

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 20 (1965)
Heft: 4

Artikel: Sur les opérateurs A et B
Autor: Tauber, Selmo
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-23929>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Or, la solution de l'équation (2) en nombres naturels les plus petits est, comme on le trouve sans peine:

$$t_6 - t_3 = t_8 - t_6 = t_5.$$

Notre procédé ne donne pas donc toutes les solutions de l'équation (2) en nombres naturels m , n , r et s .

W. SIERPIŃSKI (Varsovie)

Sur les opérateurs A et B

Introduction

Le calcul des q -différences est considéré généralement comme une branche du calcul des différences finies. Pour les origines et les développements de ce calcul et des équations fonctionnelles auxquelles il conduit nous référons à [1]¹⁾, [2]. Dans [3], [4], [5] et [6] on trouvera une bibliographie à peu près complète jusqu'en 1931. Le poids principal des recherches allait surtout vers la solution d'équations aux q -différences linéaires.

La présente étude donne d'abord quelques aspects essentiels des bases du calcul des q -différences. Nous approchons le problème du point de vue opérationnel. Nous donnons ensuite la démonstration des théorèmes d'existence et d'unicité des solutions des équations et systèmes d'équations simultanées aux q -différences, théorèmes qui, à notre connaissance, n'ont jamais été démontrés.

1. L'opérateur $A(q)$

Cet opérateur est défini, pour un nombre donné q , par la relation

$$A(q) f(x) = f(qx). \quad (1)$$

Nous observons immédiatement que

- (i) pour $q = 0$, $A(0) f(x) = f(0) = \text{constante}$,
- (ii) pour $q = 1$, $A(1) f(x) = f(x)$, si bien que, $A(1) = I$, l'opérateur identique,
- (iii) $A(q)$ est un opérateur linéaire puisque pour des constantes α et β , nous aurons, $A(q) [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha f(qx) + \beta g(qx) = \alpha A(q) f(x) + \beta A(q) g(x)$,
- (iv) d'après (1), $A(p) A(q) f(x) = f(pqx) = f(qpx) = A(q) A(p) f(x)$, si bien que, $A(p) A(q) = A(q) A(p)$, et, $A(p) [A(q) A(r)] = [A(p) A(q)] A(r)$. Il s'ensuit que les opérateurs A pour différents q ont des produits commutatifs et associatifs,
- (v) pour $q \neq 0$, $A(q) A(1/q) = I$, si bien que $A(1/q) = A(q)^{-1}$,
- (vi) pour $q \neq 0$, si $A(q) f(x) = 0$, $f(x) = 0$,
- (vii) $A(q) x^k = q^k x^k$, donc x^k est une fonction propre de l'opérateur $A(q)$ avec valeur propre q^k ,
- (viii) si $\omega_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$ sont les n racines n -ièmes de l'unité, alors $A(\omega_{n,j})^n = A(\omega_{n,j}^n) = I$, donc, $A(\omega_{n,j}) = I^{1/n}$.

¹⁾ Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie, page 87.

points $\pm 1, \pm q^n, \pm q^{-n}$. Pour ces points nous connaissons la limite à gauche et à droite de la fonction. Nous considérons alors les deux fonctions

$$\text{qc}(x, q), \quad \text{pour laquelle,} \quad \varphi(x) = \cos \left[2\pi \frac{x-1}{q-1} \right] \quad (4)$$

et

$$\text{qs}(x, q), \quad \text{pour laquelle,} \quad \varphi(x) = \sin \left[2\pi \frac{x-1}{q-1} \right]. \quad (5)$$

On voit immédiatement que ces fonctions et leurs dérivées sont continues partout sauf à l'origine. Plus généralement, si $\varphi(x)$ est une fonction définie pour $1 < x < q$ qui peut être développée en série de FOURIER de période fondamentale $(q-1)$, alors $\omega(x, q)$ peut être développée en une série de la forme

$$\omega(x, q) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \text{qc}(x, q) + b_k \text{qs}(x, q)], \quad (6)$$

les coefficients a_k et b_k étant les mêmes que ceux du développement de $\varphi(x)$ en série de FOURIER. On voit immédiatement que $\text{qc}(x)$ et $\text{qs}(x)$, en particulier, et toute fonction $\omega(x, q)$ en général satisfont les conditions $A(q) \omega(x, q) = \omega(x, q)$, $B(q) \omega(x, q) = 0$.

