

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 20 (1965)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Eine reguläre Horosphärenüberdeckung des hyperbolischen Raumes  
**Autor:** Zeitler, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23927>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

---

El. Math.	Band XX	Heft 4	Seiten 73–96	10. Juli 1965
-----------	---------	--------	--------------	---------------

---

## Eine reguläre Horosphärenüberdeckung des hyperbolischen Raumes

### 1. Einleitung

Die Ebene soll mit kongruenten Kreisen völlig überdeckt werden. Für welche reguläre Kreisanordnung ergibt sich eine *dünnste* Überdeckung? Dieses Extremalproblem wurde im Bereich der hyperbolischen Geometrie von FEJES TÓTH behandelt [1]<sup>1)</sup> [2]. Es ist nun besonders reizvoll, diese Untersuchung im Poincaré-Modell durchzuführen. So lässt sich zum Beispiel im Modell eine dünnste Horozyklenüberdeckung der hyperbolischen Ebene wirklich konstruieren [3]. Der vorliegende Aufsatz beschäftigt sich mit einer Erweiterung gerade dieses Gedankens ins Dreidimensionale. Es wird eine spezielle, reguläre Horosphärenüberdeckung des hyperbolischen Raumes angegeben. Wir verwenden dabei ein Poincaré-Modell, dessen Fundamentalkugel zu einer euklidischen Ebene (Grundebene) entartet ist. In diesem Modell wird dann die Überdeckungsdichte unserer Anordnung ermittelt. Dabei erhalten wir eine Dichteabschätzung, die sich bereits bei H. S. M. COXETER [4] und L. FEJES TÓTH [5] [6] findet. Weiter liefert unsere Untersuchung ein Verfahren zur Konstruktion solcher spezieller Horosphärenüberdeckungen bei vorgegebener Dichte und zeigt schliesslich, dass für eine bestimmte Überdeckung das Abschätzungsminimum tatsächlich angenommen wird.

Wir setzen wieder voraus, dass der Leser mit den grundlegenden Sätzen der hyperbolischen Geometrie und mit dem genannten Poincaré-Modell vertraut ist. Bezüglich eines genaueren Studiums verweisen wir erneut auf die in [3] angegebene Literatur.

### 2. Die Konstruktion einer regulären Horosphärenüberdeckung

Die Grundebene des Modells teilt den euklidischen Raum. Die eine Hälfte ist als Träger der Modellpunkte besonders ausgezeichnet.

Alle euklidischen Kugeln, welche die Grundebene berühren und alle euklidischen Ebenen, welche zur Grundebene parallel laufen, stellen die Horosphären des Modells dar (soweit sie in der genannten ausgezeichneten Hälfte des euklidischen Raumes liegen). Die zweite Art solcher Horosphären nennen wir entartet.

---

<sup>1)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 79.

Als Ausgangspunkt für unsere Konstruktion wählen wir drei spezielle, nicht entartete, sich in einem Punkt  $P_0$  (einen zweiten, tiefer gelegenen Schnittpunkt nennen wir  $P_1$ ) schneidende Horosphären  $H_1, H_2, H_3$ . Ihre hyperbolischen Mittelpunkte  $M_1, M_2, M_3$  bilden ein gleichseitiges euklidisches Dreieck. Die drei euklidischen Kugeln  $H_1, H_2, H_3$  haben gleichen Radius  $r$ . Eine vierte Horosphäre  $H_0$  ist entartet und enthält ebenfalls den Punkt  $P_0$ . Figur 1 zeigt diese Konfiguration im Grundriss (ohne  $H_0$ ). Schneiden wir mit einer Ebene durch  $M_3, P_0, P_1$  so entsteht Figur 2. Dem schraffierten Dreieck entnehmen wir mit  $M_2M_1 = 2a$  und  $M_4P_0 = h$ :

