

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 20 (1965)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Sur trois nombres triangulaires en progression arithmétique à différence triangulaire  
**Autor:** Sierpiski, W.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23928>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Das ergibt mit (1) und  $(h/a)^2 = \mu$ :

$$d = \frac{\sqrt{3}}{96 T} \frac{9 \mu^2 + 24 \mu + 64}{\mu}. \quad (9)$$

Diese Funktion hat für unsere Überlegungen nur einen Sinn im Bereich  $r \leq h < 2r$ , oder  $4/3 \leq \mu < \infty$ . An der Stelle  $\mu = 8/3$  liegt das Dichteminimum  $3\sqrt{3}/4 T$  vor. Mit (2) erhalten wir folgende Dichteabschätzung:

$$d \geq \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(1+3k)^2} - \frac{1}{(2+3k)^2} \right\} \right]^{-1}.$$

Ist die Dichte  $d$  gegeben, so errechnet sich aus (9) sofort ein Wert für  $\mu$ . Damit aber können wir die vier speziellen Horosphären  $H_0, H_1, H_2$  und  $H_3$  und davon ausgehend durch Spiegelungen die gesamte Überdeckung des hyperbolischen Raumes konstruieren.

H. ZEITLER, Weiden/Deutschland

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] L. FEJES TÓTH, *Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 4, 111–114 (1953).
- [2] L. FEJES TÓTH, *Über die dünnste Horozyklenüberdeckung*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7, 95–98 (1956).
- [3] H. ZEITLER, *Eine reguläre Horozyklenüberdeckung der hyperbolischen Ebene im Poincaré-Modell*. El. Math. 19, 73–77 (1964).
- [4] H. S. M. COXETER, *Arrangements of Equal Spheres in Non-Euclidean Spaces*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 5, 263–274 (1954).
- [5] L. FEJES TÓTH, *On Close Packings of Spheres in Spaces of Constant Curvature*, Public. math. 3, 158–167 (1953).
- [6] L. FEJES TÓTH, *Kugelunterdeckungen und Überdeckungen in Räumen konstanter Krümmung*, Arch. Math. 10, 307–313 (1959).
- [7] H. LIEBMAN, *Nichteuklidische Geometrie* (Verlag Göschen, Leipzig, 1905).
- [8] H. S. M. COXETER, *The Functions of SCHLÄFLI and LOBATSCHESKY*, Quart. J. Math., Oxford Ser. 6, 13–29 (1935).

## Sur trois nombres triangulaires en progression arithmétique à différence triangulaire

On démontre sans peine qu'il n'existe pas trois nombres carrés distincts formant une progression arithmétique à différence carré. En effet, s'il était, pour les nombres naturels  $x, y, z$  et  $t$ ,  $y^2 - x^2 = t^2$  et  $z^2 - y^2 = t^2$ , on aurait  $y^2 - t^2 = x^2$ ,  $y^2 + t^2 = z^2$ , d'où  $y^4 - t^4 = (xz)^2$  et cette équation, comme on le sait, n'a pas de solutions en nombres naturels  $x, y, z$  et  $t$ .

Or, je démontrerai ici d'une façon élémentaire le théorème **T** suivant:

**T.** *Il existe une infinité de triples de nombres triangulaires formant une progression arithmétique à différence triangulaire.*

*Démonstration.* Je démontrerai d'abord que le théorème **T** équivaut à la proposition **P** suivante:

**P.** *Il existe une infinité de solutions en nombres impairs  $x > 1, y \neq x, z$  et  $u$  du système d'équations*

$$x^2 + z^2 = 2y^2 \quad \text{et} \quad y^2 - x^2 = u^2 - 1. \quad (1)$$

*Démonstration* de l'équivalence de  $T$  et  $P$ . Supposons que  $T$  est vrai. Il existe donc une infinité de systèmes de nombres naturels  $m, n, r$  et  $s$  tels que pour  $t_k = k(k+1)/2$  on a

$$t_n - t_m = t_r - t_n = t_s, \quad (2)$$

donc, vu que  $t_k = [(2k+1)^2 - 1]/8$ :

$$(2n+1)^2 - (2m+1)^2 = (2r+1)^2 - (2n+1)^2 = (2s+1)^2 - 1 \quad (3)$$

ce qui donne pour

$$x = 2m+1, \quad y = 2n+1, \quad z = 2r+1, \quad u = 2s+1 \quad (4)$$

les formules (1) et on a  $x > 1$  et  $y \neq x$ . On a donc  $T \rightarrow P$ .

Or, supposons que  $P$  est vrai: les nombres  $x > 1, y \neq x, z$  et  $u$  sont donc impairs et on a les formules (4), où  $m, n, r$  et  $s$  sont des nombres naturels et  $m \neq n$ . On a donc, d'après (1), les formules (3) qui, comme on le voit sans peine, sont équivalentes aux formules (2). On en déduit que  $P \rightarrow T$ .

L'équivalence des propositions  $T$  et  $P$  est donc établie. Pour démontrer le théorème  $T$  il suffira donc de démontrer la proposition  $P$ .