4. Application des opérateurs $B(q)$ et $B(q)^{-1}$ aux fonctions élémentaires

Comme nous l'avons dit plus haut nous supposons que q est un nombre positif et que $q \neq 1$. Nous aurons alors

$$B(q) x^k = (q^k - 1) x^k, \quad (7)$$

si bien que

$$B(q)^{-1} x^k = \frac{x^k}{q^k - 1} + \omega(x, q), \quad (8)$$

et

$$B(q) \ln x = \ln q, \quad (9)$$

si bien que

$$B(q)^{-1} \omega(x, q) = \omega(x, q) \frac{\ln x}{\ln q} + \omega_1(x, q), \quad (10)$$

et

$$B(q) \frac{\ln(x/q)}{2 \ln q} \ln x = \ln x, \quad (11)$$

si bien que,

$$B(q)^{-1} \ln x = \frac{\ln(x/q)}{2 \ln q} \ln x + \omega(x, q). \quad (12)$$

Nous observons finalement que

$$B(q) \frac{k! x}{(q-1)^k} = \frac{k(k-1)! x}{(q-1)^{k-1}},$$

donc

$$B(q)^{-1} \frac{k! x}{(q-1)^k} = \frac{1}{k+1} \frac{(k+1)! x}{(q-1)^{k+1}} + \omega(x, q),$$

ce qui est l'équivalent en q -différences des formules

$$Dx^k = k x^{k-1}, \quad D^{-1}x^k = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1$$

et

$$\Delta(x)_k = k(x)_{k-1}, \quad \Delta^{-1}(x)_k = \frac{(x)_{k+1}}{k+1} + \Omega, \quad k \neq -1.$$

5. Formule de sommation

En utilisant l'identité algébrique

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)(x - 1) = x^{n+1} - 1,$$

nous pouvons écrire, avec $q > 0$, $q \neq 1$, et $A(q) = A$, $B(q) = B$, $B(q)^{-1} = B^{-1}$,

$$(I + A + A^2 + A^3 + \dots + A^n)(A - I) = A^{n+1} - I,$$

où $A - I = B$. Multipliant par B^{-1} de droite et observant que $(A - I)B^{-1} = BB^{-1} = I$, nous obtenons

$$I + A + A^2 + A^3 + \dots + A^n = (A^{n+1} - I)B^{-1}. \quad (13)$$

En appliquant ce résultat à une fonction $f(x)$ nous aurons, avec $B^{-1}f(x) = \varphi(x) + \omega(x, q)$,

$$f(x) + f(qx) + f(q^2x) + \dots + f(q^nx) = \varphi(q^{n+1}x) - \varphi(x), \quad (14)$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^n f(q^k x) = \varphi(q^{n+1}x) - \varphi(x). \quad (15)$$

6. Equations fonctionnelles pour q constant en variables réelles

Nous supposons que $q > 0$ et $q \neq 1$, et nous nous limitons au cas de x réel. Nous appellerons équation fonctionnelle d'ordre n une équation de la forme

$$\varphi[x, f(x), f(qx), f(q^2x), \dots, f(q^nx)] = 0. \quad (16)$$

Démontrons d'abord que (16) peut être écrit comme équation vectorielle d'ordre un. Nous aurons à supposer que (16) peut être résolue par rapport au terme de plus haut ordre, donc que (16) est équivalent à

$$f(q^nx) = \eta[x, f(x), f(qx), f(q^2x), \dots, f(q^{n-1}x)]. \quad (17)$$

Posons alors $f(x) = y_1, f(qx) = y_2, \dots, f(q^{n-1}x) = y_n$, et introduisons la notation classique des espaces vectoriels à n dimension

$$Y = [y_1, y_2, y_3, \dots, y_n].$$

Puisque $Ay_k = Af(q^{k-1}x) = f(q^kx) = y_{k+1}$, pour $k = 1, 2, \dots, n-1$, et $Ay_n = f(q^nx) = \eta[x, f(x), f(qx), \dots, f(q^{n-1}x)]$, nous aurons,

$$AY = [Ay_1, Ay_2, \dots, Ay_n] = [y_2, y_3, \dots, y_n, \eta],$$

ou encore

$$AY = F(Y, x), \quad (18)$$

où $F(Y, x) = [y_2, y_3, \dots, y_n, \eta]$ est une fonction vectorielle du vecteur Y et du scalaire x .