$$(h - r)^2 + \left(\frac{2}{3} a \sqrt{3}\right)^2 = r^2$$

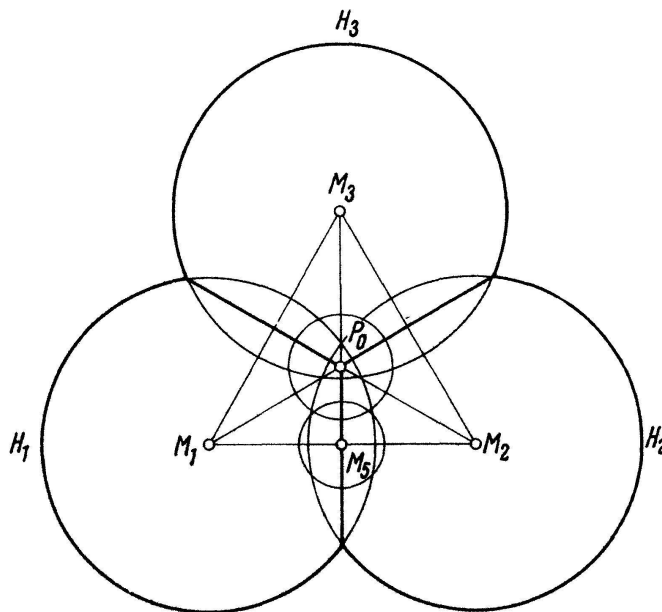
oder

$$\frac{r}{a} = -\frac{(h/a)^2 + (4/3)}{2(h/a)}. \quad (1)$$

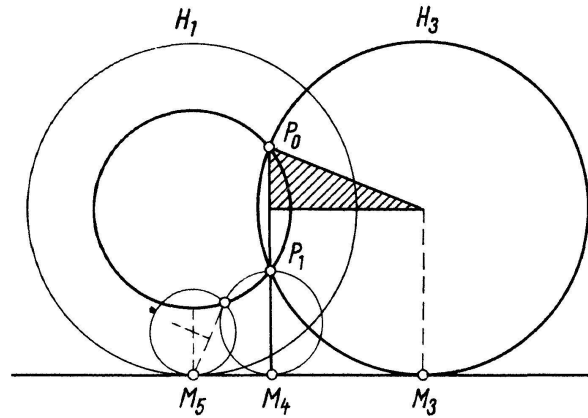
Zur Auffindung weiterer Horosphären verwenden wir hyperbolische Spiegelungen. Wir beschränken uns hier darauf, das Konstruktionsverfahren in zwei Fällen vorzuführen.

Der Umkreis des euklidischen Dreiecks  $M_1M_2M_3$  (Kreismittelpunkt  $S_1 = M_4$ ) ist Äquator der ersten Inversionskugel. Die euklidische Gerade  $P_0S_1$  enthält den, bereits erwähnten, Punkt  $P_1$ . Bei dieser Spiegelung bleiben die Horosphären  $H_1, H_2, H_3$  liegen, aus  $H_0$  wird eine neue Horosphäre  $H_4$  mit dem Mittelpunkt  $M_4$ . Neben  $P_1$  hat  $H_4$  mit je zwei der Horosphären  $H_1, H_2, H_3$  noch einen weiteren Punkt gemeinsam, etwa mit  $H_1, H_2$  den Punkt  $P_2$ .

Der Umkreis des euklidischen Dreiecks  $M_1M_2M_4$  (Kreismittelpunkt  $S_2$ ) ist Äquator einer zweiten Inversionskugel. Die euklidische Gerade  $P_1S_2$  enthält den genannten Punkt  $P_2$ . Bei dieser Spiegelung bleiben die Horosphären  $H_1, H_2, H_4$  liegen; aus  $H_3$  wird eine neue Horosphäre  $H_5$  mit dem Mittelpunkt  $M_5$ . Dieser Punkt  $M_5$  ist Mittelpunkt der euklidischen Strecke  $M_1M_2$ . Die Figuren 1 und 2 zeigen die Horosphären  $H_4$  und  $H_5$  in Grund- und Aufriss.



