eine Folge von Strecken A_1B_1, A_2B_2... derart, dass die Strecke A_nB_n innerhalb der Strecke $A_{n-1}B_{n-1}$ liegt. Weiter soll es keine Strecke geben, deren Endpunkte innerhalb aller Strecken A_nB_n liegen. Dann existiert genau ein Punkt X, der allen Strecken A_nB_n angehört.

(Das vorliegende Axiomensystem wurde in möglichst enger Anlehnung an Hilberts Axiomensystem der euklidischen Geometrie entwickelt. Dabei wurde jedoch nicht darauf geachtet, unbedingt ein unabhängiges Axiomensystem aufzustellen.

Zweck dieser Arbeit ist es nämlich, aus einem übersichtlichen Axiomensystem heraus die sphärisch-elliptische Geometrie systematisch zu entwickeln.)

Aus den hier angegebenen Axiomen und Definitionen lässt sich die sphärisch-elliptische Geometrie entwickeln. Dabei sei eine Beschränkung auf einige besonders wichtige Sätze vorgenommen. Zunächst zeigt man, dass verschiedene Sätze der absoluten Geometrie auch in der sphärisch-elliptischen Geometrie richtig sind. Das ist immer für diejenigen Sätze der Fall, bei denen nur den beiden Geometrien gemeinsame Axiome benützt werden. Es gilt insbesonders für folgende Sätze:

I. Die Streckenübertragung ist eindeutig.

II. Kongruente Winkel besitzen kongruente Nebenwinkel.

III. Scheitelwinkel sind kongruent.

Geringfügige Änderungen sind bei den meisten Beweisen der folgenden Sätze erforderlich.

IV. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (Kongruenzsatz I).

V. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen (Kongruenzsatz II).

VI. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen (Kongruenzsatz III).

VII. In einem gleichschenkligen Dreieck sind die zugehörigen Winkel gleich gross und umgekehrt.

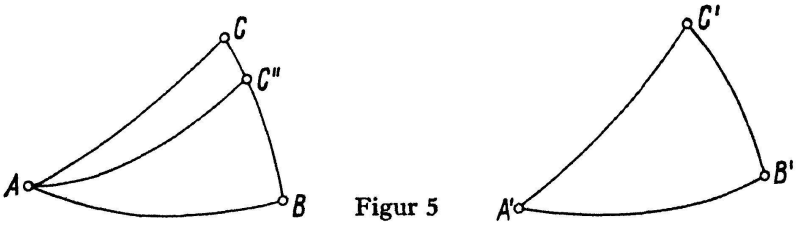
VIII. Alle Winkel, auch gestreckte, sind eindeutig halbierbar.

IX. In einem Punkt einer Geraden lässt sich stets ein Lot errichten.

Als Muster sollen die Beweise für die Sätze IV und VIII erbracht werden.

1. Beweis für Satz IV (Kongruenzsatz I)

Wegen des von der absoluten Geometrie abweichenden Axiomensystems werden die Geraden hier krummlinig gezeichnet.



Figur 5

Bei den Dreiecken $A\,B\,C$ und $A'\,B'\,C'$ gilt nach Voraussetzung etwa (siehe Figur 5):

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad \sphericalangle\, B\,A\,C = \sphericalangle\, B'\,A'\,C'$$

Nach Satz 1a sind keine zwei der Punkte A, B, C und A', B', C' Gegenpunkte.

Der weitere Beweis für Kongruenzsatz I verläuft genau so wie in der absoluten Geometrie. Gemäss Axiom III, 5 ist $\sphericalangle\, A\,B\,C = \sphericalangle\, A'\,B'\,C'$. Trägt man dann $B'C'$ an BC bis C'' an und verbindet A mit C'', so sind, wieder nach Satz 1a, A und C'' keine Gegenpunkte. AC'' erfüllt daher die Streckendefinition.

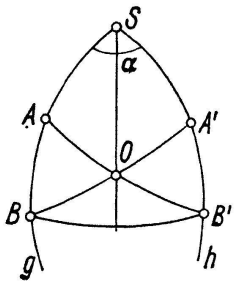
Es gilt nun gemäss Axiom III, 5

$$\sphericalangle\, B\,A\,C = \sphericalangle\, B'\,A'\,C' = \sphericalangle\, B\,A\,C''\,.$$

Wegen Axiom III, 4, das die Eindeutigkeit der Winkelabtragung beinhaltet, müssen die Punkte C und C'' zusammenfallen. Damit ist die Kongruenz der Dreiecke $A\,B\,C$ und $A'\,B'\,C'$ bewiesen. Analog gestaltet sich der Beweis der Sätze V und VI. Der Beweis von Satz VII verläuft wie in der absoluten Geometrie.

Wir wenden uns nunmehr dem Beweis von Satz VIII zu.