Plus généralement, considérons le système d'équations fonctionnelles simultanées

$$\left. \begin{aligned} \varphi_j[x, f_1(x), f_1(qx), f_1(q^2x), \dots, f_1(q^{n_1}x), f_2(x), f_2(qx), \dots, f_2(q^{n_2}x), \dots, \\ f_m(x), f_m(qx), \dots, f_m(q^{n_m}x)] = 0, \\ j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Nous supposons encore que le système d'équations (19) peut être résolu par rapport aux termes de plus haut ordre, donc que (19) est équivalent à

$$\left. \begin{aligned} f_j(q^{n_j} x) &= \eta_j [x, f_1(x), f_1(qx), \dots, f_1(q^{n_1-1} x), f_2(x), f_2(qx), \dots, f_2(q^{n_2-1} x), \dots, \\ &f_j(x), f_j(qx), \dots, f_j(q^{n_j-1} x), \dots, f_m(x), f_m(qx), \dots, f_m(q^{n_m-1} x)] = \eta_j, \\ &j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Nous allons montrer que (20) peut être écrit sous la forme (18). Posons

$$\begin{aligned} f_1(x) &= y_1, f_1(qx) = y_2, \dots, f_1(q^{n_1-1} x) = y_{n_1}, \\ f_2(x) &= y_{n_1+1}, f_2(qx) = y_{n_1+2}, \dots, f_2(q^{n_2-1} x) = y_{n_1+n_2}, \dots, \\ f_m(x) &= y_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+1}, f_m(qx) = y_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+2}, \dots, \\ &f_m(q^{n_m-1} x) = y_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+n_m}. \end{aligned}$$

En complétant avec les relations (20) et utilisant un espace vectoriel à $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ dimensions nous obtenons encore une équation vectorielle fonctionnelle de la forme (18).

Nous nous proposons de démontrer que les équations (17) et (20) ont des solutions satisfaisant certaines conditions aux limites et que ces solutions sont uniques. Il suffit pour cela de démontrer que (18) a des solutions puisque nous avons montré que (17) et (20) peuvent être écrits sous la forme (18). Nous supposons que la fonction vectorielle F est définie pour toutes les valeurs de x . Nous prendrons comme condition aux limites que pour $x = x_0$, les composantes du vecteur Y sont définies, c'est-à-dire que pour $x = x_0$, $y_k = p_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, les quantités p_k étant des nombres donnés. Il s'ensuit que pour $x = x_0$, $Y = Y_0 = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ et que $F(Y, x) = F(Y_0, x_0)$. D'après (18) $AY = F(Y, x)$, donc, $AY_0 = F(Y_0, x_0)$. Mais $F(AY_0, qx_0) = AF(Y_0, x_0) = A^2 Y_0$, ce qui nous donne le vecteur Y pour $x = q^2 x_0$. En continuant de la même façon nous obtenons le vecteur Y pour $x_0, qx_0, q^2 x_0, \dots, q^n x_0$, à partir de sa définition pour $x = x_0$. Cependant ceci ne prouve pas que Y existe pour toute valeur de x . Pour démontrer que Y existe pour toute valeur de x il faut changer les conditions aux limites.

Nous supposons donc que pour $x_0 \leq x \leq qx_0$, $Y = Y_0 = [\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x)]$, où $\omega_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, sont des fonctions données définies sur l'intervalle fermé $[x_0, qx_0]$. En répétant le même raisonnement que précédemment nous voyons que pour tout nombre entier positif n , $A^n Y_0 = A^{n-1} F(Y_0, x) = F(A^{n-1} Y_0, q^{n-1} x_0)$, si bien que Y est défini pour $q^n x_0 \leq x \leq q^{n+1} x_0$. Nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème I. Etant donné l'équation fonctionnelle vectorielle $AY = F(Y, x)$, ou $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$, cette équation aura une solution pour toute valeur de x si la fonction vectorielle F est définie pour toute valeur de x et si pour $x_0 \leq x \leq qx_0$, $Y = [\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x)]$.