Figur 1



Figur 2

Durch weitere Inversionen an Kugeln, bei denen der Äquator Umkreis eines euklidischen Dreiecks ( $M_1M_4M_5$ ,  $M_2M_4M_3$ , ...) ist, ergeben sich neue Horosphären. Auf diesem Wege fortschreitend ist es möglich, das gerade euklidische Prisma mit der Grundfläche  $M_1M_2M_3$  völlig mit Horosphären auszufüllen. Durch Aneinanderfügen solcher Prismen erhalten wir schliesslich eine Horosphärenüberdeckung des gesamten hyperbolischen Raumes. Nach der Art der Konstruktion muss es sich um eine *reguläre* Horosphärenanordnung handeln.

### 3. Inhaltsberechnungen

Die Horosphärenmittelpunkte  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  und  $M_0$  bestimmen ein vierfach asymptotisches, reguläres Tetraeder mit der Inhaltsmasszahl  $T$ . Dieses Tetraeder schneidet aus den vier Horosphärenkörpern  $H_0$ ,  $H_1$ ,  $H_2$  und  $H_3$  je einen Teilkörper. Die Inhaltsmasszahlen dieser Körper nennen wir  $V_0$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  und  $V_3$ . Aufgabe dieses Abschnitts ist es, die genannten fünf Masszahlen zu bestimmen.

#### a) Die Masszahl $T$

Nach LIEBMANN ([7], Seite 66) gilt:

$$T = 6 \int_0^{\infty} \frac{x \sin(2\pi/3)}{e^{2x} + e^{-2x} - 2 \cos(2\pi/3)} dx.$$

Substitution  $z = 2x$  ergibt:

$$T = \frac{3}{4} \sqrt{3} \int_0^{\infty} \frac{z}{e^z + e^{-z} + 1} dz.$$

Der Integrand wird in eine Reihe folgender Form entwickelt:

$$z \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nz}.$$

Durch Vergleich werden die Koeffizienten ermittelt. Wir erhalten:

$$\frac{z}{e^z + e^{-z} + 1} = z \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-(1+3k)z} - e^{-(2+3k)z}).$$



Wegen gleichmässiger Konvergenz darf gliedweise integriert werden. Die dann auftretenden Integrale der Form

$$\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx$$

werden durch partielle Integration ausgewertet. Es ergibt sich:

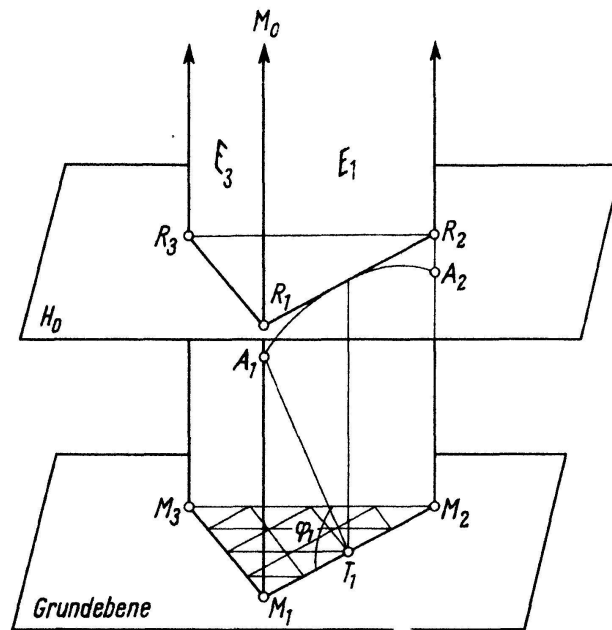
$$\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda^{-2}.$$

Damit erhalten wir schliesslich eine Formel, die bereits H. S. M. COXETER [8] auf anderem Wege gefunden hat:

$$T = \frac{3}{4} \sqrt{3} \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} - \dots \right) = \frac{3}{4} \sqrt{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{(1+3k)^2} - \frac{1}{(2+3k)^2} \right). \quad (2)$$

### b) Die Masszahl $V_0$

Euklidisch gesprochen stellt der jetzt zu berechnende Körper ein gerades Prisma dar, das sich ins Unendliche erstreckt und dessen Grundfläche das gleichseitige Drei-