LEMME: *L'équation*

$$g^2 - 24h^2 = 1 \quad (5)$$

a une infinité de solutions en nombres impairs  $g$  et  $h$ .

*Démonstration* du lemme. L'équation (5) a évidemment la solution en nombres impairs  $g = 5, h = 1$ . Or, vu l'identité

$$(49g + 240h)^2 - 24(10g + 49h)^2 = g^2 - 24h^2$$

on conclut que si les nombres impairs  $g$  et  $h$  satisfont à l'équation (5), les nombres impairs  $49g + 240h$  et  $10g + 49h$  plus grands que  $g$  et  $h$ , satisfont aussi à cette équation. Elle a donc une infinité de solutions en nombres impairs  $g$  et  $h$  et le lemme est démontré.

Soit maintenant  $g$  et  $h$  une solution quelconque de l'équation (5) en nombres impairs  $g$  et  $h > 1$  et posons

$$x = h, \quad y = 5h, \quad z = 7h, \quad u = g. \quad (6)$$

On aura  $x^2 + z^2 = h^2 + 49h^2 = 50h^2 = 2(5h)^2 = 2y^2$ , et, d'après (5):

$$y^2 - x^2 = 25h^2 - h^2 = 24h^2 = g^2 - 1.$$

Les nombres (6) sont donc impairs et satisfont aux équations (1) et,  $h$  pouvant être aussi grand que l'on veut, la proposition  $P$ , donc aussi le théorème  $T$ , se trouvent démontrés.

On peut démontrer que la solution de l'équation (5) en nombres impairs  $g$  et  $h > 1$  les plus petits est  $g = 485, h = 99$ , ce qui donne, d'après (6),  $x = 99, y = 495, z = 693, u = 485$ , et les formules (4) donnent:  $m = 49, n = 247, r = 346, s = 242$ . Les formules (2) donnent donc

$$t_{247} - t_{49} = t_{346} - t_{247} = t_{242}.$$

Or, la solution de l'équation (2) en nombres naturels les plus petits est, comme on le trouve sans peine:

$$t_6 - t_3 = t_8 - t_6 = t_5.$$

Notre procédé ne donne pas donc toutes les solutions de l'équation (2) en nombres naturels  $m$ ,  $n$ ,  $r$  et  $s$ .

W. SIERPIŃSKI (Varsovie)

## Sur les opérateurs $A$ et $B$

### Introduction

Le calcul des  $q$ -différences est considéré généralement comme une branche du calcul des différences finies. Pour les origines et les développements de ce calcul et des équations fonctionnelles auxquelles il conduit nous référons à [1]<sup>1)</sup>, [2]. Dans [3], [4], [5] et [6] on trouvera une bibliographie à peu près complète jusqu'en 1931. Le poids principal des recherches allait surtout vers la solution d'équations aux  $q$ -différences linéaires.

La présente étude donne d'abord quelques aspects essentiels des bases du calcul des  $q$ -différences. Nous abordons le problème du point de vue opérationnel. Nous donnons ensuite la démonstration des théorèmes d'existence et d'unicité des solutions des équations et systèmes d'équations simultanées aux  $q$ -différences, théorèmes qui, à notre connaissance, n'ont jamais été démontrés.

### 1. L'opérateur $A(q)$

Cet opérateur est défini, pour un nombre donné  $q$ , par la relation

$$A(q) f(x) = f(qx). \quad (1)$$

Nous observons immédiatement que

- (i) pour  $q = 0$ ,  $A(0) f(x) = f(0) = \text{constante}$ ,
- (ii) pour  $q = 1$ ,  $A(1) f(x) = f(x)$ , si bien que,  $A(1) = I$ , l'opérateur identique,
- (iii)  $A(q)$  est un opérateur linéaire puisque pour des constantes  $\alpha$  et  $\beta$ , nous aurons,  $A(q) [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha f(qx) + \beta g(qx) = \alpha A(q) f(x) + \beta A(q) g(x)$ ,
- (iv) d'après (1),  $A(p) A(q) f(x) = f(pqx) = f(qpx) = A(q) A(p) f(x)$ , si bien que,  $A(p) A(q) = A(q) A(p)$ , et,  $A(p) [A(q) A(r)] = [A(p) A(q)] A(r)$ . Il s'ensuit que les opérateurs  $A$  pour différents  $q$  ont des produits commutatifs et associatifs,
- (v) pour  $q \neq 0$ ,  $A(q) A(1/q) = I$ , si bien que  $A(1/q) = A(q)^{-1}$ ,
- (vi) pour  $q \neq 0$ , si  $A(q) f(x) = 0$ ,  $f(x) = 0$ ,
- (vii)  $A(q) x^k = q^k x^k$ , donc  $x^k$  est une fonction propre de l'opérateur  $A(q)$  avec valeur propre  $q^k$ ,
- (viii) si  $\omega_{n,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  sont les  $n$  racines  $n$ -ièmes de l'unité, alors  $A(\omega_{n,j})^n = A(\omega_{n,j}^n) = I$ , donc,  $A(\omega_{n,j}) = I^{1/n}$ .

<sup>1)</sup> Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie, page 87.