Pour démontrer que cette solution est unique nous supposons qu'il y en ait deux, Y et Z , c'est-à-dire que $AY = F(Y, x)$ et $AZ = F(Z, x)$, et telles que pour $x_0 \leq x \leq qx_0$, $Y = [\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x)] = Z$. Dans ces conditions $AY = F(Y, x) = F(Z, x) = AZ$, et $A^2 Y = F(AY, qx) = F(AZ, qx) = A^2 Z$, et ainsi de suite. Pour compléter le

raisonnement par induction nous supposons que $A^{n-1}Y = A^{n-1}Z$, si bien que, $A^n Y = F(A^{n-1}Y, q^{n-1}x) = F(A^{n-1}Z, q^{n-1}x) = A^n Z$, ce qui est vrai pour tout entier positif n . Nous concluons: $Y = Z$ pour toute valeur réelle de x et énonçons:

Théorème II. La solution, dont l'existence a été démontrée par le théorème I, est unique.

La solution dont nous avons démontré l'existence et l'unicité dépend de n fonctions arbitraires $\omega_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, définies sur l'intervalle fermé $[x_0, qx_0]$. Ceci revient à supposer que les fonctions $\omega_j(x)$ sont q -périodiques, autrement dit $\omega_j(x) = \omega_j(x, q)$. Il n'y a pas de contradiction dans le fait que les fonctions q -périodiques sont définies sur un intervalle ouvert (x_0, qx_0) puisque pour chaque fonction $\omega_j(x, q)$, $\varphi(x)$ est défini pour $x = 1^+$ et pour $x = q^-$.

7. Equations fonctionnelles à coefficients constants

Il est clair que les méthodes de solutions d'équations fonctionnelles aux q -différences doivent être étudiées à part et on trouvera un grand nombre de ces équations résolues dans [2], [3] et [4]. A titre d'exemple nous montrerons comment résoudre l'équation linéaire à coefficients constants. Une telle équation d'ordre n s'écrit

$$\left[\sum_{k=0}^n a_k A(q)^k \right] f(x) = g(x). \quad (21)$$

Nous étudierons d'abord l'équation homogène,

$$\left[\sum_{k=0}^n a_k A(q)^k \right] f(x) = 0, \quad (22)$$

qui peut encore s'écrire

$$a_n \left[\prod_{k=1}^n (A(q) - b_k I) \right] f(x) = 0. \quad (23)$$

On vérifie aisément que l'équation du premier ordre

$$[A(q) - b I] f(x) = 0 \quad (24)$$

admet la solution générale

$$f(x) = \omega(x, q) x^{\ln b / \ln q}, \quad (25)$$

où $\omega(x, q)$ est une fonction q -périodique arbitraire. D'après le théorème II cette solution est unique. Il suit des propriétés de commutativité de l'opérateur $A(q)$ que la solution générale de l'équation (23) ou (22) sera

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \omega_k(x, q) x^{\ln b_k / \ln q}, \quad (26)$$

où les fonctions $\omega_k(x, q)$ sont q -périodiques et arbitraires. Remarquons que les nombres b_k sont réels ou complexes mais distincts. Dans le cas où $b_j = b_{j+1} = \dots = b_{j+s}$, c'est-à-dire que b_j est une racine d'ordre $s+1$ de l'équation algébrique

$$\sum_{k=0}^n a_k z^k = 0,$$

on vérifiera aisément que la partie de la solution correspondant à b_j sera

$$x^{\ln b_j / \ln q} [\omega_j(x, q) + \omega_{j+1}(x, q) \ln x + \omega_{j+2}(x, q) (\ln x)^2 + \dots + \omega_{j+s}(x, q) (\ln x)^s]. \quad (27)$$

Terminons par un exemple numérique: Soit à résoudre l'équation fonctionnelle $f(16x) - 9f(8x) + 29f(4x) - 39f(2x) + 18f(x) = 0$. Nous pouvons écrire $(A^4 - 9A^3 + 29A^2 - 39A + 18I)f(x) = 0$, avec $A = A(2)$, ou encore, $(A - 3I)^2(A - I)(A - 2I)f(x) = 0$. La solution générale de l'équation est $f(x) = x^{\ln 3 / \ln 2} [\omega_1(x, 2) + \omega_2(x, 2) \ln x] + \omega_3(x, 2) + \omega_4(x, 2)x$.

