Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 20 (1965)

Heft: 3

Rubrik: Kleine Mitteilungen

längere Seiten zu AB parallel liegen. Die Dichte dieser $2(n-1)$ Rechtecke im Quadrat $ABCD$ beträgt $2(n-1) \cdot 2/n = 4(n-1)/n$. Wenden wir nun auf diese Rechtecke alle möglichen Translationen $r\,\mathbf{AB} + s\,\mathbf{AD}$ mit ganzzahligen Werten von r und s an, so erhalten wir eine Minkowskische Verteilung von kongruenten Rechtecken. Da aber jetzt in das Quadrat $ABCD$ ausser den ursprünglichen Rechtecken auch diejenigen hineingreifen, deren Mittelpunkte auf den Seiten CD und DA liegen, ist die Rechtecksdichte im Quadrat, und zugleich in der ganzen Ebene, $8(n-1)/n$.

Eine Minkowskische Verteilung kongruenter Scheiben mit einer Dichte $\geqslant 8$ ist nicht bekannt.

L. FEJES TÓTH

Kleine Mitteilungen

A Note on Sequences and Subsequences

In this note we communicate a simple observation concerning finite sequences in which each term of the sequence is one of a finite set of distinct objects. Repetitions are allowed, but not immediate repetitions; in other words two consecutive terms are never equal. The observation is as follows.

Any finite sequence of N terms without immediate repetition, formed from n distinct objects, contains for each $m < n$ a sequence of M terms without immediate repetition, formed from m distinct objects, such that

$$\frac{N}{n(n-1)} \leqslant \frac{M}{m(m-1)}. \tag{1}$$

Proof. We can take the n objects to be the integers $1, 2, \ldots, n$, and we can suppose without loss of generality that n occurs a minimal number of times, say k times. Then $N \geqslant n\,k$.

We first delete any occurrence of n in the given sequence S which has different immediate neighbours to the left and right. This gives a subsequence of S without immediate repetition, and whenever n occurs in it, it is as one of a set of consecutive terms

$$\ldots b\,a\,n\,a\,c \ldots,$$

or more generally

$$\ldots b\,a\,n\,a\,n\,a\,n\,a\,c \ldots.$$

Now we delete each remaining occurrence of n, together with one of its neighbours; thus each of the above sets of consecutive terms becomes $\ldots b\,a\,c \ldots$. In the new sequence there is no immediate repetition, since $b \neq a$ and $c \neq a$.

We obtain a subsequence S_1, of S, without immediate repetition, formed from the integers $1, 2, \ldots, n-1$, and the number N_1, of terms in S_1, is at least $N - 2k$. It follows that

$$N_1 \geqslant N - 2k \geqslant (1 - 2/n)\,N.$$

Repetition of the argument gives a subsequence S_r of N_r terms, without immediate repetition, formed from the integers $1, 2, \ldots, n-r$, and satisfying

$$N_r \geqslant \frac{n-2}{n}\,\frac{n-3}{n-1} \cdots \frac{n-r-1}{n-r+1}\,N = \frac{(n-r)(n-r-1)}{n(n-1)}\,N,$$

and this gives (1) with $m = n - r$.

The inequality is of some interest in connection with sequences which, in addition to having no immediate repetition, satisfy some prescribed "hereditary" condition, that is, some condition which if valid for a sequence is necessarily valid for every subsequence.

Take as an illustration the condition that the sequence contains no subsequence

$$\ldots, a, \ldots, b, \ldots, b, \ldots, a, \ldots \ (b \neq a) .$$

Then the length of any such sequence is at most $2\,n\,(n-1)$; for we can apply (1) with $m = 2$, in which case $M \leqslant 4$. (Actually in this particular case the maximum length is $3\,n - 2$.) H. DAVENPORT (Cambridge, England) and A. SCHINZEL (Warsaw)

Note on a Geometric Inequality

If we define the mean of order k of the three positive numbers $(x) = (x_1, x_2, x_3)$ as

$$M_k(x) = \begin{cases} \min(x) \quad \text{for} \quad k = -\infty , \qquad \max(x) \quad \text{for} \quad k = +\infty , \\ (x_1\,x_2\,x_3)^{1/3} \quad \text{for} \quad k = 0 , \\ \left(\dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_i^k\right)^{1/k} \quad \text{otherwise} , \end{cases}$$

then $M_k(x)$ is a continuous function of k on the interval $-\infty \leqslant k \leqslant +\infty$ [1][1]).

Consider now an arbitrary triangle $A_1\,A_2\,A_3$; let h_i be the altitude on side a_i opposite vertex A_i, and denote by α_i the angle at A_i. We shall assume, as we may, that $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$, and hence that $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_3$ and $h_1 \geqslant h_2 \geqslant h_3$.

After A. MĄKOWSKI had shown in [2] that the inequalities

$$M_k(h) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\,M_k(a) \qquad \text{and} \qquad M_{-k}(h) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\,M_{-k}(a) \tag{1}$$

are equivalent, O. REUTTER considered [3] the problem of determining those triangles in which (1) holds for all k. He proved that a sufficient condition for this to occur is that the triangle's sides satisfy the inequality $a_2^2 \leqslant a_1\,a_3$.