Figur 3

eck  $R_1R_2R_3$  ist (Figur 3). Nach LIEBMANN ([7], Seite 152) gilt für das hyperbolische Volumen eines solchen Körpers:

$$V_0 = \frac{1}{2} F. \quad (3)$$

$F$  ist dabei die *hyperbolische* Flächenmasszahl des *euklidischen* Dreiecks  $R_1R_2R_3$ . Zur Bestimmung dieser Masszahl  $F$  zeichnen wir in einer Seitenfläche des Prismas, etwa in  $E_1$ , einen Kreis um den Mittelpunkt  $T_1$  der euklidischen Strecke  $M_1M_2$  mit dem Radius  $h$  (Figur 3). Die beiden dabei entstehenden Punkte  $A_1, A_2$  bestimmen eine hyperbolische Strecke von der hyperbolischen Länge  $a_1$ . Es gilt bekanntlich:

$$a_1 = \ln \frac{1 + \cos \varphi_1}{1 - \cos \varphi_1} \quad \text{oder} \quad \tanh \frac{a_1}{2} = \cos \varphi_1 = \frac{a}{h}. \quad (4)$$

Die euklidische Strecke  $M_1 M_2$  wird jetzt fortgesetzt halbiert. So erhalten wir etwa den Punkt  $T_n$  mit  $M_1 T_n = x_n = a/2^{n-1}$ . Durch Konstruktion eines Kreises um  $T_n$  vom Radius  $h$  ergibt sich wieder eine hyperbolische Strecke. Analog zu (4) erhalten wir für ihre hyperbolische Länge  $a_n$ :

$$a_n = \ln \frac{1 + \cos \varphi_n}{1 - \cos \varphi_n} \quad \text{oder} \quad \tanh \frac{a_n}{2} = \cos \varphi_n = \frac{x_n}{h} = \frac{a}{2^{n-1} h}.$$

Daraus mit (4):

$$\tanh \frac{a_n}{2} = \frac{1}{2^{n-1}} \tanh \frac{a_1}{2}. \quad (5)$$

Genau so verfahren wir in den Ebenen  $E_2$  und  $E_3$ . Zu den beiden Punkten  $A_1, A_2$  erhalten wir auf diesem Wege einen dritten Punkt  $A_3$ . Diese drei Punkte bestimmen ein gleichseitiges hyperbolisches Dreieck mit der Seite  $a_1$ . Seine Fläche stellt eine erste Näherung für die gesuchte Masszahl  $F$  dar.

Wir fügen jetzt  $4^{n-1}$  gleichseitige hyperbolische Dreiecke mit der Seite  $a_n$  und der Einzelfläche  $F_A$  derart aneinander, dass ihre Grundrisse das euklidische Dreieck  $M_1 M_2 M_3$  so ausfüllen wie es in Figur 3 für  $n = 3$  eingezeichnet ist. Die Gesamtfläche  $F_n$  dieser Dreiecke stellt eine bessere Näherung für die Masszahl  $F$  dar. Es gilt:

$$F_n = 4^{n-1} F_A = 4^{n-1} (\pi - 3 \alpha_n).$$

Dabei ist  $\alpha_n$  ein Winkel eines einzelnen gleichseitigen Teildreiecks. Wir formen um mit der Abkürzung  $A = (\pi - 3 \alpha_n) / \sin (\pi - 3 \alpha_n)$ :

$$F_n = 4^{n-1} A \sin (\pi - 3 \alpha_n) = 4^{n-1} A \sin \alpha_n (4 \cos^2 \alpha_n - 1).$$

Eines unserer Teildreiecke wird durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt. In einem solchen rechtwinkligen Dreieck gilt (Nepersche Regel):

$$\cos \alpha_n = \coth a_n \tanh \frac{a_n}{2}.$$

Mit einem Additionstheorem für Hyperbelfunktionen erhalten wir daraus:

$$\cos \alpha_n = \frac{1}{2} \left( 1 + \tanh^2 \frac{a_n}{2} \right).$$

Jetzt ergibt sich:

$$F_n = 4^{n-1} A \sin \alpha_n \left\{ 2 \tanh^2 \frac{a_n}{2} + \tanh^4 \frac{a_n}{2} \right\},$$

mit (5) weiter:

$$F_n = A \sin \alpha_n \left\{ 2 \tanh^2 \frac{a_1}{2} + \frac{\tanh^4 (a_1/2)}{4^{n-1}} \right\}.$$