En ce qui concerne l'équation non-homogène nous remarquons que l'on peut démontrer ici encore que la solution générale de l'équation non-homogène est la somme de la solution générale de l'équation homogène augmentée d'une solution particulière quelconque de l'équation non-homogène.

SELMO TAUBER, Portland State College, USA.

REFERENCES

- [1] F. H. JACKSON, *q-Difference Equations*, Am. J. Math. 32, 305-314 (1910).
- [2] R. D. CARMICHAEL, *The General Theory of q-Difference Equations*, Am. J. Math. 34, 147-168 (1912).
- [3] C. R. ADAMS, *Linear q-Difference Equations*, Bull. Am. math. Soc. 37, 361-400 (1931).
- [4] N. E. NÖRDLUND, *Sur l'Etat Actuel de la Théorie des Equations aux Différences Finies*, Bull. Sci. math. (2) 44, 174-192, 200-220 (1920).
- [5] R. D. CARMICHAEL, *The Present State of the Difference Calculus and the Prospect for the Future*, Am. math. Mon. 31, 169-183 (1924).
- [6] N. E. NÖRDLUND, *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, copie de l'édition de 1924, par Chelsea N. Y. (1954).

Kleine Mitteilungen

Remarque sur l'axonométrie dimétrique

1. En axonométrie orthogonale on sait construire les axes axonométriques selon PASTERNAK, connaissant les longueurs l, m, n proportionnelles aux rapports de réduction $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ et vérifiant la relation $l^2 + m^2 + n^2 = 2k^2$ ¹⁾. Dans le cas de la dimétrie 1:2:2 (axonométrie des ingénieurs), REHBOCK²⁾, HESS³⁾ et PRAETORIUS⁴⁾ ont publié presque simultanément une construction très élégante à l'aide d'un triangle auxiliaire de côtés 2, 2, 3. Nous montrons qu'un triangle analogue de côtés $n, n, k\sqrt{2}$ existe pour la dimétrie en général.

2. Nous utilisons le théorème: Le triangle orthique $X_1 Y_1 Z_1$ du triangle axonométrique XYZ a des côtés proportionnels aux carrés des rapports de réduction, donc proportionnels à l^2, m^2, n^2 ⁵⁾. En vertu des propriétés du triangle orthique et des quadrilatères inscrits les demi-angles ξ et η de ce triangle sont les angles de pente des axes \overline{OX} et \overline{OY} avec l'horizontale. Comme $k \cos \alpha = l$ et $k \sin \alpha = \sqrt{k^2 - l^2}$, il vient

$$\sin \xi = \frac{OZ_1}{OX} = \frac{h \operatorname{tg} \gamma}{h \operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{k^2 - l^2} \sqrt{k^2 - n^2}}{ln}.$$

Pour la dimétrie où $m = n$ et $l^2 = 2(k^2 - n^2)$ (1)

$$\text{il vient} \quad \sin \xi = \frac{\sqrt{k^2 - l^2}}{n\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \cos \xi = \frac{k}{n\sqrt{2}}.$$

¹⁾ Note sur l'axon. orthog., Enseign. math. 1925, 106-110.

²⁾ Zur Ingenieuraxonometrie, ZAMM 24, 86 (1944).

³⁾ Bemerkungen zur norm. dim. Axon., El. Math. 1, 108-110 (1946).

⁴⁾ Eine einfache und exakte Konstruktion..., ZAMM, 25/27, 173-174 (1947).

⁵⁾ Voir p. ex. ROSSIER, Perspective, p. 76 (Neuchâtel 1946).