In this note, we propose to give a complete answer to this question; we prove the following

Theorem: In order that $M_k(h) \leqslant (\sqrt{3}/2)\,M_k(a)$ for all k, it is necessary and sufficient that $\alpha_2 \leqslant 60°$.

Proof:

(I) A necessary condition is evidently

$$M_\infty(h) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\,M_\infty(a) ,$$

or in the notation introduced above,

$$h_1 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\,a_3 .$$

But, since $h_1 = a_3 \sin\alpha_2$, this is equivalent to $\alpha_2 \leqslant 60°$.

(II) To show that this condition is also sufficient, we distinguish two cases:

(i) If $a_2^2 \leqslant a_1\,a_3$, (1) holds for all k, by the above-mentioned result of REUTTER. There is equality if and only if the triangle is equilateral.

(ii) If $a_2^2 \geqslant a_1\,a_3$, it follows from the familiar formula

$$h_2 = \frac{a_1\,a_3}{a_2}\,\sin\alpha_2$$

that

$$\frac{h_2}{a_2} = \frac{a_1\,a_3}{a_2^2}\,\sin\alpha_2 \leqslant \sin\alpha_2 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

[1]) Numbers in brackets refer to References, page 65.

Since we also have

$$\frac{h_1}{a_3} = \frac{h_3}{a_1} = \sin \alpha_2 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2},$$

it is evident that (1) holds for all k. It is readily seen that equality occurs if and only if $A_1 A_2 A_3$ is equilateral.

J. STEINIG, Zürich

REFERENCES

[1] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD and G. PÓLYA, «*Inequalities*», Cambridge University Press, 1959 (second edition), particularly pages 12 and 15.
[2] A. MĄKOWSKI, *Some Geometric Inequalities*, El. Math. *17*, 40–41 (1962).
[3] O. REUTTER, *Ergänzende Bemerkungen zu der Arbeit von A. Mąkowski "Some Geometric Inequalities"*, El. Math. *18*, 34–35 (1963).

Aufgaben

Aufgabe 476. Démontrer qu'il existe une infinité des entiers positifs, tels que si dans leur développement décimal on change un seul chiffre, on n'obtient jamais un nombre premier, et trouver le plus petit tel entier.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Lösung. Die natürlichen Zahlen $a_n = 19!\, n + 10$, $n = 1, 2, \ldots$ haben die gewünschten Eigenschaften: Umänderung der letzten Ziffer in k $(0 \leqslant k \leqslant 9)$ ergibt die Zahl $a_n + k$, die den Teiler $10 + k$ hat; Veränderung irgendeiner anderen Ziffer ergibt eine gerade Zahl, so dass man in keinem Fall eine Primzahl erhält. Durch Probieren findet man als kleinste natürliche Zahl mit diesen Eigenschaften sofort 200.

J. SPILKER, Freiburg/Br.

J. H. VAN LINT (Eindhoven) bemerkt, dass die Zahlen mit der in der Aufgabe angegebenen Eigenschaft positive Dichte haben. (Ist $a_1, a_2, \ldots$ eine unendliche Folge und $A(n)$ die Anzahl der $a_i \leqq n$, so versteht man unter der Dichte der Folge den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} A(n)/n$.) Diese Dichte ist $\geqq 0{,}6$, denn die Dichte der Zahlen $\equiv 0 \pmod 2$ oder $\equiv 0 \pmod 5$ hat den Wert 0,6, während die Dichte der Primzahlen Null ist.

Eine weitere Lösung sandte K. WOLFF (Glarus).

Aufgabe 477. Man bestimme diejenigen ganzzahligen arithmetischen Folgen dritter Ordnung, für die die Summe der ersten n Glieder stets eine Quadratzahl ist.

W. JÄNICHEN, Berlin

Lösung: Die Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit $a_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + c_3 n^3$ hat die Summe

$$S_n = n\, c_0 + \frac{n\,(n+1)}{2}\, c_1 + \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}\, c_2 + \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}\, c_3 .$$

Die Konstanten c_i sind hier rational. S_n muss für jede genügend grosse Primzahl n durch n und als Quadratzahl auch durch n^2 teilbar sein. Das bedingt $6\,c_0 + 3\,c_1 + c_2 = 0$ oder $c_2 = -3\,(2\,c_0 + c_1)$. Damit wird

$$S_n = \frac{n^2}{4}\, \{c_3\,(n+1)^2 - 4\,(c_1 + 2\,c_0)\,(n+1) - 4\,c_0\} . \tag{1}$$

Eine quadratische Funktion $y = \alpha\, x^2 + \beta\, x + \gamma$, die für unendlich viele ganzzahlige x mit der Differenz $\Delta x = 1$ Quadratzahlen darstellt (was zunächst $\alpha > 0$ bedingt), muss das Quadrat einer linearen Funktion sein. Denn für die Gleichung $y^2 = \alpha\, x^2 + \beta\, x + \gamma$, die im allgemeinen eine Hyperbel darstellt, ist der Differenzenquotient $\Delta y/\Delta x$ für $\Delta x = 1$ im allgemeinen nicht ganzzahlig, da er mit x variabel ist und gegen einen Grenzwert konvergiert, wenn x alle natürlichen Zahlen durchläuft (Der Grenzwert ist das Steigungsmass