Für  $n \rightarrow \infty$  geht  $A$  nach 1,  $\alpha_n$  wird  $\pi/3$  und wir bekommen schliesslich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \sqrt{3} \tanh^2 \frac{a_1}{2}.$$

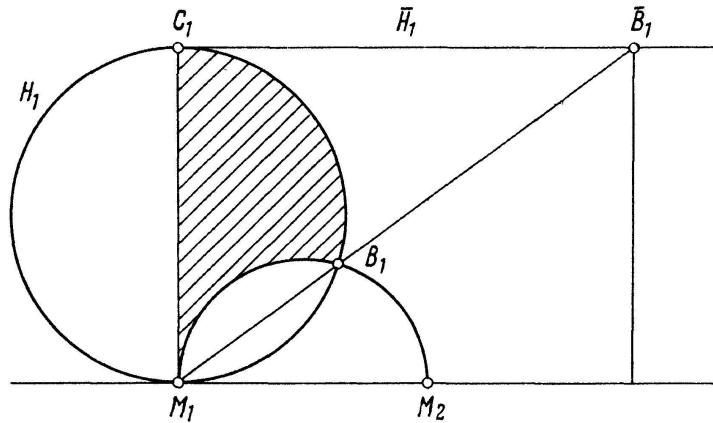
Es zeigt sich, dass wir damit die Masszahl  $F$  gefunden haben. Mit (4) und (3) ergibt sich dann die gesuchte Volumenmasszahl:

$$V_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{a}{h} \right)^2. \quad (6)$$

c) Die Masszahlen  $V_1, V_2, V_3$ 

Es genügt, eine der drei Masszahlen zu bestimmen, da die drei zugehörigen Körper zueinander kongruent sind.

Einer dieser drei Körper wird begrenzt von der Horosphärenfläche  $H_1$ , einer hyperbolischen Ebene, welche die Punkte  $M_1, M_2, M_3$  enthält, und den beiden Ebenen  $E_3$  und  $E_1$ . Figur 4 zeigt die Ebene  $E_1$  und schraffiert das vom Körper aus ihr geschnittene Flächenstück.



Figur 4

Zur Volumbestimmung des beschriebenen Körpers führen wir eine Inversion durch an einer Kugel um  $M_1$  mit dem Radius  $M_1C_1 = 2r$ . Das Bild der Horosphäre  $H_1$  ist dann eine euklidische Ebene  $\bar{H}_1$ , parallel zur Grundebene. Der euklidische Kreis durch  $M_1, B_1, M_2$  wird zu einer euklidischen Geraden, senkrecht zur Grundebene durch den Bildpunkt  $\bar{B}_1$  und  $B_1$ . Die Ebenen  $E_3$  und  $E_1$  gehen sich in über. Nach den Gesetzen der Inversion gilt für die Länge der euklidischen Strecke  $C_1\bar{B}_1$ :

$$C_1\bar{B}_1 \cdot 2a = 4r^2 \quad \text{also} \quad C_1\bar{B}_1 = \frac{2r^2}{a}. \quad (7)$$

Hyperbolisch gesehen handelt es sich bei unserer Abbildung um eine Spiegelung. Der fragliche Horosphärenkörper vom Inhalt  $V_1$  geht in einen neuen Körper gleichen Volumens über, der von derselben Gestalt ist, wie der bei b) betrachtete. An die Stelle der Grössen  $a$  und  $h$  in Formel (6) treten jetzt nach (7) die Grössen  $r^2/a$  und  $2r$ . Wir erhalten also:

$$V_1 = V_2 = V_3 = \frac{\sqrt{3}}{8} \left( \frac{r}{a} \right)^2. \quad (8)$$

## 4. Die Überdeckungsdichte

Aus Gründen der Regularität genügt es, die Überdeckungsdichte  $d$  lediglich im Bereich unseres asymptotischen Tetraeders zu bestimmen. Dort gilt:

$$d = \frac{V_0 + V_1 + V_2 + V_3}{T}.$$

Dabei sind  $V_0, V_1, V_2, V_3$  und  $T$  die im letzten Abschnitt berechneten Inhaltsmasszahlen. Für die Überdeckungsdichte innerhalb des asymptotischen Tetraeders und damit im ganzen hyperbolischen Raum erhalten wir also mit (6) und (8):