2. *Beweis für Satz VIII*



Figur 6

Von S aus werden die Strecken $SA = SA'$ und $SB = SB'$ auf den Schenkeln g und h des Winkels α $(0 < \alpha < 2\,R)$ abgetragen. Sodann werden die Strecken AB', BA' und BB' gezeichnet. Nach Satz 1a sind keine zwei der Punkte A und B' bzw. B und A' und A und A' bzw. B und B' Gegenpunkte (Figur 6). Es gilt dann:

$$\triangle\, S\,A\,B' \cong \triangle\, S\,A'\,B \qquad \text{(1. Kongruenzsatz .)}$$

Daraus folgt:

$$\sphericalangle\, S\,B\,A' = \sphericalangle\, S\,B'\,A\,.$$

Gemäss Axiom II, 6 muss die Gerade durch AB' die Seite BA' des $\triangle\, BA'S$ in einem Punkt O schneiden. Der ebenso vorhandene Schnittpunkt der Geraden durch $A'B$ mit der Strecke AB' kann nicht der Gegenpunkt $\overline{O}$ sein. Die auf der Geraden durch AB' liegenden Gegenpunkte O und $\overline{O}$ und die sowohl auf der Geraden durch AB' und der Geraden g liegenden Gegenpunkte A und $\overline{A}$ würden sich dann nicht trennen, was Axiom II, 5 widerspricht ($\overline{O}$ und $\overline{A}$ nicht gezeichnet). Die Strecken AB' und $A'B$ schneiden sich also in O.

Da $\triangle\, BB'S$ gleichschenklig ist, gilt auch:

$$\sphericalangle\, S\,B\,B' = \sphericalangle\, S\,B'\,B\,.$$

Somit gilt

$$\sphericalangle\, O\,B\,B' = \sphericalangle\, O\,B'\,B\,.$$

Daher ist $\triangle\, BB'O$ gleichschenklig und

$$BO = B'O\,.$$

BO und $B'O$ sind Strecken im Sinn unserer Definition 3, weil dies auch für BA' und $B'A$ gilt. Nun gilt: $\triangle\, S\,B\,O \cong \triangle\, S\,B'\,O$ (Kongruenzsatz I)

Daraus folgt:

$$\sphericalangle\, B\,S\,O = \sphericalangle\, B'\,S\,O\,.$$

Gäbe es ausser $S\,O$ noch eine 2. Winkelhalbierende, so würde das zu einem Widerspruch mit Axiom III, 4 führen. Die Halbierung des gestreckten Winkels ergibt sich aus Satz IX, dessen Beweis genau so wie in der absoluten Geometrie verläuft und deswegen hier nicht durchgeführt wird. (Fortsetzung im nächsten Heft).

J. MALL, Weiden/BRD.

Programmation linéaire et enseignement secondaire

Dans un excellent article de cette revue (El. Math. *16*, 1–12 (1961)) M. H. P. KÜNZI a exposé les grandes lignes de la programmation linéaire[1]). Il pense avec raison que les éléments de cette théorie ont leur place dans les programmes de certaines classes de l'enseignement secondaire[2]). Les élèves auraient l'occasion, rare, d'utiliser des inégalités et celle de résoudre des problèmes qui se posent dans la pratique.

Dans un enseignement élémentaire de la programmation linéaire, on résout souvent *graphiquement* quelques problèmes (voir la page 2 de l'article cité) avant d'aborder la méthode du simplexe. On choisit des exemples comprenant chacun une fonction de *deux* variables et un certain nombre de contraintes (inégalités).

Les valeurs des variables sont portées en abscisses et en ordonnées; les contraintes peuvent être aussi nombreuses que l'on veut.

Il serait aussi très intéressant de résoudre *graphiquement* des problèmes à plus de deux variables, le nombre des contraintes étant de *deux*.

Ce dernier cas est bien connu[3]), pas autant cependant qu'on pourrait le croire. Un ouvrage aussi réputé, à juste titre, que les «Mathematical Economics» de R. G. D. ALLEN l'ignore puisqu'on y lit que de tels problèmes ne sont pas résolubles graphiquement (exercices 6, page 538; 4, page 541; 3, page 544).

Envisageons l'exemple suivant:

On connaît les prix de 3 aliments, A_1, A_2, A_3, la teneur en protides et le nombre de calories fournies par kilogramme.

Les besoins minimaux en calories et en protides par personne et par jour sont donnés.

(I)

	A_1 par kg	A_2	A_3	Besoins par personne et par jour
Prix (f/kg)	1	4	3	
Calories (1000)	2	5	4	3
Protides (50 g)	1	7	4	2

[1]) Conférence donnée le 13 octobre 1960 lors de l'assemblée annuelle de la société suisse des professeurs de mathématiques et de physique.

Voir aussi «*Nichtlineare Programmierung*», par H. P. KÜNZI et W. OETTLI, El. Math. *18*, 1–8 (1963). nº 1, page 1 à 8, 10 janvier 1963.

[2]) Cf. «*Le rôle des mathématiques dans les écoles de commerce*», P. BURGAT, Revue suisse pour l'enseignement commercial, 6e cahier, 56e année, juillet 1962, pages 128 à 136.

[3]) Il figure dans plusieurs ouvrages destinés aux économistes.