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2T} \left\{ \left( \frac{a}{h} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right\}.$$

Das ergibt mit (1) und  $(h/a)^2 = \mu$ :

$$d = \frac{\sqrt{3}}{96 T} \frac{9 \mu^2 + 24 \mu + 64}{\mu}. \quad (9)$$

Diese Funktion hat für unsere Überlegungen nur einen Sinn im Bereich  $r \leq h < 2r$ , oder  $4/3 \leq \mu < \infty$ . An der Stelle  $\mu = 8/3$  liegt das Dichteminimum  $3\sqrt{3}/4 T$  vor. Mit (2) erhalten wir folgende Dichteabschätzung:

$$d \geq \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(1+3k)^2} - \frac{1}{(2+3k)^2} \right\} \right]^{-1}.$$

Ist die Dichte  $d$  gegeben, so errechnet sich aus (9) sofort ein Wert für  $\mu$ . Damit aber können wir die vier speziellen Horosphären  $H_0, H_1, H_2$  und  $H_3$  und davon ausgehend durch Spiegelungen die gesamte Überdeckung des hyperbolischen Raumes konstruieren.

H. ZEITLER, Weiden/Deutschland

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] L. FEJES TÓTH, *Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 4, 111–114 (1953).
- [2] L. FEJES TÓTH, *Über die dünnste Horozyklenüberdeckung*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7, 95–98 (1956).
- [3] H. ZEITLER, *Eine reguläre Horozyklenüberdeckung der hyperbolischen Ebene im Poincaré-Modell*, El. Math. 19, 73–77 (1964).
- [4] H. S. M. COXETER, *Arrangements of Equal Spheres in Non-Euclidean Spaces*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 5, 263–274 (1954).
- [5] L. FEJES TÓTH, *On Close Packings of Spheres in Spaces of Constant Curvature*, Public. math. 3, 158–167 (1953).
- [6] L. FEJES TÓTH, *Kugelunterdeckungen und Überdeckungen in Räumen konstanter Krümmung*, Arch. Math. 10, 307–313 (1959).
- [7] H. LIEBMANN, *Nichteuklidische Geometrie* (Verlag Göschen, Leipzig, 1905).
- [8] H. S. M. COXETER, *The Functions of SCHLÄFLI and LOBATSCHESKY*, Quart. J. Math., Oxford Ser. 6, 13–29 (1935).

## Sur trois nombres triangulaires en progression arithmétique à différence triangulaire

On démontre sans peine qu'il n'existe pas trois nombres carrés distincts formant une progression arithmétique à différence carré. En effet, s'il était, pour les nombres naturels  $x, y, z$  et  $t$ ,  $y^2 - x^2 = t^2$  et  $z^2 - y^2 = t^2$ , on aurait  $y^2 - t^2 = x^2$ ,  $y^2 + t^2 = z^2$ , d'où  $y^4 - t^4 = (xz)^2$  et cette équation, comme on le sait, n'a pas de solutions en nombres naturels  $x, y, z$  et  $t$ .

Or, je démontrerai ici d'une façon élémentaire le théorème **T** suivant:

**T.** *Il existe une infinité de triples de nombres triangulaires formant une progression arithmétique à différence triangulaire.*

*Démonstration.* Je démontrerai d'abord que le théorème **T** équivaut à la proposition **P** suivante:

**P.** *Il existe une infinité de solutions en nombres impairs  $x > 1, y \neq x, z$  et  $u$  du système d'équations*

$$x^2 + z^2 = 2 y^2 \quad \text{et} \quad y^2 - x^2 = u^2 - 1. \quad (1)$$